

DOI: 10.11883/bzycj-2025-0343

# 基于相场法与傅里叶神经算子的柱壳 裂纹演化预测方法\*

怯亚东<sup>1</sup>, 李 想<sup>1</sup>, 姚松林<sup>2</sup>, 张 豪<sup>2</sup>

(1. 海南师范大学信息科学技术学院, 海南 海口 570100;

2. 中国工程物理研究院流体物理研究所冲击波物理与爆轰物理全国重点实验室, 四川 绵阳 621999)

**摘要:** 为应对传统有限元模拟柱壳结构断裂行为时计算成本高昂的挑战, 提出了一种结合相场法与傅里叶神经算子 (Fourier neural operator, FNO) 的柱壳裂纹演化预测框架。相场法能够自然捕捉裂纹的萌生、扩展与愈合过程, 而 FNO 模型则通过学习临界能量释放率分布、几何与载荷条件与裂纹演化之间的映射关系, 实现对裂纹全过程的高效预测。首先, 建立了基于有限元的柱壳相场模型, 生成裂纹演化数据; 随后, 构建并训练了用于裂纹萌生与扩展的串联 FNO 框架。结果表明, 该方法不仅在随机临界能量释放率、几何变动与复杂载荷条件下保持了较高的预测精度, 而且在计算效率上显著优于传统有限元模拟。

**关键词:** 柱壳结构; 相场法; 傅里叶神经算子; 裂纹萌生与扩展; 数据驱动

中图分类号: O347 国标学科代码: 13015 文献标志码: A

## A phase-field and Fourier neural operator-based method for predicting crack evolution in column-shell structures

QIE Yadong<sup>1</sup>, LI Xiang<sup>1</sup>, YAO Songlin<sup>2</sup>, ZHANG Hao<sup>2</sup>

(1. School of Information Science and Technology, Hainan Normal University, Haikou 570100, Hainan, China;

2. National Key Laboratory of Shock Wave and Detonation Physics, Institute of Fluid Physics, China Academy of Engineering Physics, Mianyang 621999, Sichuan, China)

**Abstract:** With the increasing application of engineering structures under extreme conditions, accurately predicting their fracture behavior has become a critical challenge in materials science and fracture mechanics. Column-shell structures, as typical load-bearing components, are highly sensitive to crack initiation and propagation, which directly affect their safety and reliability. Although traditional finite element methods can provide accurate fracture evolution simulations, their high computational cost limits applicability in rapid prediction scenarios. To address this issue, a hybrid framework that integrates the phase-field method with the Fourier neural operator (FNO) is proposed for predicting the fracture evolution of column-shell structures. In the proposed framework, the phase-field method is first employed to describe crack initiation, propagation, and possible coalescence in a continuous manner, avoiding explicit crack tracking and enabling physically consistent simulations. Based on this formulation, a finite element model of the column-shell structure is established to generate high-fidelity fracture evolution data under various conditions, including different critical energy release rates, geometric configurations, and loading scenarios. Subsequently, a data-driven learning framework is developed using the FNO to approximate the nonlinear mapping between input parameters and fracture responses. The input of the model includes the spatial distribution of the critical energy

\* 收稿日期: 2025-10-15; 修回日期: 2026-03-31

基金项目: 国家自然科学基金 (12162012, 12141203); 中国工程物理研究院院长基金 (YZJJZQ2023001); 冲击波物理与爆轰物理全国重点实验室基金 (2023JCJQLB05408)

第一作者: 怯亚东 (2001— ), 男, 硕士, 1027638952@qq.com

通信作者: 张 豪 (1988— ), 男, 博士, 副研究员, haozhang@caep.cn

release rate, geometric features, and applied loading conditions, while the output corresponds to the evolving phase-field variable that characterizes crack growth over time. A series of FNO models are constructed and trained in a sequential manner to separately capture crack initiation and propagation stages, forming a coupled prediction framework. The training process is carried out using the generated dataset, with appropriate normalization and validation strategies to ensure model robustness and generalization capability. The results demonstrate that the proposed method achieves high prediction accuracy under random critical energy release rates, varying geometries, and complex loading conditions, while significantly reducing computational cost compared to conventional finite element simulations. Once trained, the model enables near real-time prediction of fracture evolution.

**Keywords:** column-shell structure; phase-field method; Fourier neural operator; crack initiation and propagation; data-driven

随着材料科学和工程技术的不断发展,准确预测和控制结构在极端条件下的断裂行为已成为关键课题之一<sup>[1-3]</sup>。其中,柱壳结构因具有优良的承载能力和广泛的工程应用场景,被大量应用于石油化工<sup>[4]</sup>、海洋工程<sup>[5]</sup>以及土木工程<sup>[6]</sup>等领域。然而,柱壳结构在复杂工况下往往面临裂纹萌生、扩展甚至失效的风险,这一过程直接关系到结构的安全性与服役寿命<sup>[7-9]</sup>。因此,建立高效而精确的柱壳裂纹预测方法,不仅具有重要的理论意义,也对工程安全保障和结构优化设计具有现实价值。

传统有限元方法(finite element method, FEM)能够在细观尺度上精确模拟裂纹演化过程,并为裂纹路径、断裂韧性等力学行为提供了深入的机理解释<sup>[10]</sup>。然而,其高计算成本和长耗时特性限制了其在工程实践中的应用,尤其是在需要快速预测和多参数敏感性分析的场景下<sup>[11-12]</sup>。近年来,随着人工智能与数据驱动方法的发展,学者们尝试将机器学习与断裂力学结合,构建高效的预测模型,以克服传统方法的不足。其中,相场法<sup>[13]</sup>因能够自然捕捉裂纹的萌生、扩展与愈合过程而受到广泛关注<sup>[14-16]</sup>。通过相场方程的连续描述,裂纹演化被转化为相场变量的动态变化,从而在处理复杂断裂问题时展现出独特优势<sup>[17]</sup>。Ambati 等<sup>[18]</sup>对相场建模的理论框架与计算实现进行了系统性综述,总结了其在脆性断裂、延性断裂以及多场耦合问题中的适用性。Zhang 等<sup>[19]</sup>提出了双相场模型,用于同时描述岩石中的拉伸与剪切断裂,显著提升了对混合模式断裂的模拟能力。Nguyen 等<sup>[20]</sup>进一步发展了相场模型在脆性材料界面失效中的应用,能够有效捕捉材料界面的裂纹扩展行为。Farrell 等<sup>[21]</sup>则利用内点法求解脆性与延性断裂相场模型中的变分不等式问题,提升了数值计算的稳定性与收敛性。然而,传统相场模拟仍需较高的计算资源,难以满足快速预测的需求。因此,如何将相场法与高效的数据驱动模型结合,成为当前研究的重要方向。

与此同时,神经算子方法的发展为物理场模拟与预测提供了新的思路。傅里叶神经算子(Fourier neural operator, FNO)<sup>[22]</sup>作为一种新兴的深度学习框架,能够直接学习偏微分方程的算子映射,具备较强的泛化能力和高效的计算性能。已有研究表明,FNO在流体动力学、气候建模和材料建模等领域展现出显著优势。将其引入断裂力学研究,有望实现裂纹演化过程的高效建模与快速预测。

基于上述背景,本文提出一种融合相场法与傅里叶神经算子的柱壳裂纹演化预测框架。首先,构建柱壳相场有限元模型,生成涵盖不同临界能量释放率分布、几何变动与载荷条件的裂纹演化数据集。随后,设计串联的FNO框架,分别用于裂纹萌生和扩展过程的预测,并实现对裂纹演化全过程的高效模拟。通过与传统有限元结果的对比,验证所提方法在预测精度与计算效率上的优势。以期不仅为裂纹预测提供新的研究思路,也为复杂工程结构的断裂评估和安全设计提供理论支撑和技术参考。

## 1 研究方法

### 1.1 傅里叶神经算子模型基本原理

在复杂物理场的模拟与预测中,神经网络模型逐渐展现出其在大规模计算问题中的优越性。傅里叶神经算子作为一种新兴的数值驱动模型,凭借其高效的泛化能力和对连续空间数据的处理能力<sup>[23]</sup>,已在多个自然科学领域中获得了广泛应用。通过构建从输入参数空间到解空间的映射关系,FNO能够在

无需依赖离散网格的情况下有效预测复杂场的演化。本节将详细介绍傅里叶神经算子模型的基本原理。

传统的神经网络最初设计为映射有限维欧氏空间之间的关系。这种方法的局限性在于它依赖离散输入进行学习。引入了一种新的范式: 神经算子, 它映射无限维欧氏空间之间的关系。基于这一架构的神经网络具有强大的泛化能力, 使它们能够学习将输入函数空间映射到解空间的算子。神经算子可以通过学习映射输入参数  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$  到解空间  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$  来求解偏微分方程 (partial differential equation, PDE)。

假设  $D \subset \mathbb{R}^d$  是一个有界开放集, 定义  $\mathcal{A} = (D; \mathbb{R}^{d_a})$  作为输入函数空间, 其中  $d_a$  表示输入函数的维度。  $\mathcal{U} = (D; \mathbb{R}^{d_u})$  作为输出函数空间, 其中  $d_u$  是输出函数的维度。  $\mathcal{A}$  和  $\mathcal{U}$  都是定义在  $D$  上的可分 Banach 函数空间, 其值分别在  $\mathbb{R}^{d_a}$  和  $\mathbb{R}^{d_u}$  中。

令  $G: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{U}$  为满足 PDE 解算子的非线性映射。对于样本  $\{a_j, u_j\}_{j=1}^m$ ,  $a_j$  是从独立同分布的概率测度  $\mu$  中采样的,  $u_j = G(a_j)$  表示相应的输出。

令  $\min_{\theta \in \Theta} \mathbb{E}_{a \sim \mu} [C(G^\dagger(a, \theta), G(a))]$  为最小剩余弹性模量, 为避免相场变量趋近于 1 时材料刚度矩阵出现数值奇异, 引入该微小正数以保证有限元迭代过程的数值稳定性。参数映射  $G^\dagger: \mathcal{A} \times \Theta \rightarrow \mathcal{U}$  被构造为逼近  $G$ , 其中  $\Theta$  表示参数空间。在有限维空间  $\Theta$  中, 存在  $\theta^\dagger \in \Theta$ , 使得  $G^\dagger(\cdot, \theta^\dagger) = G_{\theta^\dagger}^\dagger \approx G$ 。神经算子通过最小化代价函数  $C: \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  来逼近  $G$ 。

$$\min_{\theta \in \Theta} \mathbb{E}_{a \sim \mu} [C(G^\dagger(a, \theta), G(a))] \quad (1)$$

由于输入函数  $a_j$  和解函数  $u_j$  通常是连续的, 因此需要在离散点上进行评估。假设  $D_j = \{x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m\} \subset D$  是  $D$  上的  $m$  个离散点, 函数  $a_j$  和  $u_j$  表示为可访问的有限样本对。使用  $m$  对数据对  $\{a_j, u_j\}_{j=1}^m$  来学习近似  $G$  的非线性微分算子  $G^\circ$ , 从而满足控制 PDE 的映射  $G: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{U}$ 。

FNO 被广泛应用于流体动力学<sup>[24]</sup> 和气候建模<sup>[25]</sup> 等领域。通过学习从任意函数依赖到解的映射, FNO 可以学习整个 PDE 族, 并且具有强大的泛化能力。图 1 显示了 FNO 模型的架构<sup>[26]</sup>。在该模型中,  $\mathbf{x}$  代表单元的材料场,  $l$  表示材料场的尺寸。输入  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{l \times l \times l}$  通过神经网络  $P$  被转换为高维输出  $v^{(0)}(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x})$ 。此高维输出  $v^{(0)}(\mathbf{x})$  随后被同时输入傅里叶层和 3D 卷积层, 表示为:

$$v^{(j+1)} = \mathcal{H}(v^{(j)}) \quad j = 0, \dots, L-1 \quad (2)$$

对  $v^{(0)}(\mathbf{x})$  进行的更新步骤定义为:

$$v^{(j+1)}(\mathbf{x}) = \sigma(Wv^{(j)}(\mathbf{x}) + (\mathcal{K}(a; \phi)v^{(j)})(\mathbf{x})) \quad \mathbf{x} \in D \quad (3)$$

式中:  $\sigma(\cdot): \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  是非线性激活函数,  $W: \mathbb{R}^{d_u} \mapsto \mathbb{R}^{d_u}$  代表线性变换,  $\mathcal{K}: \mathcal{A} \times \Theta_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$  是非局部积分算子。FNO 使用  $\mathcal{K}(a; \phi)$  作为参数化核积分变换, 其定义为:

$$(\mathcal{K}(a; \phi)v^{(j)})(\mathbf{x}) = \int_D \kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y}, a(\mathbf{x}), a(\mathbf{y}); \phi)v^{(j)}(\mathbf{y})d\mathbf{y} \quad \mathbf{x} \in D \quad (4)$$

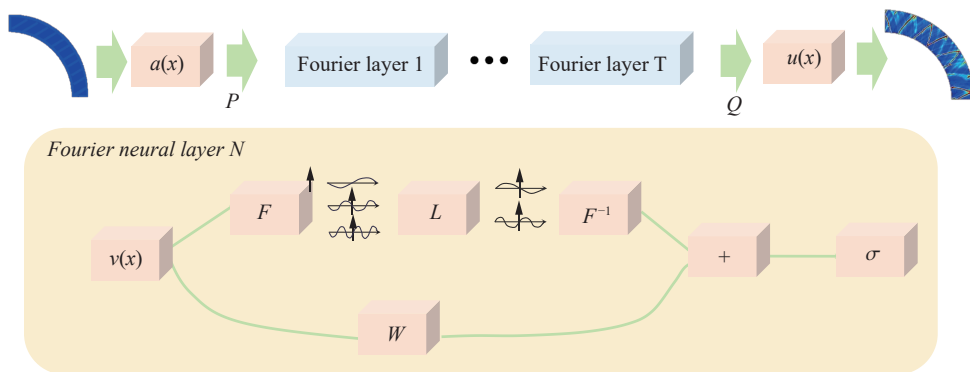


图 1 傅里叶神经算子模型的结构示意图

Fig. 1 Architecture of the Fourier neural operator (FNO) model

式中:  $\kappa_\varphi: \mathbb{R}^{2d+2d_c} \mapsto \mathbb{R}^{d_c \times d_c}$  是通过神经网络参数化的核函数, FNO 用傅里叶空间中的卷积算子来替代核积分算子。假设  $\kappa_\varphi(x, y) = \kappa_\varphi(x - y)$ , 它简化为傅里叶空间中的基本乘法操作。假设  $\mathcal{F}$  代表傅里叶变换,  $\mathcal{F}^{-1}$  代表傅里叶逆变换, 方程 (4) 可以被简化为:

$$(\mathcal{K}(a; \varphi)v^{(j)})(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\kappa_\varphi) \cdot \mathcal{F}(v^{(j)}))(x), x \in D \quad (5)$$

通过傅里叶系数直接参数化  $\kappa_\varphi$ , 核积分算子可以定义为:

$$(\mathcal{K}(\varphi)v^{(j)})(x) = \mathcal{F}^{-1}(R_\varphi \times \mathcal{F}(v^{(j)}))(x), x \in D \quad (6)$$

式中:  $R_\varphi$  是周期函数  $\kappa: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^{d_c \times d_c}$  的傅里叶变换。假设  $\kappa$  是周期的, FNO 处理傅里叶级数的离散傅里叶模式, 并在模式数  $k_{\max}$  处截断级数展开。通常, 更精细特征的高阶模式会被丢弃, 以提高收敛速度和正则化效果。随后, 通过傅里叶逆变换, 频域被转换为时空域。最后一个傅里叶层的输出被输入到三维卷积神经网络, 该网络将数据转换为目标维度。FNO 使用快速傅里叶变换 (fast Fourier transform, FFT) 算法计算  $\mathcal{F}$  和  $\mathcal{F}^{-1}$ , 从而实现快速高效的运算。

## 1.2 相场法模型基本原理

在本研究中, 利用 FNO 模型预测相场方程描述的裂纹演化过程。为了准确捕捉材料内部裂纹的演化特征, 构建了 2 个 FNO 模型 (简称模型 1 和模型 2), 分别用于预测裂纹的初始化过程和后续的扩展过程。

### 1.2.1 动力学控制方程理论

在 zhang 等建立的剪切带相场模型<sup>[27]</sup> 上进行 FNO 模型研究, 为了清晰阐述裂纹演化的物理机制, 将推导过程整理为以下连贯的逻辑步骤。基于相场剪切带模型<sup>[27]</sup> 进行推导, 其相场控制方程可表示为:

$$\eta \dot{d} = \nabla \cdot \mathbf{q} + Q \quad (7)$$

式中:  $\eta > 0$  为黏性系数,  $d$  表示相场变量, 取值范围为  $[0, 1]$ 。且:

$$\mathbf{q} = l_0 G_c \nabla d \quad (8)$$

$$Q = -\omega'(d)H - \frac{1}{c_\alpha} G_c \alpha'(d) \quad (9)$$

式中:  $l_0$  为相场模型的特征长度,  $H$  为历史最大应变能密度,  $\omega(d)$  为退化函数。且:

$$\omega(d) = \frac{(1-d)^2}{f_d} \quad (10)$$

式中:  $d_0$  表示初始损伤变量,  $a_1$  为模型参数。虽然  $f_d$  也是关于  $d$  的函数, 但为了避免复杂的求导过程, 计算  $f_d$  时取上一时刻  $d_0$ , 即:

$$f_d = (1-d_0)^2 + a_1 d_0 \left(1 - \frac{1}{2} d_0\right) \quad (11)$$

从而在对  $\omega(d)$  求导时避免对  $f_d$  进行求导, 简化推导过程。  $\alpha(d)$  为几何函数:

$$\alpha(d) = d^2 \quad (12)$$

综合以上公式, 相场控制方程可表示为:

$$\eta \dot{d} = \frac{2(1-d)H}{f_d} - \frac{G_c}{l_0} d + G_c l_0 \Delta d \quad (13)$$

为了确保量纲的一致性并提高数值计算的稳定性, 需要对方程进行归一化处理。首先, 将临界能量释放率  $G_c$  从方程右端的所有项中提取出来作为公因数。这一步操作将括号内的物理量纲统一为长度的倒数  $L^{-1}$ :

$$\eta \dot{d} = G_c \left[ \frac{2(1-d)H}{G_c f_d} - \frac{d}{l_0} + l_0 \Delta d \right] \quad (14)$$

为了简化表达, 将右端的组合系数定义为广义迁移率参数  $M$  (即  $M = G_c / \eta$ )。由此, 上述方程转化为

标准的 Ginzburg-Landau (Allen-Cahn) 动力学方程形式:

$$\frac{\partial d}{\partial t} = M \left[ \frac{2(1-d)H}{G_c f_d} - \frac{d}{l_0} + l_0 \Delta d \right] \quad (15)$$

该方程描述了一种梯度流过程, 即相场变量  $d$  沿着能量泛函下降最陡峭的方向随时间演化。

### 1.2.2 显示时间积分方案

为了与在 VUMAT 子程序 (Abaqus/Explicit) 中采用的显式积分算法保持一致, 对动力学方程应用一阶显式向前欧拉差分离散化:

$$\frac{d^{n+1} - d^n}{\Delta t} \approx \left. \frac{\partial d}{\partial t} \right|^n \quad (16)$$

将式 (15) 代入该差分近似, 得到相场更新的最终显式公式:

$$d^{n+1} = d^n + \Delta t M \left[ \frac{2(1-d^n)H^n}{G_c f_d(d^n)} - \frac{d^n}{l_0} + l_0 \Delta d^n \right] \quad (17)$$

为了严格满足损伤演化的不可逆性条件 (即  $\dot{d} \geq 0$ ), 历史场变量  $H^n$  (即公式中的  $H$ ) 采用如下迭代更新法则:

$$H^n(\mathbf{x}) = \max \{ H^{n-1}(\mathbf{x}), \psi(\varepsilon^n) \} \quad (18)$$

式中:  $\psi(\varepsilon^n)$  为当前时间步的有效应变能密度。上述显式递推格式构成了本研究中 FNO 框架学习算子的物理基础。

## 1.3 FNO 框架的数学支撑

基于上述相场剪切带方程, 从数学上证明了本文提出的串联 FNO 框架中 2 个关键映射算子的客观存在性, 并阐明了神经网络结构设计的物理依据。

### 1.3.1 用于裂纹/剪切带萌生的 FNO 模型

首先, 考察演化初期的动力学行为, 对应于裂纹/剪切带的萌生过程。将式 (15) 在时间域  $[0, t]$  上积分, 可得相场变量的解析形式:

$$d(t) = d(0) + \int_0^t M F_{\text{net}}(\tau) d\tau \quad (19)$$

式中:  $F_{\text{net}}(\tau)$  为净驱动力。其定义对应于 Ginzburg-Landau 方程右端括号内的变分导数项:

$$F_{\text{net}} = \frac{2(1-d)H}{G_c f_d} - \frac{d}{l_0} + l_0 \Delta d \quad (20)$$

在萌生阶段, 初始状态通常为无损伤状态 ( $d(0)=0$ )。注意到驱动项  $\frac{2(1-d)H}{G_c f_d}$  中显式包含了材料属性  $G_c(x)$ 。这意味着, 对于给定的几何与载荷条件, 任意时刻  $t$  的相场状态  $d(t)$ , 本质上是一个依赖于参数场  $G_c(x)$  的泛函。因此, 可以定义一个从参数空间到解空间的非线性解算子  $\mathcal{G}_t$ :

$$d(t) = \mathcal{G}_t[G_c(x)] \quad (21)$$

该式表明, 存在一个客观的算子  $\mathcal{G}_t$ , 它直接将材料断裂韧性的空间分布映射为裂纹萌生阶段的时空演化序列。本文的第 1 个 FNO 模型 (模型 1) 正是通过数据驱动的方式学习这一解算子, 从而解决了演化初期的预测问题。

### 1.3.2 时间演化算子与序列近似

其次, 考察裂纹扩展阶段的时间演化算子。从物理方程的角度, 离散化后的递推公式 (21) 表明, 相场的演化过程本质上是一个依赖于当前状态  $d^n$  和历史驱动变量  $H^n$  的动力学系统。

值得注意的是, 在本文的数据集生成与模型训练中, 迁移率  $M$  被设定为全局常数, 因此被视为算子的固有参数。然而, 对于历史变量  $H^n$ , 其值取决于完整的应变历史, 表现出强烈的路径依赖性。在纯数据驱动的预测任务中, 由于无法实时获取力学场信息, 无法直接计算  $H^n$ 。

为了解决这一问题,利用了状态重构的思想。根据延迟嵌入理论,系统的隐藏状态(此处为  $H^n$ )可以由观测变量(此处为  $d$ )的历史序列重构。基于此,构建了一个从“过去  $k$  个时间步的相场序列”到“当前时刻相场”的映射关系:

$$d^n \approx \mathcal{K}_{\text{net}}(\{d^{n-k}, \dots, d^{n-1}\}, G_c(x); \theta) \quad (22)$$

式中:  $\{d^{n-k}, \dots, d^{n-1}\}$  为输入序列;  $\theta$  为网络参数。

这里需要特别强调的是,  $\mathcal{K}_{\text{net}}$  对应的是一个隐式算子。由于  $H^n$  的演化涉及复杂的不可逆判定(max 函数)和力学相场耦合,难以推导出该映射的显式解析表达式。然而,通过 FNO 框架,能够利用数据驱动的方式,逼近这一复杂的非线性隐式算子,从而在无需显式求解力学平衡方程的情况下,实现对裂纹扩展过程的高效预测。

尽管从数学理论上,存在一个全局映射算子可直接将材料属性  $G_c(x)$  映射为任意时刻的相场状态  $d(x, t)$ ,但在本研究中,选择将求解过程拆分为萌生(算子 1)与演化(算子 2)2 个阶段,主要基于物理机制的差异性与计算稳定性的考量。在损伤萌生初期,系统状态主要由材料的非均匀性主导,适合作为静态映射处理;而一旦损伤局部化带形成,演化转变为强路径依赖过程,更适合通过短程递推学习。此外,剪切带演化属于高度非线性动力学系统,对初始条件敏感。算子 2 的设计本质上是学习离散化的控制方程,通过“短程递推”逼近物理演化的本质,有效抑制了长时预测中的误差累积,保证了预测结果严格遵循物理因果律。综上所述,算子 1 解决了“冷启动”问题,算子 2 实现了稳健的动力学演化,两者互补构成了一个完备的预测框架。

## 2 结果分析与讨论

### 2.1 用于裂纹仿真的有限元模型概述

采用 Abaqus/Explicit 建立二维动力学有限元模型,用于生成神经算子训练所需的高保真数据。数值分析基于一致单位体系,长度单位为 mm,应力单位为 GPa,时间单位为 ms,密度单位为  $\text{g}/\text{mm}^3$ 。力的单位为 N,能量单位为  $\text{N}\cdot\text{mm}$ 。材料初始密度取为  $\rho=7.82\times 10^{-3} \text{ g}/\text{mm}^3$ ,对应常规钢材料密度  $7.82 \text{ g}/\text{cm}^3$ 。

动力学控制方程为:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} \quad (23)$$

式中:  $\mathbf{u}$  为位移向量,  $\boldsymbol{\sigma}$  为 Cauchy 应力张量,  $\mathbf{b}$  为体力项。时间积分采用显式中心差分算法实现。材料行为通过用户子程序 VUMAT 实现,包含 Johnson-Cook 强度模型、Mie-Grüneisen 状态方程以及断裂与剪切损伤模型,以描述材料在高应变率加载下的弹塑性响应及损伤演化。

材料的等效流动应力采用 Johnson-Cook 模型表示为:

$$\sigma_y = (A + B \varepsilon_p^n) \left[ 1 + C \ln \left( \frac{\dot{\varepsilon}_p}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right] \quad (24)$$

式中:  $\varepsilon_p$  为等效塑性应变,  $\dot{\varepsilon}_p$  为塑性应变率。材料参数分别为:初始屈服强度  $A=0.01117 \text{ GPa}$ ,强化系数  $B=0.007420 \text{ GPa}$ ,硬化指数  $n=1$ ,应变率系数  $C=0$ ,参考应变率  $\dot{\varepsilon}_0=1\times 10^{-6} \text{ ms}^{-1}$ 。失效压力阈值取  $p_c=-2 \text{ GPa}$ 。

体积响应采用 Mie-Grüneisen 状态方程描述,其形式为:

$$p = \frac{\rho_0 c_0^2 \mu (1 - s_1 \mu - s_2 \mu^2 - s_3 \mu^3)}{(1 - \Gamma_0 \mu)^2} + \Gamma_0 E \quad (25)$$

式中:  $c_0=4552 \text{ mm}/\text{ms}$ ,  $s_1=1.496$ ,  $s_2=0$ ,  $s_3=0$ , Grüneisen 系数  $\Gamma_0=1.98$ 。

为描述材料断裂行为,采用包含特征长度尺度的层裂损伤模型。其主要参数包括:特征长度  $l=0.008 \text{ mm}$ ,断裂能  $G_f=0.3\times 10^{-6} \text{ N}/\text{mm}$ ,拉伸强度  $f_t=1.015 \text{ GPa}$ ,损伤演化指数  $M=200$ 。同时引入剪切损伤模型以刻画剪切主导破坏,其参数为:  $M=0.1$ ,  $l=0.008 \text{ mm}$ ,剪切断裂能  $G_f=1.0\times 10^{-4} \text{ N}/\text{mm}$ 。

有限元模型共包含 174 528 个节点和 86 300 个单元, 采用结构化二维网格划分。为保证神经算子模型训练的一致性, 所有样本均采用相同网格拓扑结构。外部载荷通过在指定表面施加压力载荷实现, 峰值压力为 1.2 GPa, 并通过时间幅值函数控制加载过程。边界条件通过节点集约束实现, 以避免刚体位移。该有限元模型能够在高应变率加载条件下准确捕捉材料的弹塑性响应及损伤演化过程, 为后续神经算子模型的训练与验证提供高质量数据基础。

在模型训练阶段, 使用显式相场有限元子程序 (VUEL), 通过 Abaqus 软件的求解器进行计算。所采用的模型为一个 1/4 柱壳模型, 如图 2 所示, 其内径和外径分别为 2.0 和 2.5。为了模拟真实材料的行为, 柱壳模型求解域上每个单元的临界能量释放率采用随机分布, 取值范围在 1.2~1.5 之间。在柱壳模型的 1/4 表面施加了一种边界条件, 具体大小为 3。这一设置旨在构造一个合理的仿真模型, 以便于准确评估裂纹的扩展行为。每个模型在训练过程中采用 200 个增量步进行迭代计算, 这样可以细致地捕捉到裂纹演化过程中的动态变化。

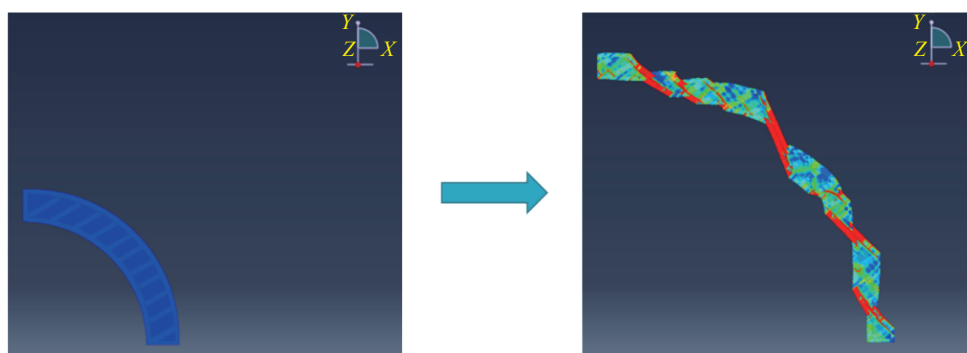


图 2 基于 Abaqus 的柱壳裂纹演化的有限元模型计算过程示意图

Fig. 2 Schematic diagram of the calculation process for the finite element model of crack evolution in cylindrical shells based on Abaqus

完成计算后, 从 Abaqus 生成的结果文件中提取数据, 将所有数据保存在一个 4 维数组文件中。该数组的第 1 个维度对应样本编号, 第 2 和第 3 个维度对应柱壳模型求解域内的所有单元, 而最后一个维度则表示时间步。这种数据结构的设计, 使得后续的训练过程能够充分利用时间序列信息, 捕捉相场随时间演化的特征。

## 2.2 基于随机分布的能量释放率预测裂纹演化

使用 3.1 节生成的 4 维数组对前述的 2 个 FNO 模型进行训练, 以实现裂纹演化过程的精准预测。模型 1 的结构如表 1 所示, 而模型 2 的结构则如表 2 所示。这 2 个模型的架构设计旨在有效提取临界能量释放率分布与相场的时间维度序列之间的关系, 从而实现对未来时刻相场的高效预测。

在模型的训练过程中, 首先将数据集划分为训练集、验证集和测试集, 共使用 500 个样本用于模型训练, 并按照 7 : 2 : 1 的比例划分为训练集、验证集和测试集。训练集用于模型参数学习, 验证集用于模型调参与防止过拟合, 测试集用于评估模型的泛化性能。通过上述数据划分方式, 能够在保证模型充分训练的同时, 对其预测能力进行客观、可靠的检验。训练集用于在  $0 \sim k$  时刻训练模型 1, 训练和测试的损失函数如图 3(a) 所示。当模型 1 收敛之后, 基于其输出的数据进一步训练模型 2。

具体而言, 首先将模型 1 输出的  $0 \sim k$  时刻数据作为输入传递给模型 2。模型 2 会首先输出第  $k+1$  时刻的相场预测值  $\text{pred}_{k+1}$ 。该预测值与对应的真实标签值  $\text{label}_{k+1}$  进行比较, 计算该时刻的损失函数  $\text{loss}_{k+1}$ 。

接着, 将从第 1 时刻到第  $k+1$  时刻的相场数据 (注意此处的时刻  $k+1$  对应于模型 1 输出的第  $k+1$  时刻预测值  $\text{pred}_{k+1}$  作为输入, 传递给模型 2。模型 2 会输出  $t+2$  时刻的相场预测值  $\text{pred}_{k+2}$ , 并将其与真实标签  $\text{label}_{k+2}$  进行比较, 计算损失函数  $\text{loss}_{k+2}$ 。

表 1 模型 1 的结构

Table 1 Structure of model 1

层编号	方程	卷积核	步长	填充	输出形状
输入					$2 \times 100 \times 863 \times 15$
1	Fc0	1	1	38	$2 \times 100 \times 863 \times 38$
2	Permute				$2 \times 38 \times 100 \times 863$
3	Fourier layer 1				$2 \times 38 \times 100 \times 863$
4	Fourier layer 2				$2 \times 38 \times 100 \times 863$
5	Fourier layer 3				$2 \times 38 \times 100 \times 863$
6	Fourier layer 4				$2 \times 38 \times 100 \times 863$
7	Conv3d ReLU	1	1	0	$2 \times 38 \times 100 \times 863$
8	Conv3d ReLU	1	1	0	$2 \times 38 \times 100 \times 863$
9	Conv3d ReLU	1	1	0	$2 \times 38 \times 100 \times 863$
10	Permute				$2 \times 100 \times 863 \times 38$
11	Fc1				$2 \times 100 \times 863 \times 8$
12	GELU				$2 \times 100 \times 863 \times 8$
13	Fc2				$2 \times 100 \times 863 \times 1$
14	View				$2 \times 100 \times 863 \times 1$

表 2 模型 2 的结构

Table 2 Structure of model 2

层编号	方程	卷积核	步长	填充	输出形状
输入					$2 \times 100 \times 863 \times 15$
1	Fc0	1	1	38	$2 \times 100 \times 863 \times 38$
2	Permute				$2 \times 38 \times 100 \times 863$
3	Fourier layer 1				$2 \times 38 \times 100 \times 863$
4	Fourier layer 2				$2 \times 38 \times 100 \times 863$
5	Fourier layer 3				$2 \times 38 \times 100 \times 863$
6	Fourier layer 4				$2 \times 38 \times 100 \times 863$
7	Conv3d ReLU	1	1	0	$2 \times 38 \times 100 \times 863$
8	Conv3d ReLU	1	1	0	$2 \times 38 \times 100 \times 863$
9	Conv3d ReLU	1	1	0	$2 \times 38 \times 100 \times 863$
10	Permute				$2 \times 100 \times 863 \times 38$
11	Fc1				$2 \times 100 \times 863 \times 8$
12	GELU				$2 \times 100 \times 863 \times 8$
13	Fc2				$2 \times 100 \times 863 \times 1$
14	View				$2 \times 100 \times 863 \times 1$

由于模型 2 具有类似于循环神经网络的结构, 因此这一过程会持续迭代, 直到计算出第  $n$  时刻的相场预测值  $\text{pred}_n$  和相应的损失值  $\text{loss}_n$ 。接下来, 将从第  $k+1$  时刻到第  $n$  时刻的所有损失函数进行累加, 得到一个累积损失值  $\text{loss}_{\text{acc}}$ 。使用这个损失函数进行反向传播, 更新模型 2 的参数。在此过程中, 模型 1 的参数保持冻结状态, 仅对模型 2 的参数进行更新。训练集和测试集的损失随迭代次数的变化曲线如图 3(b) 所示。

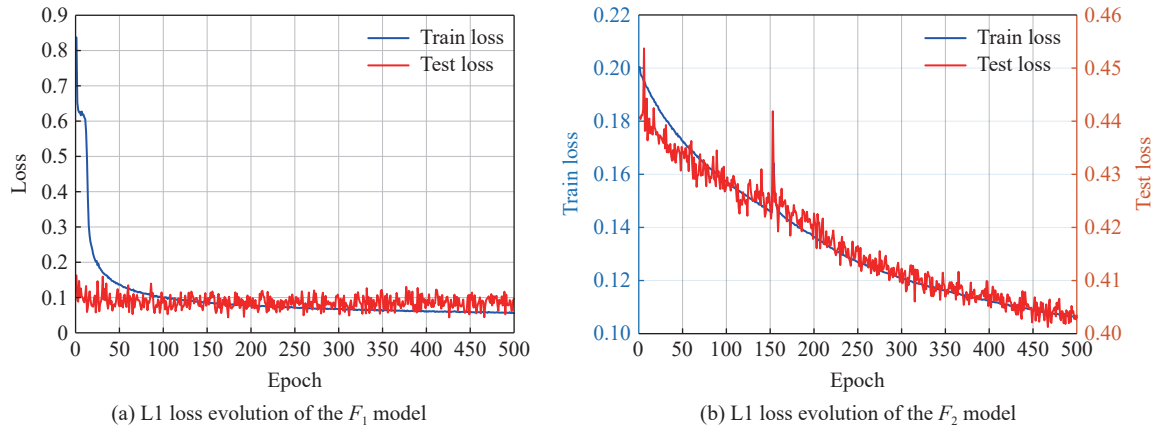


图 3 两个模型的训练和测试误差随迭代轮数的收敛曲线

Fig. 3 Convergence curves of training and testing errors of the two models with respect to iteration number

在结果展示阶段, 重点分析了测试集中的样本数据, 并对模型的预测性能进行了详细展示。将测试集样本中的临界能量释放率分布(二维数组)输入到训练好的串联 FNO 框架中, 通过该框架可以逐时间步地输出相场的分布数据, 进而完整地展现相场从初始时刻到目标时刻的演化过程。这样的逐步预测

方式不仅可以帮理解裂纹的扩展行为, 还可以深入探究裂纹扩展过程中的细微变化。

在本节中, 断裂仿真模型的唯一变量是随机分布的临界能量释放率, 其他仿真模型参数则设定为常数。通过这种设置, 能够测试模型在不同能量释放率条件下对相场演化的预测能力。测试集中的样本具有广泛的代表性, 其涵盖了多种能量释放率分布及相应的裂纹扩展情况, 保证了对模型性能的全面评估。

为了验证模型的预测精度, 选择了测试集中的部分样本, 并将这些样本在第  $n$  时刻的相场预测结果与传统 FEM 方法下得到的相场分布进行了详细对比。对比结果如图 4 所示。图中展示了预测相场分布与真实标签(通过有限元方法计算获得)的直接比较。从定性角度来看, 模型的预测结果与标签值高度一致, 特别是在裂纹扩展的关键区域, 两者的变化趋势和扩展路径几乎重叠。这种高度一致性表明, 串联 FNO 框架在处理复杂裂纹扩展问题时具有较高的有效性和准确性。

通过比较, 进一步验证了基于数据驱动的串联 FNO 模型在模拟相场演化问题上的优越性。与传统的有限元方法相比, 在相同计算条件下, 采用传统有限元软件 Abaqus 对单个样本进行数值模拟, 平均计算时间约为 2 h, 而本文方法在完成约 3 h 的模型训练后, 可实现对新样本的快速预测, 单次预测时间可忽略不计。在预测精度方面, 本文方法的相对误差控制在 5% 以内, 能够满足工程应用需求。综合来看, 相较于传统有限元方法在计算时间和计算成本上的高开销, 本文方法在保证较高预测精度的同时, 大幅提升了计算效率。

### 2.3 基于随机分布的临界能量释放率和变几何预测裂纹演化

在本节中, 基于上一节的算例进一步增强了样本的随机性, 以更好地模拟复杂材料的实际行为。在原有相场有限元模型的基础上, 除了随机分布的临界能量释放率之外, 还引入了几何特征的随机性, 具体体现在柱壳模型的内外半径上。通过增加这一随机性, 能够更全面地测试模型在应对复杂且不规则几何条件下的泛化能力。

柱壳模型的几何随机性体现在其内半径的取值范围分别为原始内背景的 1.6~2.0 倍之间, 外半径取值范围在原始值的 2.25~2.5 倍之间。这种设置不仅增加了样本的多样性, 还进一步影响了裂纹扩展过程中几何结构与相场演化的相互关系。不同的几何形状可能会导致应力集中区域的变化, 从而影响裂纹的扩展路径和速度。

为了在预测模型中有效捕捉这种几何随机性, 将每个单元的中心坐标作为一个额外的输入通道。这一操作的核心在于, 将几何信息(即每个单元的坐标)作为一组特征, 与临界能量释放率的非均匀分布相结合, 形成一个包含几何和物理属性的融合输入数据。这使得模型不仅能够学习材料属性对裂纹扩展的影响, 还能够理解几何形状对裂纹路径的影响。在裂纹的实际扩展过程中, 柱壳模型的几何结构和非均匀材料属性是相互作用的, 通过将这些特征融合到预测模型中, 模拟材料和几何结构的协同效应。

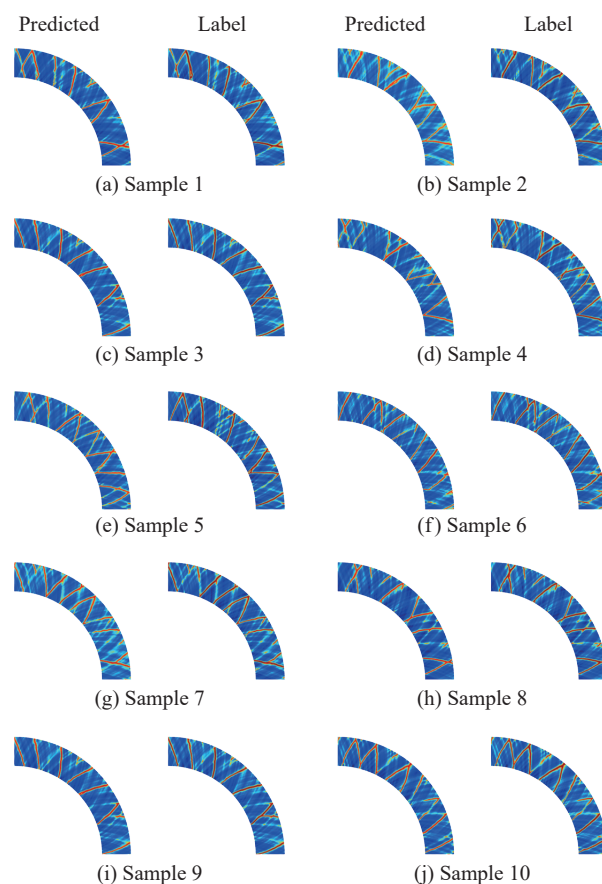


图 4 随机分布能量释放率条件下的相场预测结果与真实结果的对比

Fig. 4 Comparison of phase field prediction results and actual results under the condition of randomly distributed energy release rate

同样从 Abaqus 的结果文件中提取数据, 并将样本划分为训练集和测试集。使用训练集中的样本对模型进行训练, 此处仍然采用串联的 FNO 架构。训练完成后, 将测试集中的模型几何数据与非均匀的临界能量释放率参数相结合, 并输入到训练好的串联 FNO 框架中, 输出则是完整的相场演化过程。为验证模型的有效性, 对部分测试集样本的输出结果与目标值进行了比较, 如图 5 所示。定性来看, 最后状态的相场预测值与标签高度吻合, 进一步表明该预测框架在处理随机分布的临界能量释放率和变几何条件下的裂纹演化预测问题上具有较好的性能。

#### 2.4 变载荷条件下相场预测

在本节中, 继续深入探讨变载荷对裂纹扩展的影响。为了更好地模拟复杂载荷下的裂纹演化行为, 在柱壳模型中施加了随机变化的外部载荷, 载荷取值在原始载荷的 1.2~1.5 倍之间。通过这种随机载荷的设置, 可以研究在不同的的载荷条件下, 裂纹的扩展路径如何随载荷的变化情况。

为了有效捕捉动态载荷对裂纹扩展的影响, 模型将载荷值直接纳入输入通道, 并与临界能量释放率相结合。通过载荷信息的引入, 模型能够更细致地捕捉外力波动下的相场分布变化, 进而提高裂纹扩展预测的精度和稳健性。

与之前的仿真相同, 使用 Abaqus 的显式相场有限元子程序 (VUEL) 进行求解, 并记录在 200 个增量步内裂纹在随机载荷条件下的演化过程。每个增量步后, 从 Abaqus 的结果文件中提取相场数据, 将其存储为 4 维数组。该数组的第 1 个维度对应样本编号, 第 2 和第 3 维度对应柱壳模型内的二维网格, 第 4 个维度表示时间步。这一数据格式使得可以充分利用时间序列信息, 捕捉裂纹在不同随机载荷条件下的扩展行为。

同样地, 将数据集划分为训练集和测试集。通过训练集样本对模型进行训练, 依然采用串联的 FNO 架构。训练完成后, 将测试集的几何数据与随机变化的载荷条件相结合, 输入到训练好的 FNO 架构中, 逐步输出裂纹的演化过程。为了验证模型的准确性, 对测试集中的部分样本进行了预测结果与实际值的对比分析, 如图 6 所示。结果显示, 模型在预测裂纹最终状态时与真实标签高度吻合, 充分表明该框架在应对随机载荷和随机临界能量释放率分布条件下的裂纹扩展预测中具有良好的性能。

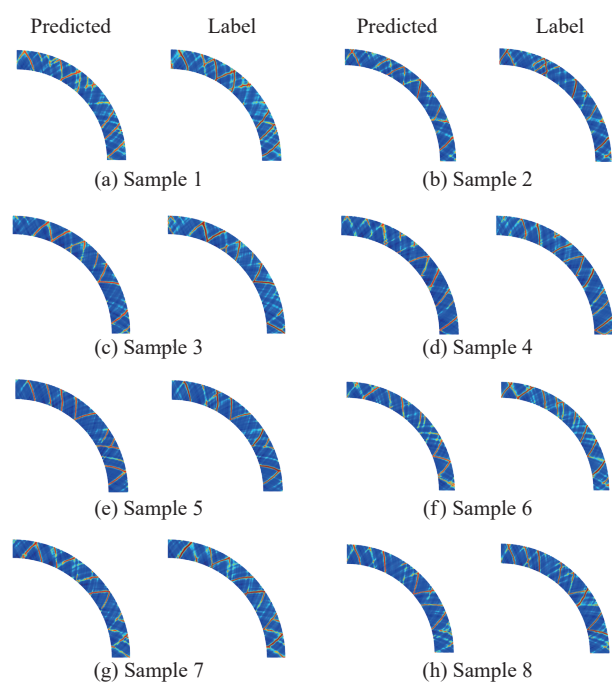


图 5 随机分布临界能量释放率与变几何条件下的相场预测结果与真实结果的对比

Fig. 5 Comparison of phase field prediction results and actual results under conditions of randomly distributed critical energy release rate and variable geometry

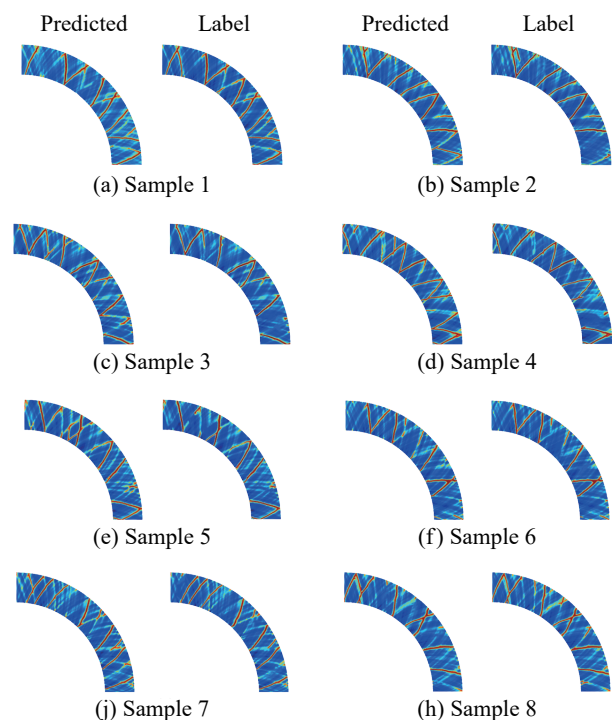


图 6 随机分布临界能量释放率与变载荷条件下的相场预测结果与真实结果的对比

Fig. 6 Comparison of phase field prediction results and actual results under conditions of randomly distributed critical energy release rate and variable load

### 3 结 论

针对柱壳结构在复杂工况下的裂纹萌生与扩展问题, 提出了一种基于相场法与傅里叶神经算子 (FNO) 的高效预测框架。通过构建有限元相场模型生成裂纹演化数据, 并设计串联 FNO 模型分别用于裂纹萌生与扩展的预测, 实现了对柱壳结构裂纹全过程的快速、准确建模。

所提出的基于相场法与傅里叶神经算子的耦合框架在不同临界能量释放率分布、随机几何条件及变载荷工况下均能保持较高的预测精度, 且在计算效率上远优于传统有限元方法。该方法能够有效捕捉裂纹演化过程中的复杂时空特征, 为柱壳结构断裂行为的预测与评估提供了新的思路和工具。

相比于传统数值模拟方法, 本文提出的框架不仅显著降低了计算成本, 而且展现出良好的泛化能力, 能够适应随机性和不确定性较强的复杂工况。这一优势使得该方法在工程实践中的快速断裂评估和结构优化设计方面具有潜在的应用价值。

未来工作将重点围绕 2 个方向展开: (1) 进一步融合断裂力学理论与数据驱动方法, 提升模型在复杂多场耦合条件下的物理一致性与预测精度; (2) 扩展该方法在实际工程案例中的应用验证, 推动其在大型结构安全评估、失效预警与智能设计中的应用。

### 参考文献:

- [1] RITCHIE R O. The conflicts between strength and toughness [J]. *Nature Materials*, 2011, 10(11): 817–822. DOI: 10.1038/nmat3115.
- [2] WANG Y A, OYEN D, GUO W H, et al. StressNet: deep learning to predict stress with fracture propagation in brittle materials [J]. *NPJ Materials Degradation*, 2021, 5(6): 1–10. DOI: 10.1038/s41529-021-00151-y.
- [3] XU H, FAN W, RUAN L C, et al. Crack-Net: a deep learning approach to predict crack propagation and stress-strain curves in particulate composites [J]. *Engineering*, 2025, 49: 149–163. DOI: 10.1016/j.eng.2025.02.022.
- [4] KUMAR MALLICK R, GHOSH M, BAHRAMI A, et al. Stress relaxation cracking failure in heat exchanger connection pipes in a petrochemical plant [J]. *Engineering Failure Analysis*, 2023, 147: 107156. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2023.107156.
- [5] HE S T, ZHAO Y. Sanders' mid-long cylindrical shell theory and its application to ocean engineering structures [J]. *Journal of Marine Science and Application*, 2012, 11(1): 98–105. DOI: 10.1007/s11804-012-1110-9.
- [6] GANENDRA B, PRABOWO A R, MUTTAQIE T, et al. Thin-walled cylindrical shells in engineering designs and critical infrastructures: a systematic review based on the loading response [J]. *Curved and Layered Structures*, 2023, 10(1): 20220202. DOI: 10.1515/cls-2022-0202.
- [7] PINEAU A, BENZERGA A A, PARDOEN T. Failure of metals I: Brittle and ductile fracture [J]. *Acta Materialia*, 2016, 107: 424–483. DOI: 10.1016/j.actamat.2015.12.034.
- [8] CROOM B P, BERKSON M, MUELLER R K, et al. Deep learning prediction of stress fields in additively manufactured metals with intricate defect networks [J]. *Mechanics of Materials*, 2022, 165: 104191. DOI: 10.1016/j.mechmat.2021.104191.
- [9] MAURIZI M, GAO C, BERTO F. Predicting stress, strain and deformation fields in materials and structures with graph neural networks [J]. *Scientific Reports*, 2022, 12(1): 21834. DOI: 10.1038/s41598-022-26424-3.
- [10] HUGHES T J R. The finite element method: Linear static and dynamic finite element analysis [M]. Mineola: Dover Publications, 2000.
- [11] PEHERSTORFER B, WILLCOX K, GUNZBURGER M. Survey of multifidelity methods in uncertainty propagation, inference, and optimization [J]. *SIAM Review*, 2018, 60(3): 550–591. DOI: 10.1137/16M1082469.
- [12] VAN DER VELDEN A. High-fidelity simulation surrogate models for systems engineering [M]//MADNI A M, BOEHM B, GHANEM R G, et al. *Disciplinary Convergence in Systems Engineering Research*. Cham: Springer, 2018: 327–339. DOI: 10.1007/978-3-319-62217-0\_23.
- [13] ZHUANG X, ZHOU S, HUYNH G D, et al. Phase field modeling and computer implementation: a review [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2022, 262: 108234. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2022.108234.
- [14] FEI F, CHOO J. Double-phase-field formulation for mixed-mode fracture in rocks [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2021, 376: 113655. DOI: 10.1016/j.cma.2020.113655.

- [15] HANSEN-DÖRR A C, DE BORST R, HENNIG P, et al. Phase-field modelling of interface failure in brittle materials [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, 346: 25–42. DOI: 10.1016/j.cma.2018.11.020.
- [16] WAMBACQ J, ULLOA J, LOMBAERT G, et al. Interior-point methods for the phase-field approach to brittle and ductile fracture [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2021, 375: 113612. DOI: 10.1016/j.cma.2020.113612.
- [17] GAO J, BAI Y L, HE X D, et al. A phase field and machining-learning approach for rapid and accurate prediction of composites failure [J]. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2025, 44(13/14): 743–755. DOI: 10.1177/07316844241228182.
- [18] AMBATI M, GERASIMOV T, DE LORENZIS L. A review on phase-field models of brittle fracture and a new fast hybrid formulation [J]. *Computational Mechanics*, 2015, 55(2): 383–405. DOI: 10.1007/s00466-014-1109-y.
- [19] ZHANG X, VIGNOLLET J, MOËS N. A phase-field model for mixed-mode fracture [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, 328: 471–493.
- [20] NGUYEN T T, YVONNET J, ZHU Q Z, et al. A phase-field method for computational modeling of interfacial damage interacting with crack propagation in realistic microstructures obtained by microtomography [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2016, 312: 567–595. DOI: 10.1016/j.cma.2015.10.007.
- [21] FARRELL P E, MAURINI C, BOURDIN B. Splitting schemes for phase-field fracture problems [J]. *Journal of Computational Physics*, 2019, 375: 145–173.
- [22] LI Z Y, KOVACHKI N B, AZIZZADENESHELI K, et al. Fourier neural operator for parametric partial differential equations [C]//Proceedings of the 9th International Conference on Learning Representations. OpenReview. net, 2021.
- [23] KOVACHKI N, LI Z Y, LIU B, et al. Neural operator: Learning maps between function spaces with applications to PDEs [J]. *The Journal of Machine Learning Research*, 2023, 24(1): 89.
- [24] JIANG P S, YANG Z, WANG J L, et al. Efficient super-resolution of near-surface climate modeling using the Fourier neural operator [J]. *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*, 2023, 15(7): e2023MS003800. DOI: 10.1029/2023MS003800.
- [25] LI Z J, PENG W H, YUAN Z L, et al. Long-term predictions of turbulence by implicit U-Net enhanced Fourier neural operator [J]. *Physics of Fluids*, 2023, 35(7): 075145. DOI: 10.1063/5.0158830.
- [26] YOU H Q, ZHANG Q, ROSS C J, et al. Learning deep implicit Fourier neural operators (IFNOs) with applications to heterogeneous material modeling [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2022, 398: 115296. DOI: 10.1016/j.cma.2022.115296.
- [27] ZHANG H, PEI X Y, PENG H, et al. Phase-field modeling of spontaneous shear bands in collapsing thick-walled cylinders [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2021, 249: 107706. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2021.107706.

(责任编辑 张凌云)