

# 平面强爆炸波的正反射 (高精度度的分析解)

黄 敦

文中给出了不定常平面强爆炸波对固壁正反射问题的一组解析解, 具有高的精确度。用文中解析解的数值结果和七种数值计算方法的结果进行了比较, 以考验这些方法的特点和缺陷。对某些方法提出了改进的意见。

## 引 言

强爆炸波早已有分析解<sup>[1]</sup>。这种波打在固壁上, 固壁上受到的力随时间很快地变化。本文是从准确的非线性的描写气体运动的欧拉方程组出发讨论固壁的受力。压力  $p$ 、密度  $\rho$ 、质点速度  $u$  满足的偏微分方程组是

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

其中常数  $\gamma$  是气体定压比热与定容比热之比。这个方程组可以有各种各样的解, 解中包含任意函数及常数, 不把它们定下来, 解的物理含意就不明确。要配上固壁条件 ( $u(x_0, t) = 0$ ), 和在未知位置的反射激波 (以下用  $x = R_0(t)$  表示) 上的三个激波关系式, 从而能描写强爆炸波的反射, 但这是比较复杂的。本文的分析解最近用于分析研究七种能计算气体不定常运动的数值解法

数 值 解 法	作 者
Годунов 方法 <sup>[2]</sup>	黄 敦、黄录平、柳玉芝 <sup>[1][3]</sup>
随机选取法 <sup>[3]</sup>	黄 敦、黄录平、柳玉芝、雷功炎 <sup>[1][3][12]</sup>
FLIC 法 <sup>[4]</sup>	李荫凡 <sup>[1][3]</sup>
Русанов 方法 <sup>[5]</sup>	李文绚、黄 敦
分离奇性法 <sup>[6]</sup>	吴雄华
Lax-Wendroff <sup>[7]</sup>	曹亦明、李荫凡
Lax-Wendroff 加反扩散 <sup>[8][9]</sup>	同 上

数值解法适用于难于求解的非线性问题，每一种方法都有其独特的优点，但仍待试算以验证。因为一方面大多数方法的理论基础是建立于局部线性化的数值分析方法之上的；另一方面大多数方法都包含有误差。尤其是引入人工粘性或格式粘性的各种方法，在激波附近精度究竟有多少，是不能定量地说得很明白。常用的检验气体力学数值解法的一个典型的不定常问题是黎曼问题<sup>[14][15][9]</sup>。本文讨论的是另一个典型问题。其特点是激波以变速传播并且还有固壁条件，这是与黎曼问题有区别的一点。上面列举的除用到激波条件的分离奇性法以外，在激波附近都有些误差。人们甚关心这些误差，因为数值解中的激波都比真实的激波宽万倍以上。用数值方法解本文提出的问题，把数值解和本文的分析解比较，就能了解方法的特点及其弱点。试算后知道 FLIC 方法在固壁附近误差显著，文章<sup>[11]</sup>针对这点作了数值分析，在固壁附近加上了人工粘性，Русанов 及 Lax - Wendroff 以及加上反扩散后，固壁附近数值解也不够好，Русанов 方法则应扣除人工粘性，分离奇性法数据很准。

本文的其它用途可参阅<sup>[10]</sup>，以上各方法的试验亦将分别报导。

### 问题的数学提法

坐标系的选取见图1。方程组见前。设在负的时刻，即当  $t = -t_1 (t_1 > 0)$ ，在  $x = R_0$  的平面发生强爆炸<sup>[11]</sup>，单位面积上释放出来造成激波及其伴随气流的能量为  $E_0$ ，这样就有一个强爆炸波 AO 向  $x = 0$  处的刚性固壁传播。在  $t = 0$  时入射波遇刚壁而反射，反射波在图中为 OB。这样  $x = 0$ ， $x = R_0$  及 AO，OB 将  $x - t$  平面划分出三个区域如图 1 所示：I 区有自模拟解，这早已解决，书<sup>[11]</sup>给出了解析表达式，<sup>[14]</sup>更给出了加快计算的辅助公式；II 区为反射波后的不定常气流，既不匀熵，又无自模拟性；以及 III 区（强爆炸即指  $p = 0$ ，内能  $e = 0$ ， $\rho_1 \neq 0$ ， $u = 0$ ）为压力小于爆炸波后压力的静止区。

正的  $t$  轴上有固壁条件  $u = 0$ ，沿 OB 有三个激波条件使 I 区中物理量与 II 区中物理量沿 OB 建立关系。

本问题求分析解的难点，在于方程的非线性，在于确定未知的变速激波  $x = R_3(t)$ 。并使激波条件尽可能地满足得好，使分析解尽可能地描写 I 中较大的区域，例如图 1 虚线  $D_1$  或  $D_2$  以下的区域。

### I 区中的解

从问题的提法看，已出现三个互相独立的有量纲的常数，例如  $t_1$ ， $R_0$  及  $\rho_1$ 。用它们把自变量  $x$ 、 $t$ ，未知函数：速度、密度、压力无量纲化：

$$X = \frac{x}{R_0}, \quad T = \frac{t}{at_1}, \quad U = \frac{uat_1}{R_0}, \quad M = \frac{\rho}{\rho_1}, \quad P = \frac{p(at_1)^2}{b\rho_1 R_0^2}$$

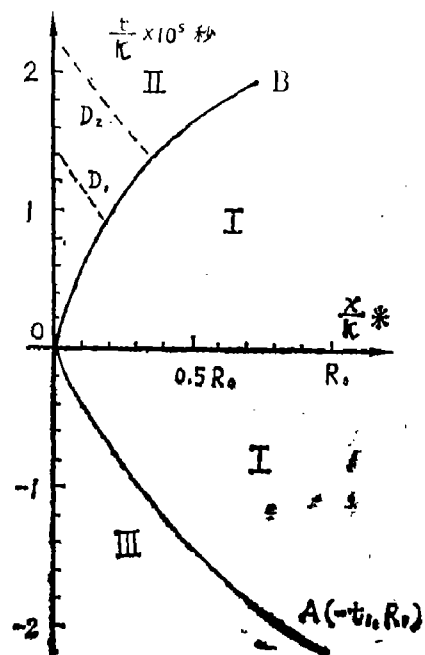


图 1  $x, t$  图

其中无量纲常数  $a, b$  以后将进一步选定。

我们令

$$U(X, T) = XF(T), \quad (1)$$

并引入新的仅与时间有关的自变量  $\tau(T)$

$$\tau = \exp \left\{ \int_0^T F(T) dT \right\}, \quad (2)$$

则  $M(X, T)$  所满足的方程简化为

$$\frac{\partial M}{\partial \ln \tau} + \frac{\partial M}{\partial \ln X} + M = 0.$$

解之得

$$M = \frac{1}{X} \Phi \left( \frac{X}{\tau} \right) = \frac{1}{\tau} N \left( \frac{X}{\tau} \right) \quad (3)$$

这里  $\Phi$  及  $N$  间有一个简单的关系。 $\Phi$  是任意函数。

能量方程改写后就成了

$$\frac{\partial P}{\partial \ln \tau} + \frac{\partial P}{\partial \ln X} + \gamma P = 0.$$

解之得

$$P(X, T) = \frac{1}{\tau^\gamma} \Psi \left( \frac{X}{\tau} \right), \quad (4)$$

$\Psi$  是另一个待定的任意函数。

至此尚未用到运动方程, 它能给出  $N$  与  $\Psi$  之间的关系, 并对  $F$  加以限制。

再引入  $\tau$  的一个函数  $L(\tau)$  以简化式子

$$-XL(\tau) = \frac{\partial U}{\partial T} + U \frac{\partial U}{\partial X} = X \left[ \frac{dF}{dT} + F^2 \right], \quad (5)$$

则运动方程可简化成

$$\frac{\partial P}{\partial X} = XML(\tau).$$

根据 (3)、(4) 可得  $\Psi$  与  $\Phi$  (相当于  $N$ ) 之间的关系:

$$\tau^{\gamma+1} L(\tau) = \left[ \Psi \left( \frac{X}{\tau} \right) - \Psi(0) \right] \int_0^{\frac{X}{\tau}} \Phi(\xi) d\xi. \quad (6)$$

(6) 式左端只是  $\tau$  的函数, 而右端则是  $X/\tau$  的函数。现  $\tau$  与  $X$  都是自变量, 因此两端都只能是常数  $J = L(1)$ , 即  $T=0$  时  $L$  的值 (此时  $\tau=1$ )。

对  $T$  求导消去常数  $J$ , 即得  $F$  应满足的方程

$$\frac{d^2 F}{dT^2} + (\gamma+3) F \frac{dF}{dT} + (\gamma+1) F^3 = 0. \quad (7)$$

总结上述情况：在(1)的唯一前提下，我们得到一组非线性的欧拉方程组的准确分析解，解中包含任意函数 $N$ ，待定常数： $F(0)$ 、 $\left. \frac{dF}{dT} \right|_{T=0}$ 、 $a$ 、 $b$ 、 $\Psi(0)$ 。但我们还未给出 $R_3(t)$ ，它代表曲线 $OB$ 。

为定下这组解的任意函数及常数，并使得解有明确的物理含义，又能反应强平面爆炸波的正反射，其关键在于使Ⅰ区的解与Ⅱ区的解沿 $OB$ 能够用三个激波关系式衔接得好。这就是难点之所在。我们将尽可能准确地把这一个要求得到满足。

为了使入射波在 $t=0$ 时到达图1中原点，并且在开始反射时，固壁上的压力正好是我们所选定的800大气压，即 $810.3424 \times 10^5$ 牛顿/米<sup>2</sup>，按<sup>[1]</sup>的式子可选：

$$\gamma = 1.4, \rho_1 = 1.29 \text{ 千克/米}^3, R_0 = 0.1 \times \kappa \text{ 米},$$

$$t_1/\kappa = 2.1718193 \times 10^{-5} \text{ 秒}, E_0 = 1.077E.$$

$$E/\kappa = 2.7349056 \times 10^6 \text{ 焦耳/米}^2.$$

以上有三处用到常数 $\kappa$ ，它是一个任意无量纲数， $R_0$ ， $E$ ， $t_1$ 都与它成正比。 $\kappa=1$ 相当于每平方米在爆炸初始时刻用0.7公斤的TNT炸药。

用激波关系可算出原点的状况。这是一个多值点：从第Ⅱ区看 $p=0$ ，从第Ⅰ区看是800大气压，从Ⅲ区看是100大气压。对应地在原点密度的三个值是 $21\rho_1$ ， $6\rho_1$ 及 $\rho_1$ 。质点速度的三个值是0， $-2558.0193$ 米/秒及0。在原点反射波波速是 $1023.2077$ 米/秒，反射波初始速度（即代表 $OB$ 在原点与 $t$ 轴的夹角）在原点比入射波的波速大三倍，是 $3069.6231$ 米/秒。

关于 $F(T)$ ，容易看出 $1/(1+T)$ 准确满足非线性常微分方程(7)以后，第一步先在 $0 \leq t/t_1 \ll 1$ 的范围内采用激波关系式。把Ⅰ、Ⅱ区的解及 $R_3(t)$ 对 $t/t_1$ 展开，用激波关系式使Ⅰ、Ⅱ区的解衔接，比较展开式的系数就可定出 $a=0.23$ ， $b=27.09$ ，且

$$N(\xi) = 1 - \frac{3}{a}\xi + b_1 \left(\frac{\xi}{a}\right)^2 + b_2 \left(\frac{\xi}{a}\right)^3 \quad (8)$$

目前 $b_1$ 、 $b_2$ 尚未确定，后面再讨论。 $\xi$ 即 $X/\tau$ 。

利用(6)式可得

$$\Psi\left(\frac{X}{\tau}\right) = \Psi_0 + L(1) \int_0^{\frac{X}{\tau}} \phi(\xi) \alpha \xi \quad (9)$$

或

$$\Psi = \Psi_0 + L(1) \left[ \frac{1}{2} \left(\frac{X}{\tau}\right)^2 - \frac{1}{a} \left(\frac{X}{\tau}\right)^3 + \frac{b_1}{4a^2} \left(\frac{X}{\tau}\right)^4 + \frac{b_2}{5a^3} \left(\frac{X}{\tau}\right)^5 + \dots \right]$$

其中 $\Psi(0)$ 对应于 $p(0,0)$ 为800大气压，以后可以看到它比后面的第二项大出很多。

以上的解既准确满足固壁条件，又满足非线性的欧拉方程组，且沿 $OB$ 的初始一小段能渐近地满足激波条件。但缺点是只适用于较小的 $t/t_1$ 。

我们希望分析解能扩大到 $t/t_1$ 接近0.5，为此设( $T < 2$ 时)

$$F = \frac{1}{1+T} + g(T) \quad (10)$$

并设  $g$  及  $g \frac{dg}{dT}$  为小量, 它们都是无量纲的。后面可看到最后定出的  $g$  确实为正, 且小于 0.052, 而  $g \frac{dg}{dT}$  的绝对值也是同量级的小量, 且当  $T > 0.82$ ,  $\frac{dg}{dT} < 0$

将(10)代入(7)即得  $g(T)$  应满足的方程

$$\frac{d^2 g}{dT^2} + \frac{3+\gamma}{1+T} \frac{dg}{dT} + \frac{2\gamma g}{(1+T)^2} + \left\{ (3+\gamma)g \frac{dg}{dT} + 3(\gamma+1) \frac{g^2}{1+T} + (\gamma+1)g^3 \right\} = 0 \quad (11)$$

在  $T$  小的阶段已用过激波关系式, (10)的第一部分已使激波条件满足到  $O(\frac{t}{t_1})$ , 可见  $g(0) = 0$ , 不难推出

$$\left. \frac{dg}{dT} \right|_{T=0} = -L(1) = -J,$$

但  $J$  目前与  $b_1, b_2$  一样尚未确定下来。  $R_3(t)$  亦只有  $t$  很小一段的值。

为了定  $g$ , 可作数值积分。但我们仍希望有分析解。为此引入一些近似作法, 就是将(11)线性化, 换言之扔去(11)式中花括号中诸项, 所得线性方程很易准确满足, 解之得(11)的近似分析解〔用了  $g(0) = 0$  的条件〕

$$g(T) = \frac{a_1}{(1+T)^2} - \frac{a_1}{(1+T)^2} \quad (12)$$

为了定  $R_3(t)$ ,  $a_1, b_1, b_2$  及  $J$ , 不宜再将  $R_3(t)$  对  $t$  作幂级数展开, 理由是 I 区的解作展开极繁, 且  $R_3(t)$  的曲线虽光滑但也不能用  $t$  的幂级数的少数几项来逼近。我们采用的步骤是一小段时间、一小段时间地推进从而将  $R_3$  的曲线  $OB$  延拓, 这样做有多种可能的作法。例如可以将  $R_3$  右侧的密度放在一边 (称作  $\rho_-$ ), 试选  $a_1$  及  $J$ , 再由激波关系确定常数  $b_1, b_2$  及不同时刻的激波速度。同时求出激波前的密度与  $\rho_-$  相比, 如相差甚微, 则说明  $a_1, J$  选择较好。试了几个值, 在  $t/t_1 < 0.472$  前使两个  $\rho$  值相差很少, 相对差别仅在  $-0.65\%$  到  $1.11\%$  之间, 一般都还更小一些, 有的点仅为  $-0.01\%$  以致更小。这说明这种做法虽引入了误差, 但精度还是相当高的, 这样的做法是成功的。归根到底可以说在(1)式的前提下能使 I 区的解沿  $OB$  由激波条件与 I 区的解衔接得较好, 并且我们用分析解的形式解出了中间出现的几个微分方程。这几个微分方程的顺利求解, 保证了满足质量、动量、能量守恒的物理规律。

综上所述, I 区的分析解可以写成以下的简单形式。

$$\text{记} \quad \tau_1 = 1 + \frac{t}{0.23t_1} \equiv 1+T, \quad y = (0.4 - \tau_1^{0.6})/\tau_1 \quad (13)$$

$$S = 0.6 + y$$

这些都只是时间的函数再引入

$$W(x, t) = \frac{x t_1}{R_0(t + 0.23t_1)} = \frac{X}{0.23(I + T)} \quad (14)$$

则回到有量纲量 当  $t/\kappa < 1 \times 10^{-6}$  秒时有  $\tau_1 < 3.002$

$$p = \left[ 0.8103424 \times 10^8 (1 - 1.3S) + 6.0372 \left( W - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{x}{\tau_1 \times 0.23t_1} \right)^2 \right] / \tau_1^{1.4}$$

$$\rho = \frac{27.09}{\tau_1} \left[ 1 - 3w - (1 - 6w) \frac{1.3}{1.4} S + 1.49w^2 \right] \quad (15)$$

$$u = W \frac{R_0}{t_1} \left[ 1 - 0.4 \frac{1.3}{1.4} \left( y + \frac{0.6}{\tau_1} \right) \right]$$

(13)式中压力、密度、长度、时间的单位分别为以前用过的牛顿/米<sup>2</sup>、千克/米<sup>2</sup>、米、秒，而  $\frac{t_1}{\kappa} = 2.1718193 \times 10^{-6}$  秒、 $R_0/\kappa = 0.1$  米。

上式中  $S(0) = 0$  然后  $S(t)$  随  $t$  单调上升，很近乎直线，当  $\frac{t}{\kappa} \times 10^{-6}$  为 1.0 时，小于 0.09。大体上  $S < 0.045T$ 。

在固壁上  $x = 0$ ， $w = 0$  (15)式退化成

$$u = 0, \quad p(0, t) = \frac{800 \text{大气压}}{\tau_1^{1.4}} (1 - 1.3S), \quad \rho(0, t) = \frac{21\rho_0}{\tau_1} \left( 1 - \frac{1.3}{1.4} S \right)$$

可见在固壁上有  $\frac{p(0, t)}{[\rho(0, t)]^\gamma} = \frac{(1 - 1.3S)}{\left( 1 - \frac{1.3}{1.4} S \right)^\gamma}$ ，当  $S$  小时将分母用二项式展开，可见固壁上  $\frac{p}{\rho^\gamma}$

基本不变，也就保证了熵基本上不变。

(15)式在图 1 的第 I 区中精确度较高， $x$  愈小愈准、在  $\frac{t}{\kappa} > 1 \times 10^{-6}$  秒时仍有一定的准确性。 $p$  的公式最准，因为方括号中随  $x$  而变的项较只随时间而变的项小得很多。(15)式与欧拉方程的精确解所差只是小量。这正是结果较准确的根本原因。〔16〕中即阐述了这个解。此后用数值解法做本文同一问题，几种差分法用的空间步长非常小的时候，如将  $R_0$  分成约二千个网格，所得结果与(13)式结果是极相近的。这样小的步长做实际问题时是嫌小了，太费时间。但这正说明(15)式相当准，算起来也省事，有个袖珍计算器任给一对  $x$  与  $t$  的值很快就能得到答案。

尚应列出  $R_3(t)$  的表，详见下节。

## I 区解的进一步改进

最近，(15)式已被用于检验几个算不定常激波的计算方法。我们还希望扩大分析解适

用的范围,例如从图1中的虚线  $D_1$ , 扩大到  $D_2$ 。为此我们进一步分析了(11)式以后所采取的简化计算,对I区的解作了如下的改进,  $p$ 、 $\rho$ 、 $u$  都提高了精度,有效数字多了一位。

改进的关键在于求解(11)式,以及改动(15)式三个式子中都出现的常数1.3。在推导(15)式的过程中只利用了(11)式线性化以后的解。常数1.3的选择也是照顾了不同的时刻,选用了同一个常数。其实它应该是略有变化的  $b_4(t)$ 。

将(12)式代入  $\int_0^T g dT$  即得  $S \frac{b_4}{\gamma}$ , 此时  $b_4$  为常数。将它与(11)的很准确的数值解相比,可定出:当  $T < 2.7$  时

$$b_4(T) = 1.534 - 0.07723T, \quad T = \frac{t}{0.23t_1}, \quad (16)$$

把  $S(T)b_4(T)/\gamma$  对  $T$  求导,即可得出新的与(12)式略有不同的  $g(T)$ 。这样得到的  $g(T)$  与数值解〔很准确地满足(11)式〕相比,差别也较按(12)式求出的函数更小。再按上节所述过程求得(8)、(9)式中的  $b_1$  与  $b_2$ , 就得到了改进后的  $u$ 、 $\rho$ 、 $p$  及  $R_3(t)$ 。

结果综述如下:

仍然采用(13)、(14)、(16)规定的符号,并记

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{X}{\tau} = \frac{x}{R_0 \tau_1} e^{-\frac{b_4}{\gamma} S} = 0.23W e^{-\frac{b_4}{\gamma} S} \\ v &= \frac{\xi}{0.23} = W e^{-\frac{b_4}{\gamma} S} \\ b &= 1.19 + 2.1v, \quad b' = b - 0.42v. \end{aligned} \quad (17)$$

则在I区虚线  $D_1$ , 以下得更准的式子

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\tau_1^2} \left[ 0.810342 \times 10^9 \exp(-b_4 S) - 6.7725 \left( \frac{1}{2} - v + \frac{b'}{4} v^2 \right) \left( \frac{x}{0.23t_1 \tau_1} \right)^2 \exp(-3b_4 s) \right] \\ \rho &= \frac{27.09}{\tau_1} \left[ 1 - 3v + bu^2 \right] \exp\left(-\frac{b_4}{\gamma} S\right) \\ u &= W \frac{R_0}{t_1} \left[ 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} b_4(T) \left( y + \frac{0.6}{\tau_1} \right) - 0.07723s\tau_1 \right] \end{aligned} \quad (18)$$

与(15)相比差别在于:  $b_4(T)$  代替了常数1.3;  $\rho$  式子中  $\exp\left(-\frac{b_4}{\gamma} s\right)$  代替了  $1 - \frac{1.3}{1.4} s$ ,  $bv^2 \exp\left(-\frac{b_4}{\gamma} s\right)$  代替了  $1.49W^2$ ;  $p$  的式子虽有改动,但对最终数值影响不显著。因为当  $\frac{t}{\kappa} \times 10^5 < 0.9$  时,  $p$  的公式中首项较第二项大很多。(18)式还有个优点即  $x=0$  处  $p/\rho^{\gamma}$  已保持不变而不是基本不变了。

在定有关常数过程中所得的 $R_3(t)$ ，也更令人满意，激波关系式比上节也满足得更好。但是若时间再增加，在OB上超过 $\frac{t}{K} \times 10^5 = 1.0$ ，则误差又会大起来。估计这是本文的前提(1)式已不适用所致。要想进一步扩大分析解适用范围就应放弃(1)式。今后还将报导这方面的结果。

虚线 $D_1$ 的边界不十分确定，这要看对结果的精确度要求如何而定，要想有三位有效数字，则沿OB最好不超过 $\frac{t}{K} \times 10^5 = 0.9$ ，而沿t轴可高到 $\frac{t}{K} \times 10^5 = 1.4$ 。这与双曲型方程的影响区概念是一致的，这也是由于 $x$ 小，则 $\xi$ 也小。如果对结果的精度放松一些要求，则可以使用到图1中虚线 $D_2$ 以内。

最后列出 $R_3(t)$ 的表，这与[16]中的数值基本相同

$\frac{t}{K} \times 10^5$ 秒	$\frac{R_3}{K}$ 米
0.049676	0.0005385
0.10	0.00115
0.20	0.00250
0.30	0.00410
0.402	0.00600
0.452	0.00700

$\frac{t}{K} \times 10^5$ 秒	$\frac{R_3}{K}$ 米
0.50	0.00800
0.60	0.0123
0.70	0.0128
0.80	0.0155
0.90	0.0184
1.00	0.0216

$R_3(t)$ 的曲线虽很光滑，但不易用从原点开始的 $t/t_1$ 的幂级数的头几项来表达。这也正是我们没有采用对 $t/t_1$ 展开的方式来求 $R_3(t)$ 的主要原因。

## 结 束 语

气体力学中如果方程是非线性双曲型的，那么很大的困难在于处理激波。尤其是初始时刻如果没有激波，过一段时间还可能产生激波。卅年来发展了多种计算不定常激波的方法。一大类方法是引入人工粘性或格式粘性将激波抹光滑。人为地把它变成一个过渡区。这样做程序结构简单、不易出错，但激波附近总不是十分理想，近几年致力于改进计算方法的有文献目录中所引到的几位作者。正如С. К. Годунов在“多维气体力学问题的数值方法”(1976)一书的结论中所指出的，只靠自模拟解或定常激波来检验，还显不出某些缺点。并且“靠数值计算所得的结果有多大程度可信，是个非常重要的问题，可惜目前还不可能提出一套求误差的步骤以回答这个问题”。本文提供的分析解没有自模拟性、又具有特征长度，因此尤其能显出数值求解时所用空间步长对数值解误差的影响。引言中提到的几个试算及分析都是试图进一步了解各种方法的特点，试算确都达到了此目的。除分离奇性法以外，都看出了误差，并且针对这些弱点在相应的数值分析的基础上对方法作了改进。



## 参 考 文 献

1. Л. И. Седов, Методы Поцобия и Размерности в Механике 4<sup>тоо</sup> изд 1957. ПММ 1946.
2. С. К. Годунов, Численные Методы Решения Многомерных Задач Газовой Динамики, 1976.
3. A. J. Chorin J. Comp. phys. vol 22(1976), 517.  
J. Comp. phys. vol 23(1977), 253.
4. R. A. Gentry, R. E. Marten, B. J. Daly, J. Comp. phys vol 1 (1966), 87-118.
5. В. В. Русанов, Расчет. Взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями, Ж. Вычисл. Мат. Мат. Физ., том. 1 (1961), 267-279.
6. 朱幼兰、钟锡昌、陈炳木、张作民 初边值问题差分方法及绕流 科学出版社 1980.
7. R. Richtmyer, "A Survey of Difference Methods for Non-steady Fluid Dynamics," NCAR Tech Note 63-2, 1962.
8. J. P. Boris and D. L. Book, J. Comp. phys. vol 11 (1973), 38, vol 18 (1975), 248.
9. G. A. Sod, J. Comp phys. vol 27 (1978), 1-31.
10. 黄 敦、黄录平、柳玉芝, 用戈杜诺夫格式计算不定常激波兼论影响数值解质量的某些因素, 计算数学会论文 1979.
11. 黄 敦、黄录平、柳玉芝, 关于随机选取法及其对不定常激波的计算, 数值计算与计算机应用 第1卷1期 (1980) 35-44.
12. 黄 敦、柳玉芝、雷功炎 关于气体中平面爆炸波反射的两个问题、计算力学全国学术交流大会论文 1980年
13. 李荫凡, 关于 FLIC 方法稳定性的注记 计算数学 1980 第3期 278-281.
14. R. Courant and K. O. Friedrichs, "Supersonic Flow and Shock Waves", Interscience, New York 1948.
15. C. W. Hirt, J. Comp. Phys., Vol. 2, No. 4(1968), 339.
16. 黄 敦 气体力学方程组的一套高精度的分析解 计算数学会论文 1979.

---

## NORMAL REFLECTION OF A PLANAR STRONG EXPLOSION WAVE

Huang Dun

A set of analytical solution for the unsteady normal reflection of a planar strong explosion wave from a rigid wall is given with high accuracy. Seven numerical methods had been tested recently by comparing the numerical results with the analytical solution of this paper to observe the features or weakness of some methods. Improvements of some methods were made.