DOI: 10.11883/bzycj-2023-0380

霍普金森杆实验方法中材料弹性阶段杨氏模量及其曲线准确性分析*

周　玄，王伯通，武一丁，陆文成，马铭辉，余毅磊，高光发

（南京理工大学机械工程学院，江苏 南京 210094）

摘要：霍普金森压杆（split Hopkinson pressure bar, SHPB）实验中试件的应力不均匀对应力-应变曲线的弹性阶段有显著影响，而弹性阶段是研究混凝土等低声速材料或高应变率加载条件下某些金属材料的关键。针对一维杆系统，利用一维弹性增量波理论，推导了线性入射波作用时应力应变和杨氏模量的解析式，研究了试件两端应力差和速度差对试件弹性阶段曲线及杨氏模量准确性的影响；进一步给出了任意形状入射波作用下试件弹性阶段曲线和切线杨氏模量的求解方法，分析了入射波斜率和形状特征对试件应力均匀性及曲线的影响。结果表明：试件弹性阶段曲线及杨氏模量的准确性与试件两端应力差的变化趋势有关，但并不完全依赖试件两端应力差，与入射波斜率、形状特征以及试件屈服强度等因素耦合相关；线性加载波斜率增大，切线模量和割线模量与实际值的差异均增大，在斜率较大时，割线模量的准确性要高于切线模量；入射波形状以正弦波为参考，曲线的初始斜率低时，切线模量的准确性高于割线模量，曲线的初始斜率高时则相反。

关键词：SHPB；杨氏模量；应力均匀性；应力波

中图分类号：O347.4　　**国标学科代码：**13015　　**文献标志码：**A

Accuracy analysis of Young’s modulus and stress-strain curve in the elastic stage of materials using Hopkinson bar experimental method

ZHOU Xuan, WANG Botong, WU Yiding, LU Wencheng, MA Minghui, YU Yilei, GAO Guangfa

(*School of Mechanical Engineering*, *Nanjing University of Science and Technology*, *Nanjing* 210094, *Jiangsu*, *China*)

Abstract: The stress-strain data obtained from split Hopkinson pressure bar (SHPB) tests include both strain rate effects and structural effects, where the structural effects result in non-uniform stress in the elastic phase of the stress-strain curve. The elastic phase is a critical focus of study for materials like concrete with low sound velocity or certain metals under high strain rate loading conditions. In this paper, we focus on one-dimensional rod systems and employ one-dimensional elastic incremental wave theory to derive analytical expressions for stress-strain curves and Young’s modulus under one-dimensional stress wave conditions with linear incident waves. We investigate the effects and mechanisms of stress difference and velocity difference at both ends of the specimen on the accuracy of stress-strain curves and Young’s modulus. Furthermore, we provide a method for determining stress-strain curves and tangent Young’s modulus during the elastic phase for arbitrary incident waveforms. We analyze the influence of the incident wave slope and shape characteristics on the stress uniformity in specimens and stress-strain curves. We establish the inherent relationship between stress uniformity and experimental stress-strain curves, and clarify the relative accuracy and applicability conditions of tangent modulus and secant modulus. The results indicate that stress uniformity is a key factor affecting the accuracy of stress-strain curves and Young’s modulus. However, the

* 收稿日期：2023-10-17；修回日期：2024-01-24

基金项目：国家自然科学基金（12172179, 11772160, 11472008）

第一作者：周　玄（1999—　），男，博士研究生，zhoux@njust.edu.cn

通信作者：高光发（1980—　），男，博士，教授，博士生导师，gfgao@ustc.edu.cn

accuracy of Young’s modulus is not solely dependent on the change in stress difference at both ends of the specimen; it is also related to the factors such as the incident wave slope, shape characteristics, and the elastic segment range of the specimen. An increase in the linear wave slope leads to a greater difference between the tangent modulus and the secant modulus from the actual values. For larger slopes, the accuracy of the secant modulus is higher than that of the tangent modulus. When the incident wave shape is considered as a reference, curves with low initial slopes, such as sine waves, have higher accuracy for the tangent modulus compared to the secant modulus, whereas curves with high initial slopes show the opposite trend. For concrete specimens, we verify the influence of incident wave slope on Young’s modulus and evaluate the maximum incident wave slopes for concrete specimens to reach accurate values, which are 0.128 MPa/μs for the tangent modulus and 0.319 MPa/μs for the secant modulus.

Keywords: SHPB; Young’s modulus; stress uniformity; stress wave

分离式霍普金森压杆（split Hopkinson pressure bar, SHPB）被广泛应用于材料高应变率下的压缩力学性能测试[1]，其原理建立在一维应力波假设和应力均匀假设的基础之上，一维应力波假设忽略弥散效应，可以通过一维弹性波理论来分析问题；而应力均匀假设则将材料的结构惯性效应与应变率效应进行解耦，便于研究所关注材料的应变率效应[2]。通常情况下，应力波弥散效应发生在弹性杆中，仅涉及弹性波理论，且可通过控制方程进行初步校正[3-4]。与之相比，应力不均匀则对 SHPB 实验有着更加严格的限制：一方面，应力不均匀限制了所获得材料的应变率上限，另一方面，也影响了通过实验获取的有效数据的范围。一般而言，当入射波足够陡峭时，试件到达屈服强度的时间较短，此时试件弹性阶段的应力应变不准确，因此，通常学者们不关注 SHPB 实验中材料的弹性阶段[5]。然而，仍有部分研究[6-8] 忽略材料弹性阶段的应力不均匀性，认为 SHPB 实验给出的弹性阶段曲线是准确的，或进一步给出其材料黏弹性特征[9-10]。其次，对于如混凝土、岩石等试件尺寸较大、声速较低的材料，通常在弹性阶段即发生碎裂[6]，甚至金属材料在高应变率加载时，其屈服点也很可能处于应力不均匀区，因而研究试件应力不均匀性对弹性阶段应力-应变曲线的影响[11] 是非常必要的。许多研究针对 SHPB 实验中的应力均匀性问题，使用理论或数值仿真方法分析了应力均匀性的影响因素，并给出了相应的改进措施[12-14]；另有一些研究分析了应力均匀性对 SHPB 实验结果的影响规律[15]，但均未阐明应力均匀性与应力-应变曲线的内在联系与影响机理。

事实上，材料结构惯性效应（即应力波效应）导致的应力不均匀在 SHPB 实验中是客观存在的，试件在加载过程中的应力-应变关系本身也并无错误，仅仅是因为我们使用了应力均匀这一假设，从而导致认为获得的应力-应变曲线是不准确的。因此，若要确保 SHPB 实验结果更具科学准确性，或利用 SHPB 实验获取材料动态加载下的弹性阶段曲线，不应仅试图通过改善试件的应力均匀性[16] 来达成，而应建立应力均匀性与实验应力-应变曲线的内在联系。本文中将在一维应力波假设的前提下，考虑材料的结构惯性效应，利用应力波理论定量分析试件的应力-应变曲线以及应力波效应对应力-应变曲线的影响，建立应力均匀性与应力-应变曲线的关系，给出不同入射波对试件弹性阶段曲线以及杨氏模量的影响；分析并得到切线模量和割线模量的相对准确值及适用条件，以期从试件的应力-应变关系中解耦出结构效应的影响，从而获得材料本身准确的应力-应变曲线，为后续 SHPB 实验中杨氏模量准确性的分析以及实验设计提供参考。

1　典型 SHPB 试验数值模拟

使用 ABAQUS 有限元软件对铝合金试件的 SHPB 实验进行数值模拟，SHPB 实验的二维轴对称有限元模型如图 1 所示，其中入射杆和透射杆材料均为钢，直径为 14.5 mm，密度为 7 830 kg/m^3，杨氏模量为 210 GPa，泊松比为 0.29；入射杆和透射杆长度分别为 2.0 和 1.5 m。试件材料为铝合金，直径为 10 mm，长度为 5 mm，密度为 2.7 g/cm^3，杨氏模量为 70 GPa，泊松比为 0.33。由于本文的主要关注点在试件的弹性变形阶段，因此将铝合金材料的本构模型简化为双线性等向硬化塑性模型，如图 2 所示。为了

减少计算量，采用二维轴对称模型进行数值仿真，网格尺寸为 0.25 mm，入射杆与试件、试件与透射杆之间均建立面-面接触。由于在实际实验过程中试件与杆之间会添加润滑剂，因此将摩擦因数设为 0.05。以上参数的准确性与数值模拟的有效性均已经过验证[17]。为了更接近实验的实际波形，将实验中采集到的入射波电信号转换为应力信号后直接施加在入射杆端面，如图 1 所示。

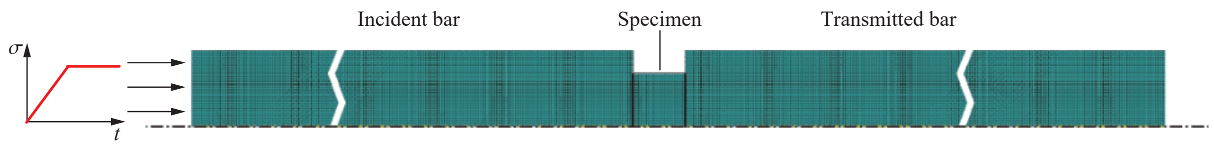


图 1　SHPB 模型示意图

Fig. 1　SHPB model schematic diagram

图 3 为铝合金 SHPB 实验中的实际入射波。根据铝合金屈服强度和试件与杆的横截面面积之比，可以近似估算出屈服强度对应的入射波强度，以该段入射波作为参考，最终仿真输入的入射波如图 4 所示，图中红色上升沿斜率与图 3 中实际入射波形对应。为了研究加载应变率对试件弹性阶段的影响，在保证入射波应力平台不变的情况下，改变其线性段加载时长，设置 1、8、80 μs 三种不同上升沿时长的入射波。

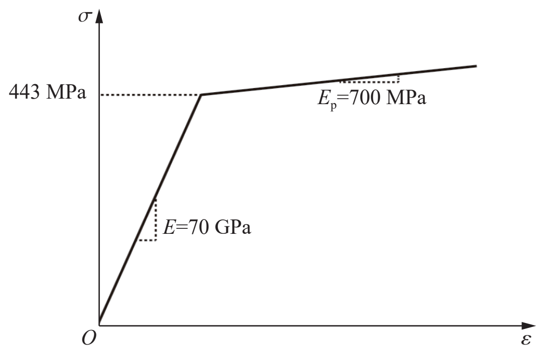


图 2　铝合金双线性本构模型

Fig. 2　Bilinear constitutive model of aluminum alloy

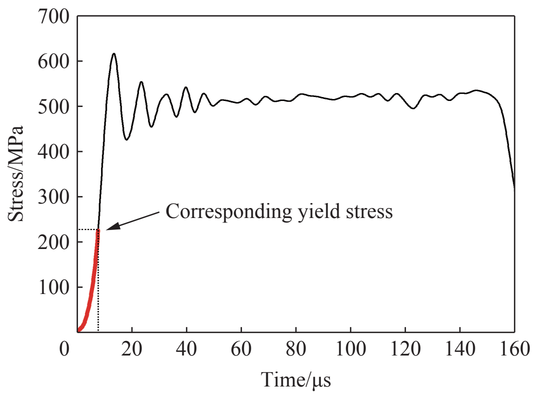


图 3　实际入射波

Fig. 3　Actual incident wave

图 5 和图 6 分别为根据仿真波形结果求得的不同时长上升沿的线性入射波作用下试件应力-应变曲线的弹性阶段。从图中可以看出，无论是“三波法”还是“二波法”，计算出的弹性阶段曲线与理论曲线差异均较大，且增大或减小入射波上升沿时长均无法得出准确的杨氏模量。

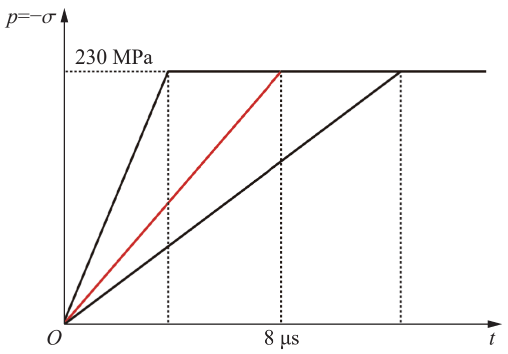


图 4　仿真输入线性波

Fig. 4　Simulated input linear waves

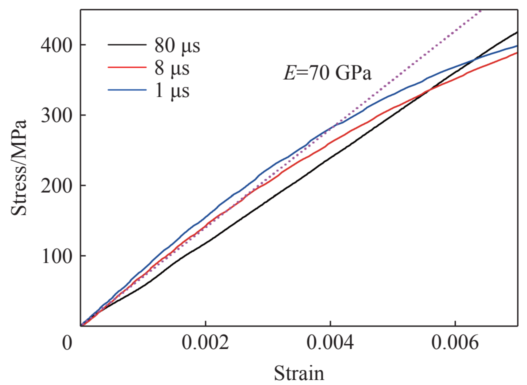


图 5　“三波法”应力-应变曲线

Fig. 5　Stress-strain curves using the three-wave method

定义应力-应变曲线在屈服应变之前部分的拟合斜率为拟合模量，屈服应变点与原点连线的斜率为割线模量，可进一步给出不同入射波上升沿时长下应力-应变曲线的拟合模量和割线模量，如图 7 所示，从图中可以看出，“三波法”和“二波法”得出的杨氏模量均小于实际输入值 70 GPa，且并无明显规律。另外，从图 5 中还可以看出，随着上升沿时长的减小，应力-应变曲线更加弯曲，出现了唯象的“黏性效应”。以上分析表明，当前使用 SHPB 装置进行材料杨氏模量的测定仍缺乏依据，杨氏模量结果的准确性仍无法判断，其次，材料的“黏性效应”也未必是材料力学性能的真实反映，可能是数据处理方法、应力不均匀或应力波弥散等导致的。

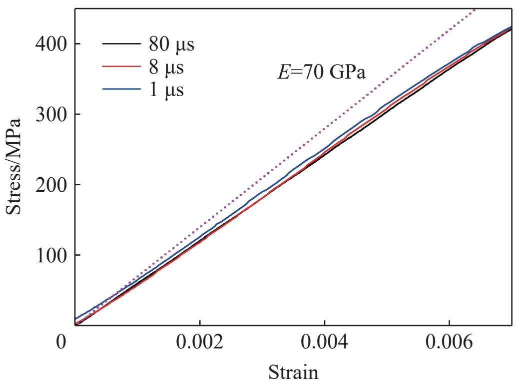


图 6　“二波法”应力-应变曲线

Fig. 6　Stress-strain curves using the two-wave method

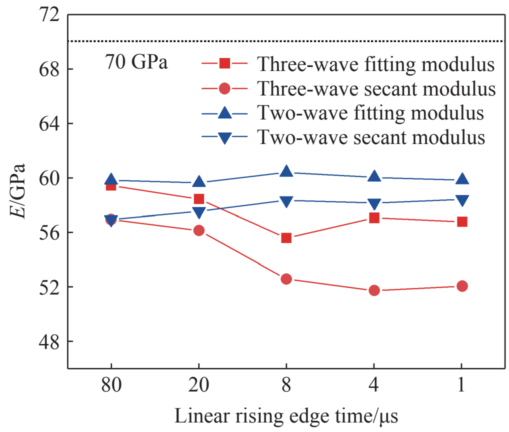


图 7　不同上升沿时长时应力-应变曲线的拟合模量和割线模量

Fig. 7　Fitted modulus and secant modulus of stress-strain curves with different rise times

2　一维应力波条件下 SHPB 实验杨氏模量分析

通过上节分析可知，在 SHPB 实验条件下，即考虑杆中应力波弥散、端面摩擦效应等时，使用“三波法”和“二波法”测得的试件的杨氏模量都与实际值存在明显差异。本节仅针对应力均匀性这一要素，利用应力波理论，结合数值仿真，分析一维应力波假设下使用 SHPB 装置测定的试件杨氏模量的准确性及其影响因素。

2.1　线性入射波作用下试件的杨氏模量理论推导与验证

考虑一个入射杆与透射杆皆为线弹性细长圆杆、紧密接触等直径且共轴的线弹性圆柱形试件的理想 SHPB 装置，假定入射杆和透射杆均为钢材料，杨氏模量为 210 GPa，泊松比为 0，密度为 7.83 g/cm^3，直径为 14.5 mm；试件为线弹性材料，杨氏模量为 50 GPa，泊松比为 0，密度为 4.00 g/cm^3，直径为 14.5 mm，长度为 6 mm。SHPB 装置整体示意图如图 8 所示。入射波为线性波，峰值应力 σ_0 为-15 MPa，入射波长度 λ（即杆中波速和加载时长的乘积）为 800 mm。

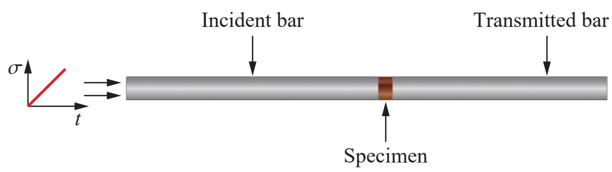


图 8　理想 SHPB 示意图

Fig. 8　Ideal SHPB schematic

若定义

$$t = nt_0 \tag{1}$$

式中：

$$t_0 = \frac{2l_s}{c_s} \tag{2}$$

表示弹性波在试件中往返一次所需时间，n 为往返次数。其中 l_{s} 为试件长度，c_{s} 为试件材料的一维声速。根据应力波透反射理论和线弹性波叠加原理[18]，可以给出 nt_0～$(n+1)t_0$ 之间任意时刻 t 时左端的应力 $\sigma_{t,\mathrm{l}}$ 的表达式：

$$\bar{\sigma}_{t,\mathrm{l}}=\frac{2l_{\mathrm{s}}}{\lambda}\frac{c_{\mathrm{b}}}{c_{\mathrm{s}}}\left\{n-\frac{1-k^2}{4k}\left[1-\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{2n}\right]+(\bar{t}-n)\left[1-\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{2n+1}\right]\right\}\qquad n<\bar{t}\leqslant n+1,\quad n\geqslant 0 \tag{3}$$

式中：c_{b} 为杆中的声速，

$$k=\frac{\rho_{\mathrm{s}}c_{\mathrm{s}}}{\rho_{\mathrm{b}}c_{\mathrm{b}}},\qquad \bar{\sigma}_{t,\mathrm{l}}=\frac{\sigma_{t,\mathrm{l}}}{\sigma_0},\qquad \bar{t}=\frac{t}{t_0} \tag{4}$$

分别为试件材料与杆材料的一维波阻抗比、t 时刻试件左端无量纲应力和无量纲时间。

类似地，可以给出试件右端无量纲应力 $\bar{\sigma}_{t,\mathrm{r}}$ 的表达式：

$$\bar{\sigma}_{t,\mathrm{r}}=\begin{cases}0 & \bar{t}\leqslant\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{2l_{\mathrm{s}}}{\lambda}\dfrac{c_{\mathrm{b}}}{c_{\mathrm{s}}}\left\{n-\dfrac{(1-k)^2}{4k}\left[1-\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2n}\right]+\left(\bar{t}-n-\dfrac{1}{2}\right)\left[1-\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2n+2}\right]\right\} & n+\dfrac{1}{2}<\bar{t}\leqslant n+\dfrac{3}{2}\end{cases} \tag{5}$$

根据式 (3)、(5)，可以计算出试件两端的无量纲应力差为：

$$\Delta\bar{\sigma}_t=\bar{\sigma}_{t,\mathrm{l}}-\bar{\sigma}_{t,\mathrm{r}}=\begin{cases}\mathit{\Gamma}\bar{t} & \bar{t}\leqslant\dfrac{1}{2}\\ \mathit{\Gamma}\left\{\dfrac{1}{4}\left[k+1+(k+3)\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2n+1}\right]-\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2n+1}(\bar{t}-n)\right\} & n+\dfrac{1}{2}<t\leqslant n+1\\ \mathit{\Gamma}\left\{\dfrac{1+k}{4}\left[1-\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2n+2}\right]+\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2n+2}(\bar{t}-n-1)\right\} & n+1<t\leqslant n+\dfrac{3}{2}\end{cases} \tag{6}$$

式中：

$$\mathit{\Gamma}=\frac{2l_{\mathrm{s}}}{\lambda}\frac{c_{\mathrm{b}}}{c_{\mathrm{s}}}\frac{2k}{1+k} \tag{7}$$

利用试件两端的应力曲线以及波阵面上的运动方程，可以计算出试件两端端面上的质点速度分别为：

$$v_{t,\mathrm{l}}=-\frac{2l_{\mathrm{s}}}{\lambda}\frac{\sigma_0}{\rho_{\mathrm{b}}c_{\mathrm{s}}}\left\{\bar{t}+(\bar{t}-n)\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{2n+1}+\frac{1-k^2}{4k}\left[1-\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{2n}\right]\right\}\qquad n<\bar{t}\leqslant n+1 \tag{8}$$

$$v_{t,\mathrm{r}}=\begin{cases}0 & \bar{t}\leqslant\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{2l_{\mathrm{s}}}{\lambda}\dfrac{\sigma_0}{\rho_{\mathrm{b}}c_{\mathrm{s}}}\left[\bar{t}-(\bar{t}-n)\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2n+2}-\dfrac{1+k^2}{4k}+\dfrac{1+4k+k^2}{4k}\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2n+2}\right] & n+\dfrac{1}{2}<\bar{t}\leqslant n+\dfrac{3}{2}\end{cases} \tag{9}$$

试件两端质点速度差为：

$$\Delta v_t=v_{t,\mathrm{l}}-v_{t,\mathrm{r}}=\begin{cases}-\dfrac{2l_{\mathrm{s}}}{\lambda}\dfrac{\sigma_0}{\rho_{\mathrm{b}}c_{\mathrm{s}}}\dfrac{2\bar{t}}{1+k} & \bar{t}\leqslant\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{2l_{\mathrm{s}}}{\lambda}\dfrac{\sigma_0}{\rho_{\mathrm{b}}c_{\mathrm{s}}}\left[(\bar{t}-n)\dfrac{2}{1+k}\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2n+1}+\dfrac{1}{2k}-\dfrac{1}{2k}\dfrac{3k+1}{1-k}\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2n+2}\right] & n+\dfrac{1}{2}<\bar{t}\leqslant n+1\\ -\dfrac{2l_{\mathrm{s}}}{\lambda}\dfrac{\sigma_0}{\rho_{\mathrm{b}}c_{\mathrm{s}}}\left[(\bar{t}-n)\dfrac{2}{1+k}\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2n+2}+\dfrac{1}{2k}-\dfrac{1}{2k}\dfrac{5k+1}{1+k}\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2n+2}\right] & n+1<\bar{t}\leqslant n+\dfrac{3}{2}\end{cases} \tag{10}$$

因此，可以计算出试件的应变率为：

$$\dot{\varepsilon}=-\frac{\Delta v_t}{l_\mathrm{s}}=\begin{cases}\dfrac{2}{\lambda}\dfrac{\sigma_0}{\rho_\mathrm{b}c_\mathrm{s}}\dfrac{2\bar{t}}{1+k} & \bar{t}\leqslant\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{2}{\lambda}\dfrac{\sigma_0}{\rho_\mathrm{b}c_\mathrm{s}}\left[(\bar{t}-n)\dfrac{2}{1+k}\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2n+1}+\dfrac{1}{2k}-\dfrac{1}{2k}\dfrac{3k+1}{1-k}\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2n+2}\right] & n+\dfrac{1}{2}<\bar{t}\leqslant n+1\\ \dfrac{2}{\lambda}\dfrac{\sigma_0}{\rho_\mathrm{b}c_\mathrm{s}}\left[(\bar{t}-n)\dfrac{2}{1+k}\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2n+2}+\dfrac{1}{2k}-\dfrac{1}{2k}\dfrac{5k+1}{1+k}\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2n+2}\right] & n+1<\bar{t}\leqslant n+\dfrac{3}{2}\end{cases}\tag{11}$$

利用试件两端应力曲线可以得到试件两端的无量纲平均应力：

$$\overline{\sigma_t}=\frac{\bar{\sigma}_{t,\mathrm{l}}+\bar{\sigma}_{t,\mathrm{r}}}{2}=$$
$$\begin{cases}\dfrac{2l_\mathrm{s}}{\lambda}\dfrac{c_\mathrm{b}}{c_\mathrm{s}}\dfrac{k}{1+k}\bar{t} & \bar{t}\leqslant\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{2l_\mathrm{s}}{\lambda}\dfrac{c_\mathrm{b}}{c_\mathrm{s}}\left\{n+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4k}+\dfrac{1}{4k}\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2n+1}+\left[1-\dfrac{1}{1+k}\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2n+1}\right]\left(\bar{t}-n-\dfrac{1}{2}\right)\right\} & n+\dfrac{1}{2}<\bar{t}\leqslant n+1\\ \dfrac{2l_\mathrm{s}}{\lambda}\dfrac{c_\mathrm{b}}{c_\mathrm{s}}\left\{n+1-\dfrac{1}{4k}+\dfrac{1}{4k}\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2n+2}+\left[1-\dfrac{1}{1+k}\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2n+2}\right](\bar{t}-n-1)\right\} & n+1<\bar{t}\leqslant n+\dfrac{3}{2}\end{cases}\tag{12}$$

将上式转换为有量纲形式，并对时间求导，结合式 (11) 可得到“三波法”实验的切线杨氏模量为：

$$E=\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}=\frac{\overline{\sigma_t}'}{\dot{\varepsilon}}=\begin{cases}\dfrac{\rho_\mathrm{s}c_\mathrm{s}^2}{4\bar{t}} & \bar{t}<\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{\rho_\mathrm{s}c_\mathrm{s}^2\left[1-\dfrac{1}{1+k}\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2n+1}\right]}{1+(\bar{t}-n)\dfrac{4k}{1+k}\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2n+1}-\dfrac{3k+1}{1-k}\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2n+2}} & n+\dfrac{1}{2}<\bar{t}<n+1\\ \dfrac{\rho_\mathrm{s}c_\mathrm{s}^2\left[1-\dfrac{1}{1+k}\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2n+2}\right]}{1+(\bar{t}-n)\dfrac{4k}{1+k}\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2n+2}-\dfrac{5k+1}{1+k}\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2n+2}} & n+1<\bar{t}<n+\dfrac{3}{2}\end{cases}\tag{13}$$

类似地，可以给出“二波法”得到的试验切线杨氏模量的表达式：

$$E=\frac{\rho_\mathrm{b}c_\mathrm{s}c_\mathrm{b}\left[1-\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2n+2}\right]}{4(\bar{t}-n)\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2n+1}+\dfrac{1-k^2}{k}\left[1-\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2n}\right]}\qquad n<\bar{t}<n+1,\quad t>\frac{1}{2}\tag{14}$$

2.2　线性入射波作用下试件两端应力差、速度差及应力-应变曲线分析

针对第 1 节中的铝合金试件，将其考虑为一维应力波条件下的 SHPB 试验，即忽略杆与试件的泊松比，忽略摩擦效应，铝合金试件直径为 14.5 mm，长度为 6 mm，其余材料属性与第 2.1 节中相同。通过上述分析，分别给出该理想 SHPB 实验在一维应力波条件下理论与仿真得出的“三波法”和“二波法”的应力-应变曲线计算结果，如图 9 所示。可以计算出通过理论“三波法”和“二波法”得到的弹性阶段的杨氏模量分别为 69.63 和 79.92 GPa，与实际值的相对误差分别为 0.53% 和 14.17%；通过数值模拟“三波法”和“二波法”得到的弹性阶段的杨氏模量分别为 69.74 和 74.00 GPa，与实际值的相对误差分别为 0.37% 和 5.40%；可见，即使在理想条件下，“二波法”计算得到的试件的杨氏模量也不准确，这与“二波法”中所用的应力均匀性假设有关；而“三波法”计算的杨氏模量则相对较准确。

根据式 (6)、(13)～(14) 可以得到试件两端无量纲应力差、速度差与切线模量的时程曲线，如图 10 所示。从图中可以看出，无论是“三波法”还是“二波法”计算出的切线杨氏模量均随着无量纲时间的增大而逐渐趋于稳定；但不同的是，“二波法”得出的恒定值本身就已偏离实际值，而“三波法”得出的恒定值最终会趋于实际值，因此，只要在材料弹性阶段加载的无量纲时间足够大，即入射波足够缓，使

用“三波法”可以得出相对准确的实验杨氏模量。另一方面，由于切线杨氏模量是根据试件两端平均应力和应变率计算得到的，因此，从图中可以看出，试件的切线实验杨氏模量的振荡与试件两端无量纲应力差以及速度差的振荡基本一致。

图 11 给出了采用“三波法”计算出的试件应力-应变曲线以及无量纲时间，从图中可以看出，曲线的振荡与试件两端无量纲应力差以及速度差的振荡类似，均随无量纲时间的增大逐渐趋于稳定。图 12 给出了采用“三波法”计算得出的切线、拟合、割线模量的无量纲时程曲线，从图中可以看出，切线模量和割线模量的变化趋势不同，切线模量在实际值附近上下振荡，而割线模量仅在实际值上方振荡，且振荡幅度与切线模量相比较小。另一方面，切线模量和割线模量较拟合模量趋于稳定值所需的无量纲时间要短。若以实际杨氏模量（70 GPa）的 0.1% 相对误差范围内为准确值，切线和割线模量达到准确值所需的无量纲时间分别为 2.265 和 2.338，而拟合杨氏模量在弹性阶段无法达到稳定值。

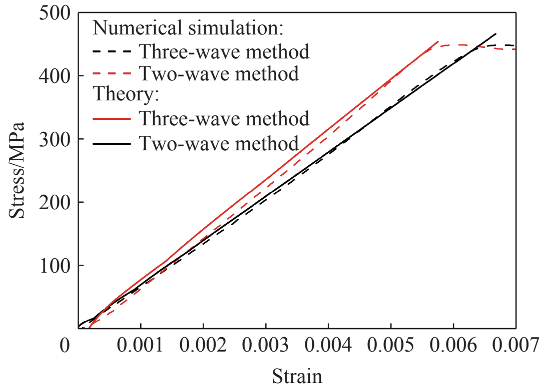


图 9　一维应力波条件下数值模拟与理论计算的应力-应变曲线

Fig. 9　Stress-strain curves for numerical simulation and theoretical calculation under one-dimensional stress wave conditions

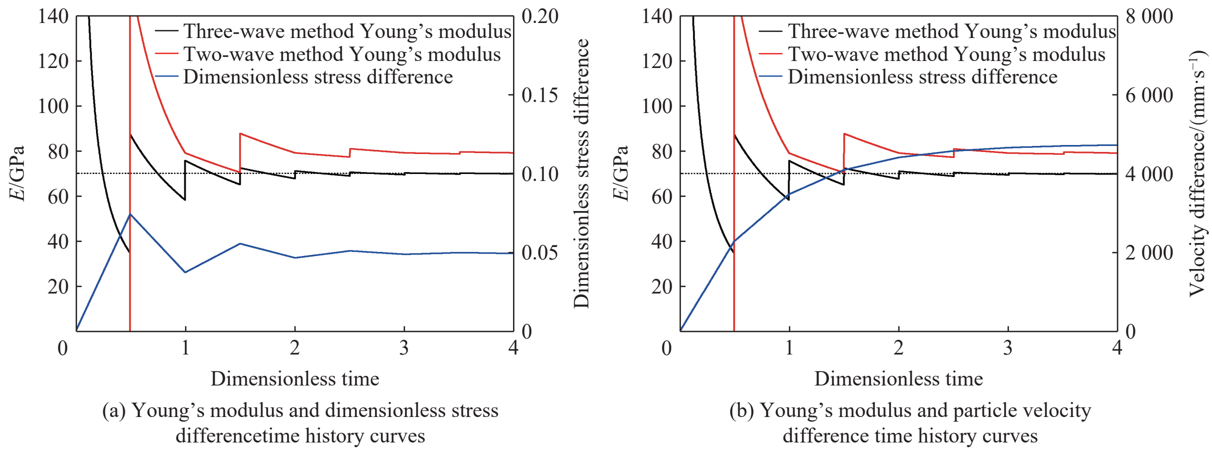


图 10　“三波法”与“二波法”的计算结果

Fig. 10　Calculation results of the three-wave method and two-wave method

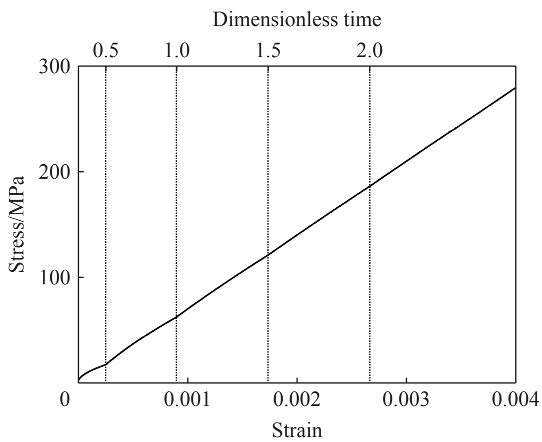


图 11　采用“三波法”计算得到的应力-应变曲线

Fig. 11　Fig.11 Stress-strain curves using the three-wave method

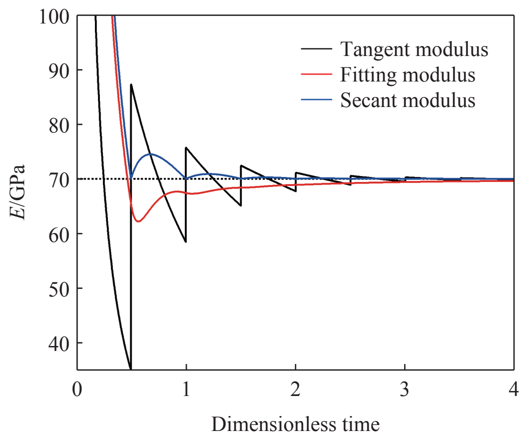


图 12　采用“三波法”计算得到的三种模量无量纲时程曲线

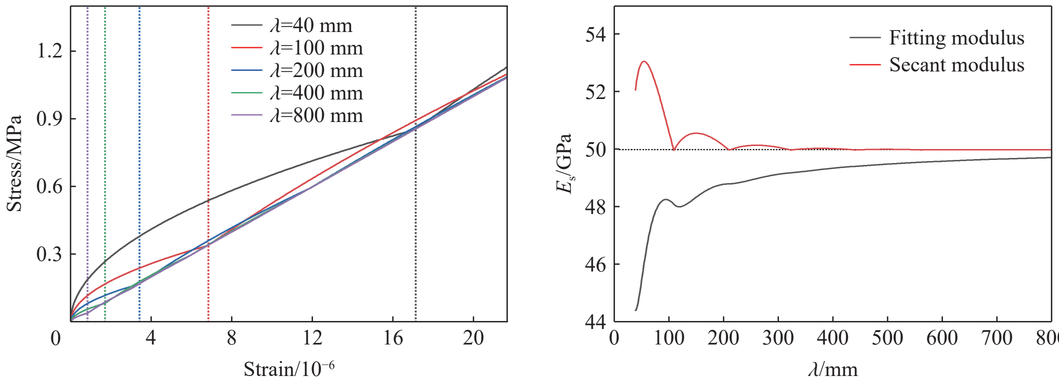
Fig. 12　Dimensionless time history curves for three moduli in the three-wave method

3　入射波对试件弹性变形阶段以及杨氏模量的影响分析

当线性入射波斜率足够小，使得试件在弹性变形阶段加载的无量纲时间足够大，此时通过“三波法”计算出的杨氏模量能够趋于准确值。这里仅使用“三波法”，通过理论分析入射波斜率和形状对试件杨氏模量准确性的影响。参考 2.1 节中的材料参数与线性入射波参数，以试件材料的杨氏模量为 50 GPa、密度为 4.00 g/cm^3，杆材料的杨氏模量为 210 GPa、密度为 7.83 g/cm^3，线性入射波的波长为 800 mm 作用下，无量纲时间为 4 时的应变作为试件的近似屈服应变。

3.1　不同斜率线性入射波

图 13(a)为波长分别为 800、400、200、100、40 mm 的线性入射波作用下采用“三波法”计算出的弹性段应力-应变理论曲线，图中竖点线分别对应每条曲线加载时间为 0.5 无量纲时间的位置。从图中可以看出，随着线性入射波波长逐渐减小，试件的加载应变率逐渐增大，导致试件弹性变形阶段所需的无量纲时间缩短，如 40 mm 入射波作用下，试件弹性阶段的加载时间仅约 0.6 无量纲时间，因此试件弹性阶段应力-应变曲线的抖动幅度和范围均增大。图 13(b)为不同波长线性波作用下试件的拟合模量和割线模量，从图中可以看出，对于较小波长的线性入射波得出的曲线，无论使用拟合杨氏模量或切线割线杨氏模量，均会与实际值产生较大差异，但随着入射波波长的增大，割线模量会更快地接近实际值。图中割线模量或拟合模量在小波长时随波长的增大而出现振荡的原因，是割线模量或拟合模量是针对整个弹性段曲线来说的，而不同弹性段曲线的终点位置决定了割线模量和拟合模量的值。



(a) Stress-strain curves　　(b) Fitted modulus and engineering modulus curves

图 13　不同波长线性入射波计算结果

Fig. 13　Calculation results by using different wavelength of the linear incident wave

线性入射波波长为 40、400 和 800 mm 时，采用 “三波法”计算得到的切线杨氏模量、试件两端无量纲应力差和试件两端质点速度差曲线如图 14～15 所示，从图中可以看出，切线杨氏模量曲线的振荡幅度随应变的增大而逐渐减小，在相同应变范围内，入射波波长减小使得试件两端应力差和质点速度差增大，且试件两端应力差振荡幅度也增大，导致得出的切线杨氏模量出现不同幅度的振荡。图中不同波长得出的切线杨氏模量曲线的每一次转折对应图 14 中应力-应变曲线的一次振荡，每一次振荡的时间恰好是应力波在试件中单趟传播的时间。

在此例中，若以实际杨氏模量 50 GPa 的 0.1% 相对误差范围为准确杨氏模量值，切线模量到达准确值所需的无量纲时间已经超过 4，而割线模量达到相对准确值时弹性阶段应力-应变曲线对应的无量纲时间约为 2。另外，从图 12 中可以看出，对于不同波长的入射波，在加载时间为 0.5 无量纲时间的整数倍位置处，试件的应力应变点与材料的应力应变点重合，此处的切线模量和割线模量均为准确值。

在一维应力波假设条件下，对于线性入射波而言，若入射波斜率足够小，采用“三波法”可以给出相对准确的杨氏模量。另一方面，若入射波斜率不满足切线模量达到恒定值的最小斜率[19]，则割线模量可以给出相对更加准确的杨氏模量。以混凝土试件无整形器的 SHPB 实验为例[20]，实验中入射杆直径为 80 mm，试件长度为 35 mm，直径为 70 mm，密度为 2 400 kg/m^3，杨氏模量为 30 GPa，动态屈服强度约为

60 MPa, 等效屈服强度为 45.9 MPa, 入射波斜率为 4 MPa/μs, 当入射波斜率减小到原来的 1/4 时, 试件两端的无量纲应力差峰值减小了 75%, 切线模量的相对误差从 19.3% 减小到 2.3%, 割线模量的相对误差从 6.80% 减小到 0.26%; 这表明, 对于混凝土等大尺寸、低声速试件, 未经整形片设计所给出的杨氏模量是不准确的。若以实际杨氏模量 30 GPa 的 1% 相对误差为临界值, 则切线模量和割线模量到达准确值的最大入射波斜率分别为 0.128 和 0.319 MPa/μs, 另一方面, 上述仅是针对特定试件在特定斜率入射波下的分析, 根据前文所述可知, 杨氏模量的准确性也与试件的屈服强度相关, 同样, 以上述混凝土试件为例, 若仅使入射波斜率为 1 MPa/μs, 无量纲时间在 0.5～1.0 之间, 即试件屈服强度在 67.0～134.0 MPa 之间时, 切线模量和割线模量的最大相对误差分别为 32.7% 和 8.4%。

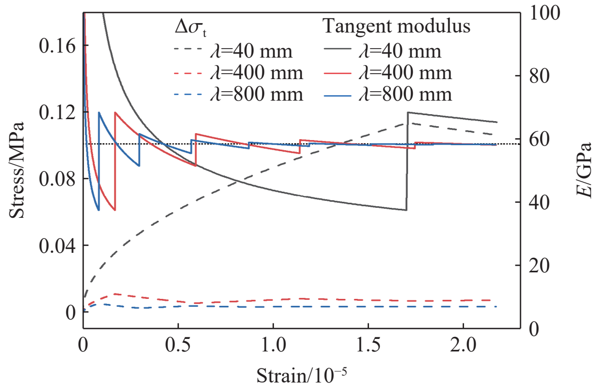


图 14　不同波长时切线模量和无量纲应力差曲线

Fig. 14　Tangent modulus and dimensionless stress difference curves at different wavelengths

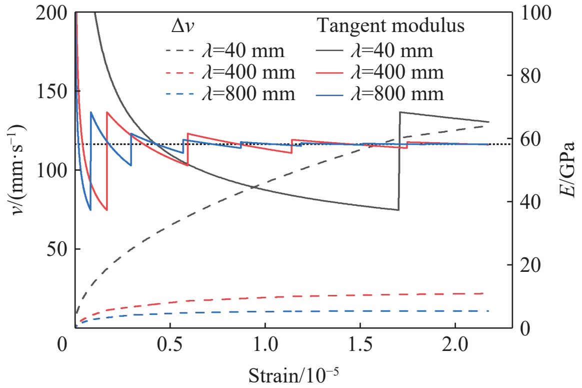


图 15　不同波长时切线模量与质点速度差曲线

Fig. 15　Tangent modulus and particle velocity difference curves at different wavelengths

3.2　不同形状入射波

根据线弹性波的透反射理论与线性叠加原理, 可以推导出任意入射波形作用下试件两端无量纲应力与无量纲时间关系的表达式:

$$\sigma_{t,\mathrm{l}}=\begin{cases}\sigma(\bar t)\dfrac{2k}{1+k} & \bar t\leqslant 1\\ \dfrac{2k}{1+k}\left[\sigma(\bar t)+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sigma(\bar t-i)\dfrac{2(1-k)^{2i-1}}{(1+k)^{2i}}\right] & n<\bar t\leqslant n+1\end{cases}\tag{15}$$

$$\sigma_{t,\mathrm{r}}=\begin{cases}0 & \bar t\leqslant \dfrac{1}{2}\\ \dfrac{4k}{(1+k)^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sigma\left(\bar t-\dfrac{2i-1}{2}\right)\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2i-2} & \dfrac{2n-1}{2}<\bar t\leqslant\dfrac{2n+1}{2}\end{cases}\tag{16}$$

为便于推导任意形状入射波作用下试件两端质点的速度, 将式 (15) 改写为:

$$\sigma_{t,\mathrm{l}}=\begin{cases}\sigma(\bar t)+\sigma(\bar t)\dfrac{k-1}{1+k} & \bar t\leqslant 1\\ \sigma(\bar t)+\sigma(\bar t)\dfrac{k-1}{1+k}+\dfrac{2k}{1+k}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sigma(\bar t-i)\dfrac{2(1-k)^{2i-1}}{(1+k)^{2i}} & n<\bar t\leqslant n+1\end{cases}\tag{17}$$

利用式 (16)～(17) 以及波阵面上的运动方程, 可以得出任意形状入射波作用下试件两端面上的质点速度分别为:

$$v_{t,\mathrm{l}}=\begin{cases}-\dfrac{\sigma_0}{\rho_{\mathrm{b}}c_{\mathrm{b}}}\left[\sigma(\bar t)-\sigma(\bar t)\dfrac{k-1}{1+k}\right] & \bar t\leqslant 1\\ -\dfrac{\sigma_0}{\rho_{\mathrm{b}}c_{\mathrm{b}}}\left[\sigma(\bar t)-\sigma(\bar t)\dfrac{k-1}{1+k}-\dfrac{2k}{1+k}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sigma(\bar t-i)\dfrac{2(1-k)^{2i-1}}{(1+k)^{2i}}\right] & n<\bar t\leqslant n+1\end{cases}\tag{18}$$

$$
v_{t,\mathrm{r}}=\begin{cases}0 & \bar{t}\leqslant\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{\sigma_0}{\rho_{\mathrm{b}}c_{\mathrm{b}}}\dfrac{4k}{(1+k)^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sigma\left(\bar{t}-\dfrac{2i-1}{2}\right)\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^{2i-2} & \dfrac{2n-1}{2}<\bar{t}\leqslant\dfrac{2n+1}{2}\end{cases}\tag{19}
$$

由于式 (16)～(19)给出的表达式均是递推叠加形式，在 n 未确定时难以给出其简化表达式，因此计算任意形状入射波作用下试件的实验杨氏模量以及应力-应变曲线时，利用式 (16)～(19)直接在程序中给出其最终曲线。

仍以试件材料杨氏模量为 50 GPa、密度为 4.00 g/cm^3，杆材料杨氏模量为 210 GPa、密度 7.83 g/cm^3，线性入射波波长为 800 mm 作用下，无量纲时间为 4 时的应变作为试件的近似屈服应变，按照此强度和应变换算后的应力峰值和波长分别为 1.32 MPa 和 70.31 mm。将弧形波简化为正弦曲线，如图 16 所示。

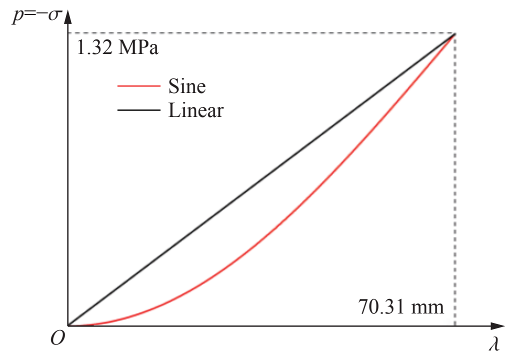
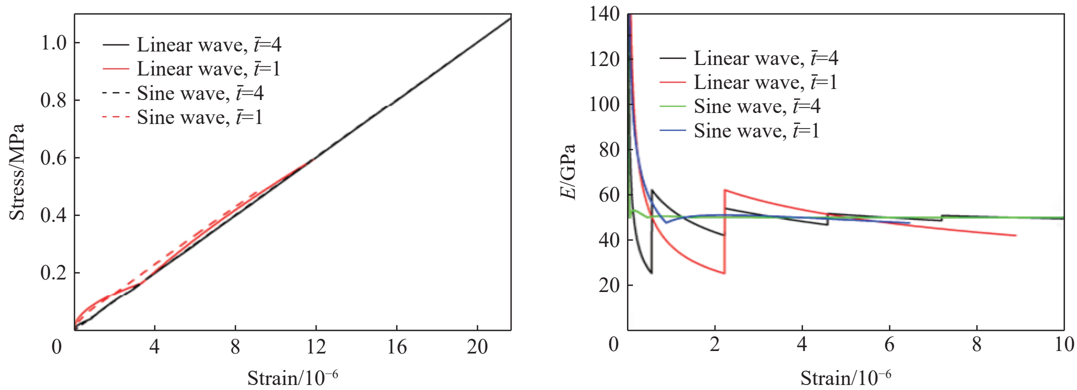


图 16　正弦和线性入射波示意图

Fig. 16　Schematic of sinusoidal and linear incident waves

根据递推公式特性，分别给出相同应力峰值、上升沿无量纲时间为 4 和 1 时，入射波为线性波和正弦波时所得出的应力-应变曲线和切线模量曲线，如图 17 所示。从图 17 中可以看出，相较于线性入射波，正弦入射波的应力-应变曲线起始阶段抖动不明显，切线模量趋于稳定值的时间从图 17(b)中来看也相对更短。但也由于正弦波斜率逐渐增大的特点，与线性入射波相比，稳定阶段的切线模量与实际值差异较大，在无量纲时间为 4 的入射波作用下，正弦波和线性入射波曲线末端的切线模量分别为 49.84 和 49.92 GPa，与实际值的相对误差分别为 0.32% 和 0.16%；若以试件实际杨氏模量 1% 相对误差范围为准确值，则正弦波和线性波到达准确值的无量纲时间分别为 0.95 和 2.50。



(a) Stress-strain curves　　(b) Tangent modulus

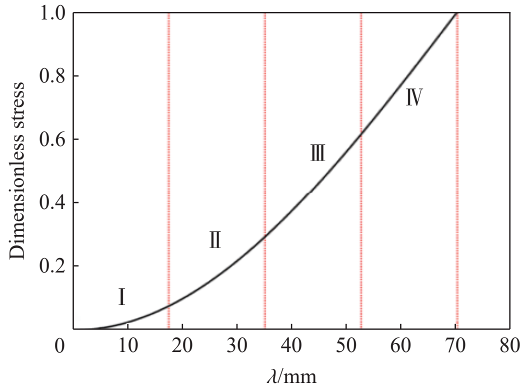
图 17　无量纲时间分别为 4 和 1 的线性波和正弦波计算结果

Fig. 17　Calculated results for linear and sinusoidal waves at dimensionless times 4 and 1

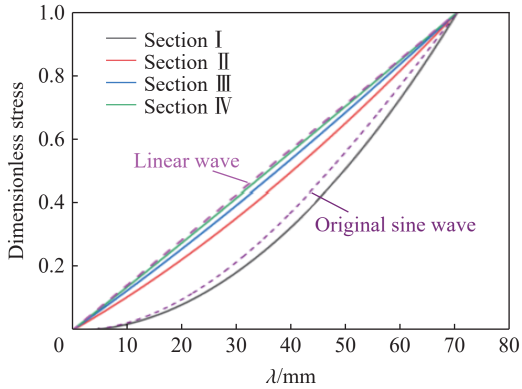
为了研究入射波形状特征对试件实验杨氏模量的影响，针对正弦入射波，将其等分为 4 段，在保证每段波形形状不变的前提下，将其波长和峰值转换至与初始的正弦波一致，具体波形分段和转换如图 18 所示。可以看出，正弦波中的 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ每一段曲线均在线性波之下，只有 Ⅰ 段曲线在初始正弦曲线之下；这 4 段入射波的斜率均随着波长逐渐增大，正弦波Ⅳ段已较为接近线性波。

图 19 给出了上述 6 种不同形状特征的入射波计算出的试件两端应力差时程曲线，可以看出，在上升沿和峰值一定的情况下，入射波初始斜率越小，试件两端应力差在初始时刻的振荡越大；而入射波末

段斜率越大，试件两端应力差在末尾时刻越大。另一方面，从图中可以看出，Ⅰ段曲线波和初始正弦波得出的试件两端应力差时程曲线整体呈明显上升趋势，而另外 4 种曲线表现为由振荡逐渐趋于平稳，可见，入射波形状特征影响试件两端应力差的变化特征，不同的曲线波和初始正弦波由于其斜率逐渐增大的特点，导致其得出的试件两端应力差并不会趋于一个稳定值，且斜率变化越大，应力差越无法趋于恒定。



(a) Initial sinusoidal wave



(b) Wavelength and peak value transformation of each sinusoidal wave segment

图 18　正弦入射波分段

Fig. 18　Segmentation of sinusoidal incident waves

分别给出入射波上升沿时长为 4 和 1 个无量纲时间时，这 4 种入射波作用下试件的应力-应变曲线和切线模量曲线，如图 20～21 所示。从图中可以看出，在无量纲时间为 4 时，4 种入射波得到的应力-应变曲线都较准确，从图 20(b)中可以看出，入射波Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ的切线模量曲线较为接近，而入射波Ⅰ的曲线不同于其余 3 条曲线在杨氏模量准确值上下振荡，而是保持在杨氏模量准确值上方振荡，且从图中可以看出，振荡趋于稳定的时间明显小于其余 3 条曲线。在无量纲时间为 1 时的结果与无量纲时间为 4 时类似，从图 21(a)中可以看出，入射波Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ作用下的应力-应变曲线较为相似，但入射波Ⅰ得出的曲线无明显转折点，整条应力-应变曲线的斜率呈逐渐减小直至稳定的趋势，如图 21(b)所示。

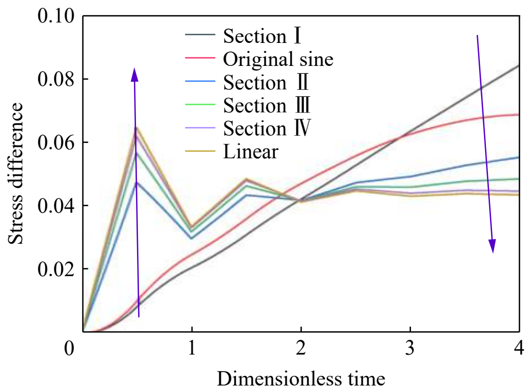


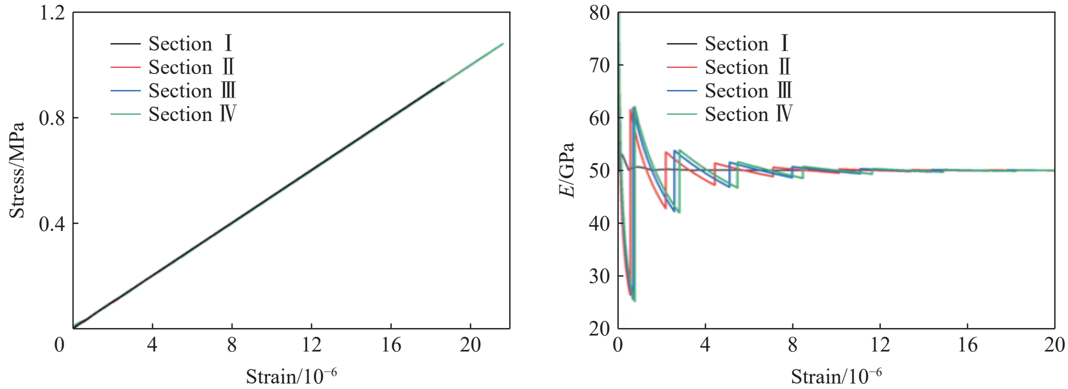
图 19　不同形状特征入射波得出的试件两端应力差

Fig. 19　Stress difference at both ends of specimens resulting from incident waves of different shapes

以初始正弦曲线、正弦曲线的Ⅰ部分和Ⅱ部分作为典型，给出三种波形作用下，无量纲时间为 4 时的切线模量和割线模量对比，如图 22 所示。从图中可以看出，正弦曲线和Ⅰ部分的模量曲线趋势类似，且此时割线模量趋近于准确值的时间要大于切线模量，而Ⅱ部分的模量曲线则与线性波类似，切线模量的振荡幅度大于割线模量。结合图 19 和图 22 来看，切线模量和割线模量的变化趋势与试件两端应力差时程曲线的特征相关。

若以试件实际杨氏模量 1% 相对误差范围为准确值，可以给出图 18(b)中 6 种斜率特征入射波作用下试件达到准确的实验杨氏模量所需的无量纲时间，见图 23。可以看出，入射波形状的改变会导致试件的应力-应变以及杨氏模量曲线特征也发生显著变化，曲线在初始正弦波越下方，即曲线的初始斜率越低，切线模量和割线模量曲线的振荡越不明显，且此时切线模量的准确性要高于割线模量。而若曲线在初始正弦波上方，即曲线的初始斜率较高，则切线模量和割线模量曲线的振荡越明显，越接近线性波的结果，此时割线模量的准确性要高于切线模量。仍以 3.1 节中混凝土试件无整形器的 SHPB 实验为例，入射波形

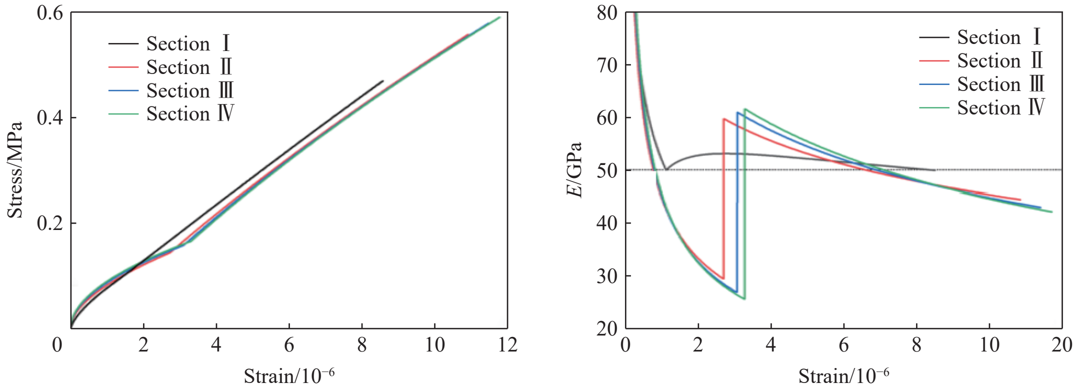
状分别为等波长和峰值强度的线性入射波和正弦波，其中线性入射波斜率为 4 MPa/μs，其余参数不变，此时正弦波相较线性波得出的试件两端无量纲应力差提高了 12.2%，切线模量的相对误差分别为 6.7% 和 19.3%，割线模量的相对误差分别为 22.7% 和 6.8%，这里也可以看出，杨氏模量的相对准确性和试件两端应力差相关，但也并不完全依赖试件两端应力差，而是与入射波斜率、形状特征等因素耦合相关。



(a) Stress-strain curves　　(b) Tangent modulus

图 20　入射波上升沿无量纲时间为 4 时，4 种曲线的计算结果

Fig. 20　Calculation results of four curves when dimensionless time of incident wave rise time is 4



(a) Stress-strain curves　　(b) Tangent modulus

图 21　入射波上升沿无量纲时间为 1 时，4 种曲线的计算结果

Fig. 21　Calculation results of four curves when dimensionless time of incident wave rise time is 1

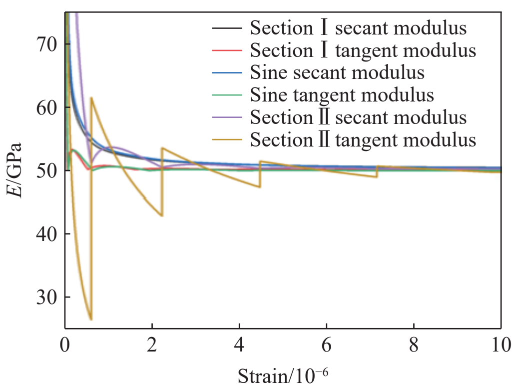


图 22　无量纲时间为 4 时三种波形切线和割线杨氏模量曲线对比

Fig. 22　Comparison of tangent and secant Young's modulus curves for three waveforms at a dimensionless time of 4

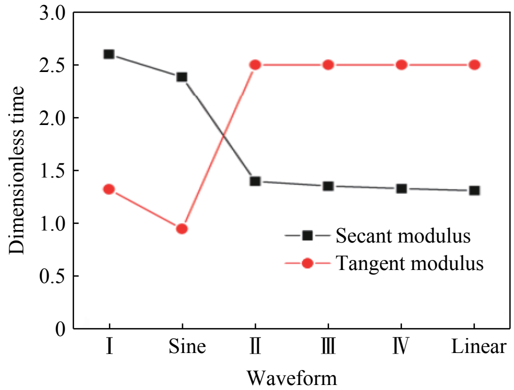


图 23　不同波形作用下试件达到准确的实验杨氏模量所需无量纲时间

Fig. 23　Dimensionless time required for accurate determination of Young's modulus in specimens with different waveforms

4 结　论

通过数值仿真对材料动态应力-应变曲线中的弹性阶段以及杨氏模量进行验证与分析，证明了在当前实验条件下，使用 SHPB 测定的材料杨氏模量并不一定准确，其次，材料的“黏性效应”也未必是材料力学性能的真实反映。进一步分析在一维应力波条件下 SHPB 实验给出的杨氏模量的准确性以及杨氏模量与应力均匀性、入射波斜率和形状特征等的关系，得到以下结论。

(1) 在一维应力波条件下，若入射波斜率足够小，使得试件在弹性变形阶段加载的无量纲时间足够大，此时通过“三波法”计算出的切线和割线杨氏模量能够趋于准确值(后续结论也均基于“三波法”)，且杨氏模量的变化趋势与试件两端无量纲应力差相似；但杨氏模量的相对准确性并不完全依赖试件两端的应力差，而是与入射波斜率、形状等因素耦合相关。

(2) 线性入射波斜率增大时，试件的加载应变率增大，导致试件弹性变形阶段所需的无量纲时间减小，而在无量纲时间较小时，试件两端的应力差和速度差都处于振荡阶段，使得较小无量纲时间内应力-应变曲线的振荡扩大至整个曲线的弹性阶段，表现为试件弹性阶段应力-应变曲线的抖动幅度和范围均增大。若入射波斜率不满足切线模量达到恒定值的最小斜率，相对切线模量来说，此时割线模量可以给出更加准确的杨氏模量值。针对混凝土试件验证了入射波斜率对杨氏模量的影响规律，给出了混凝土试件切线模量和割线模量到达准确值的最大入射波斜率分别为 0.128 和 0.319 MPa/μs。

(3) 入射波形状的改变会导致试件两端的应力差、应力应变以及杨氏模量曲线特征发生显著变化，以正弦波为参考，曲线的初始斜率越低，应力-应变曲线以及杨氏模量曲线的振荡越不明显，切线模量的准确性要高于割线模量；而若曲线的初始斜率越高，应力-应变曲线以及杨氏模量曲线的振荡越明显，此时割线模量的准确性相对更高。以混凝土试件在特定等波长和峰值强度的线性入射波和正弦波作用下为例，正弦波相较于线性波得出的试件两端无量纲应力差提高了 12.2%，切线模量的相对误差分别为 6.7% 和 19.3%，割线模量的相对误差分别为 22.7% 和 6.8%。

参考文献：

[1] KOLSKY H. An investigation of the mechanical properties of materials at very high rates of loading [J]. Proceedings of the Physical Society. Section B, 1949, 62(11): 676–700. DOI: 10.1088/0370-1301/62/11/302.

[2] TAN J Q, ZHAN M, LIU S, et al. A modified Johnson-Cook model for tensile flow behaviors of 7050-T7451 aluminum alloy at high strain rates [J]. Materials Science and Engineering: A, 2015, 631: 214–219. DOI: 10.1016/j.msea.2015.02.010.

[3] BARR A D, RIGBY S E, CLAYTON M. Correction of higher mode Pochhammer-Chree dispersion in experimental blast loading measurements [J]. International Journal of Impact Engineering, 2020, 139: 103526. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2020.103526.

[4] TYAS A, WATSON A J. An investigation of frequency domain dispersion correction of pressure bar signals [J]. International Journal of Impact Engineering, 2001, 25(1): 87–101. DOI: 10.1016/S0734-743X(00)00025-7.

[5] ZHANG D N, SHANGGUAN Q Q, XIE C J, et al. A modified Johnson-Cook model of dynamic tensile behaviors for 7075-T6 aluminum alloy [J]. Journal of Alloys and Compounds, 2015, 619: 186–194. DOI: 10.1016/j.jallcom.2014.09.002.

[6] 刘志杰, 朱志武, 谢东海, 等. 基于线性黏弹性模型的冻土动态本构关系 [J]. 西南科技大学学报, 2015, 30(4): 85–88. DOI: 10.3969/j.issn.1671-8755.2015.04.019.

LIU Z J, ZHU Z W, XIE D H, et al. Dynamic constitutive relation of frozen soil based on liner viscoelastic model [J]. Journal of Southwest University of Science and Technology, 2015, 30(4): 85–88. DOI: 10.3969/j.issn.1671-8755.2015.04.019.

[7] 杜瑞锋, 裴向军, 贾俊, 等. 多次冲击下砂岩粘弹性损伤本构关系 [J]. 吉林大学学报 (工学版), 2021, 51(2): 638–649. DOI: 10.13229/j.cnki.jdxbgxb20191171.

DU R F, PEI X J, JIA J, et al. Viscoelastic damage constitutive relation of sandstone under multiple impact load [J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2021, 51(2): 638–649. DOI: 10.13229/j.cnki.jdxbgxb20191171.

[8] 黄锐宇, 于培师, 刘禹, 等. 聚硅氧烷硅胶的黏超弹性力学行为研究 [J]. 力学学报, 2021, 53(1): 184–193. DOI: 10.6052/0459-1879-20-287.

HUANG R Y, YU P S, LIU Y, et al. Study on the visco-hyperelastic behavior of polysiloxane rubber [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2021, 53(1): 184–193. DOI: 10.6052/0459-1879-20-287.

[9] 周忠彬, 陈鹏万, 丁雁生. PBX 代用材料非线性粘弹性本构模型研究 [J]. 兵器装备工程学报, 2021, 42(6): 276–281. DOI: 10.11809/bqzbgcxb2021.06.047.

ZHOU Z B, CHEN P W, DING Y S. Study on nonlinear viscoelastic constitutive model of polymer-bonded explosive mock materials [J]. Journal of Ordnance Equipment Engineering, 2021, 42(6): 276–281. DOI: 10.11809/bqzbgcxb2021.06.047.

[10] 雷经发, 许孟, 刘涛, 等. 聚氯乙烯弹性体静动态力学性能及本构模型 [J]. 爆炸与冲击, 2020, 40(10): 103103. DOI: 10.11883/bzycj-2019-0249.

LEI J F, XU M, LIU T, et al. Static/dynamic mechanical properties and a constitutive model of a polyvinyl chloride elastomer [J]. Explosion and Shock Waves, 2020, 40(10): 103103. DOI: 10.11883/bzycj-2019-0249.

[11] 毛勇建, 李玉龙, 史飞飞. 用经典 Hopkinson 杆测试弹性模量的初步探讨 [J]. 固体力学学报, 2009, 30(2): 170–176. DOI: 10.19636/j.cnki.cjsm42-1250/o3.2009.02.010.

MAO Y J, LI Y L, SHI F F. A discussion on determining Young’s moduli by conventional split Hopkinson bar [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2009, 30(2): 170–176. DOI: 10.19636/j.cnki.cjsm42-1250/o3.2009.02.010.

[12] YUAN P, MA Q Y, MA D D. Stress uniformity analyses on nonparallel end-surface rock specimen during loading process in SHPB tests [J]. Advances in Civil Engineering, 2018, 2018: 5406931. DOI: 10.1155/2018/5406931.

[13] YANG L M, SHIM V P W. An analysis of stress uniformity in split Hopkinson bar test specimens [J]. International Journal of Impact Engineering, 2005, 31(2): 129–150. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2003.09.002.

[14] MENG H, LI Q M. Correlation between the accuracy of a SHPB test and the stress uniformity based on numerical experiments [J]. International Journal of Impact Engineering, 2003, 28(5): 537–555. DOI: 10.1016/S0734-743X(02)00073-8.

[15] HONG L, LI X B, LIU X L, et al. Stress uniformity process of specimens in SHPB test under different loading conditions of rectangular and half-sine input waves [J]. Transactions of Tianjin University, 2008, 14(6): 450–456. DOI: 10.1007/s12209-008-0077-8.

[16] ZHOU Z L, LI X B, LIU A H, et al. Stress uniformity of split Hopkinson pressure bar under half-sine wave loads [J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2011, 48(4): 697–701. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2010.09.006.

[17] 任文科, 李汶峰, 王江波, 等. 整形器对 SHPB 入射波形影响规律的定量研究 [J]. 北京理工大学学报, 2021, 41(9): 901–910. DOI: 10.15918/j.tbit1001-0645.2021.010.

REN W K, LI W F, WANG J B, et al. Quantitative study on influence of pulse shaper on split Hopkinson pressure bar (SHPB) incident waveform [J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 2021, 41(9): 901–910. DOI: 10.15918/j.tbit1001-0645.2021.010.

[18] 高光发. 固体中的应力波导论 [M]. 北京: 科学出版社, 2022: 239–245.

GAO G F. Introduction to stress waves in solid [M]. Beijing: Science Press, 2022: 239–245.

[19] WANG W, YANG J, DENG G Q, et al. Theoretical analysis of stress equilibrium of linear hardening plastic specimen during SHPB tests [J]. Experimental Mechanics, 2023, 63(8): 1353–1369. DOI: 10.1007/s11340-023-00994-3.

[20] 王江波, 丁俊升, 王晓东, 等. 粗骨料粒径对混凝土动态压缩行为的影响研究 [J]. 爆炸与冲击, 2022, 42(2): 023101. DOI: 10.11883/bzycj-2021-0147.

WANG J B, DING J S, WANG X D, et al. Effect of coarse aggregate size on the dynamic compression behavior of concrete [J]. Explosion and Shock Waves, 2022, 42(2): 023101. DOI: 10.11883/bzycj-2021-0147.

(责任编辑　曾月蓉)