

# 电加热金属箔爆炸的有限元法计算

董玉斌 李献文 董维申

作者研究了平面非线性电阻元件——金属箔的加热过程，温度分布和爆炸现象，这种金属箔是和一组充电电容器组相串接的。作者用有限元方法计算了线路中的暂态电流和金属箔上的温度分布。每一个时间步长，用有限元方法解二维的拉普拉斯方程，求出箔上的电势分布。计算的爆炸时间，电流密度和作用量和实验结果基本符合。

## 一、引言

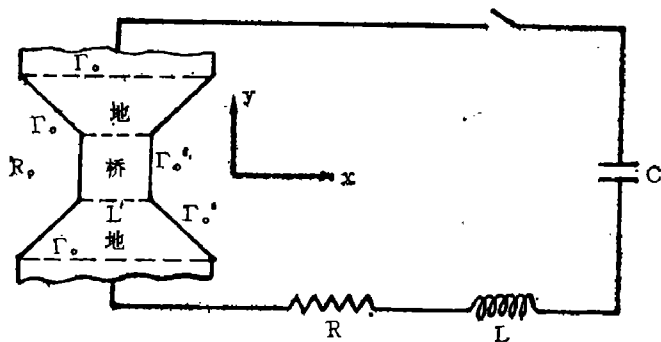
电加热金属箔爆炸产生的高压，抛射飞片撞击靶，这样的装置称为“电炮”<sup>[1][2]</sup>。它已应用于爆轰领域实验，不仅用来研究包括 TATB 这样的钝感炸药的冲击起爆和爆轰性能<sup>[3][4][5]</sup>，而且还作为在其他材料中产生高压的一种新手段<sup>[2][6]</sup>。

在飞片碰靶实验中，飞片的起飞是与金属箔的爆炸时刻相联系的。实验希望飞片碰靶时平面度尽可能的好，以便在炸药中产生平面爆轰波或者在靶中获得平面冲击波。可是金属箔的加热是不均匀的，造成了金属箔的不同步爆炸。如果对电容器放电回路中平面非线性电阻元件——金属箔做二维计算，将有助于理解和认识金属箔的加热过程和爆炸现象。我们对方形铝箔进行了数值计算，并把计算结果与 Logan 等人<sup>[7]</sup>从 46 次实验中取得的结果进行了比较，两者符合得较好。

## 二、物理模型和方程

在电容器放电回路中，金属箔由两端的“地”和中间的“桥”二部分组成(见图一)，“地”和“桥”可以是不同的金属。R 和 L 分别表示整个回路的分布电阻和电感。

在爆炸箔的实验中，把桥箔放在塑料飞片和绝缘体之间，这与把爆炸丝裸露在空气中的实验不同。Logan<sup>[7]</sup>分析了爆炸丝的研究工作，认为桥丝喷出的汽化物导致导体横截面的减小，而产生电阻峰值的汽化模型<sup>[8][9][10]</sup>，对于金属箔爆炸的情况是不合适的。因此我们的



图一 含有非线性电阻元件的电容器放电回路

计算考虑了金属箔从固态到液态的转变, 并假定从液态直接加热到箔爆炸, 而不经汽化阶段。

在实验上经验地认为金属箔达到峰值电阻或峰值功率时, 便发生爆炸。文献<sup>[11]</sup>给出了在 $\sim 10^7$ 安培/厘米<sup>2</sup>电流密度下, 各种金属丝爆炸时刻的比作用量实验值, 可以作为模拟计算中确定爆炸时刻的标准。而在爆炸箔情况中, 由于金属箔不同于爆炸丝以及电流密度超过了上述实验范围, 就不能用上述的实验值来检验了。文献<sup>[7]</sup>通过分析箔电阻对时间的变化率, 确定爆炸温度为 $3 \times 10^4$ °K。在我们的计算中, 也把这个温度定义为金属箔的爆炸温度。

我们忽略了趋肤效应和热传导, 并假定箔的密度不变。

电容器放电, 在回路中产生电流, 加热了金属箔。对于箔的每一个基元, 温度的升高满足方程

$$\frac{dT}{dt} = \frac{l}{C_v(t)\sigma(t)\rho} \vec{J}^2(t) \quad (1)$$

其中 $\sigma$ 为电导率,  $\rho$ 是物质密度,  $C_v$ 是定容比热,  $\vec{J}$ 是电流密度,  $T$ 是温度,  $t$ 是时间。 $\sigma$ 和 $C_v$ 都是温度的函数。关于铝、铜和金的电导率及比热的表达式见附录。

由基尔霍夫定理得到回路方程为

$$L \frac{dI}{dt} + RI + R_0 I = \frac{Q_0}{C} - \frac{l}{C} \int_0^t I(\lambda) d\lambda \quad (2)$$

其中 $Q_0$ 表示电容器上的初始电荷,  $R_0$ 是与时间相关的非线性电阻, 它依赖于通过元件的电过程。

在给定时刻, 通过求解非线性电阻元件上的电位分布, 能够得到 $R_0$ 。电位 $\Phi$ 本是坐标和时间的函数, 在很小的时间间隔 $\Delta t$ 内, 能够假定系统处于准稳态,  $\Phi$ 仅为坐标的函数。在我们模型中, 把金属箔在 $y$ 方向两端 $\Gamma_0$ 上的电位归一化, 它的另外两条边界 $\Gamma_1$ 是绝缘边界, 而在“桥”与“地”的接触线 $L'$ 上 $y$ 方向的电流密度相等, 则归一化的电位 $\varphi$ 在金属箔区域 $\Omega$ 上满足下面二维变系数拉普拉斯方程和边界条件

$$\Omega - L': \frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0 \quad (3)$$

$$L': \left( \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^- = \left( \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^+ \quad (4)$$

$$\Gamma_1': \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \quad (5)$$

$$\Gamma_0: \varphi|_{y=0} = 0, \quad \varphi|_{y=l} = 1 \quad (6)$$

其中 $\sigma = \sigma(x, y)$ 给出电导率在金属箔上的分布,  $l$ 是金属箔在 $y$ 方向的长度,  $\nu$ 是边界 $\Gamma_1'$ 外法线方向, 在接触线 $L'$ 上 $\nu$ 是从“地”(-)指向“桥”(+)的方向。

有了归一化的电位 $\varphi$ , 通过求解在归一化下的电流密度 $\vec{j}$ 和回路电流 $\bar{I}(t)$ , 得到非线性电阻元件的集总电阻

$$R_0(t) = \frac{l}{\bar{I}(t)} \quad (7)$$

由此就可以数值求解方程(2)和(1),其中实际的电流密度

$$\vec{j}(t) = \left[ I(t) / \bar{I}(t) \right] \vec{j} \quad (8)$$

最后,接着比作用量的定义求桥箔的比作用量

$$g(t) = \int_0^t \frac{1}{A^2} I^2(\lambda) d\lambda \quad (9)$$

其中A为桥箔的横截面积。

### 三、数值分析

#### 1. 用有限元法求解电位 $\varphi$

按照变分原理,求解变分问题

$$J(\varphi) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[ \sigma \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \sigma \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \text{极小值} \quad (10)$$

$$\Gamma_0: \varphi|_{y=0} = 0, \quad \varphi|_{y=1} = 1 \quad (11)$$

完全等价于求解(3)~(6)的边值问题,只是在能量积分 $J(\varphi)$ 时,按照“桥”和“地”的接触线 $L'$ 自然地把 $\Omega$ 分成的子区域顺序进行<sup>[12][13]</sup>。

为了进行数值求解,需要对变分问题(10)~(11)进行离散化。我们把平面域 $\Omega$ 剖分成许多小三角形面元,并把接触线 $L'$ 作为剖分的自然界线。在每个三角形面元上用线性插值函数

$$\bar{\varphi} = ax + by + c \quad (12)$$

代替函数 $\varphi(x, y)$ 。令在三角形顶点 $\varphi(x, y)$ 的值为 $\varphi_i(x_i, y_i)$ ,  $i=1, 2, 3$ 。代入方程(12)中得到以 $a, b, c$ 为未知量的代数方程组,解得

$$a = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^3 \eta_i \varphi_i$$

$$b = -\frac{1}{D} \sum_{i=1}^3 \xi_i \varphi_i$$

$$c = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^3 \omega_i \varphi_i$$

其中

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xi_1 = x_2 - x_3, \quad \xi_2 = x_3 - x_1, \quad \xi_3 = x_1 - x_2,$$

$$\eta_1 = y_2 - y_3, \quad \eta_2 = y_3 - y_1, \quad \eta_3 = y_1 - y_2,$$

$$\omega_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, \quad \omega_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, \quad \omega_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

由此得到

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i \lambda_i(x, y) \quad (13)$$

其中

$$\lambda_i(x, y) = (\eta_i x - \xi_i y + \omega_i) / D$$

在求得  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$  之后，每个三角形面元的积分  $J(\varphi)$  变成

$$J_c(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}^{(c)} \varphi_i \varphi_j$$

其中

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(c)} &= \iint_c \left[ \sigma \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \lambda_j}{\partial x} + \sigma \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \lambda_j}{\partial y} \right] dx dy \\ &= (\sigma \eta_i \eta_j + \sigma \xi_i \xi_j) / 2D_c = a_{ij}^{(c)}, \quad D_c = |D| \end{aligned}$$

对于整个平面域  $\Omega$  上的积分  $J(\varphi)$ ，我们用所有三角形面元上的  $J_c$  之和表示

$$J(\varphi) = J(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{L_0}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{L_0} a_{ij} \varphi_i \varphi_j$$

其中

$$a_{ij} = \sum_c a_{ij}^{(c)}$$

$L_0$  是  $\Omega$  区域上的全部节点数。求  $J(\varphi)$  的极小值就相当于解线性代数方程组

$$\frac{\partial J}{\partial \varphi_i} = \sum_{j=1}^{L_0} a_{ij} \varphi_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, L_0, \quad i \neq l_1, l_2, \dots, l_m, \quad (14)$$

在边界  $\Gamma_0$  上，节点  $l_1, l_2, \dots, l_m$  的  $\varphi_i$  等于边界上的值。方程组 (14) 的系数矩阵具有对称性和稀疏性，在程序中采用一维紧缩存储的技巧存于内存。我们用消元法求解方程组 (14)。所得到的解自动满足绝缘边界  $\Gamma_0'$  上和接触线  $L'$  上的条件。

## 2. 回路电流的差分方程

若在第  $n$  时刻得知每个三角形三顶点的  $\varphi$  值之后，利用方程 (13) 容易得到相应于三角形重心的归一化电流密度，它的  $x$ 、 $y$  方向上的分量分别为

$$j_x = \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \sigma \sum_{i=1}^3 \varphi_i \eta_i / D \quad (15)$$

和

$$j_y = \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\sigma \sum_{i=1}^3 \varphi_i \xi_i / D \quad (16)$$

则归一化回路电流

$$I = d \cdot \sum_K j_y^K \cdot \Delta X_K$$

其中  $\sum_K \Delta X_K = W$  是桥箔的宽度。由方程 (7) 求得  $R_0^2$  后，我们能够用一阶差分方程

$$L \frac{I^{n+1} - I^n}{\Delta t} + RI^{n+1} + R_0 I^{n+1} = \frac{1}{C} (Q^n - I^{n+1} \cdot \Delta t) \quad (17)$$

求出第  $n+1$  时刻的电流  $I^{n+1}$ 。在初始时刻  $n=0$  时,  $I=0$ ,  $Q=Q_0$ 。

### 3. 温度的差分方程

在每个三角形面元重心处,  $n+1$  时刻的温度  $T^{n+1}$  用下面的差分方程算出。

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} = \frac{1}{\rho \sigma^n C_v^n} (\vec{J}^n)^2 \quad (18)$$

其中  $\vec{J}^n$  是利用 (8) 和 (15)、(16) 确定的。在初始时刻, 取  $T=300^\circ\text{K}$ , 根据附录中公式,  $\sigma$  和  $C_v$  的初始分布值便可确定。

在算出了温度  $T^{n+1}$  的分布之后, 随之就能确定  $\sigma$  和  $C_v$  的新的分布值, 然后就开始了下一个时间步长的计算过程。

桥箔的温度达到熔点时, 开始计算熔化过程。在保持温度不变的情况下, 桥箔不断地吸收能量。当吸收的能量达到熔化热 (见附录) 时, 熔化过程终结。熔化所需的时间是

$$\tau = L_f / (R_0 I^2)$$

$I$  是熔化时的回路电流。

## 四、结果与讨论

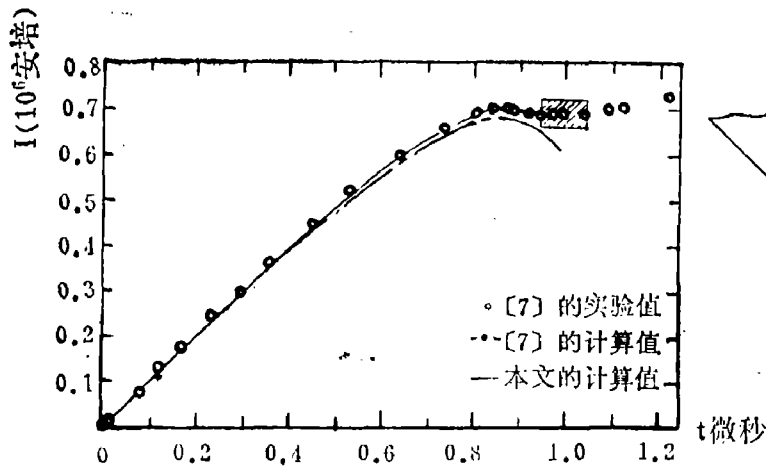
我们用 Fortran 语言编制了计算程序, 在“320”计算机上进行了计算。计算的模型为  $2.54 \times 2.54 \times 0.0051$  厘米的方形铝桥箔, 以及与它相连接的长底为 7.6 厘米的等腰梯形铜箔 (参见图一)。铝箔和铜箔具有相同的厚度。放电回路中的电容为 56 微法拉, 初始电压  $4 \times 10^4$  伏。回路中的电感和电阻分别为 40 毫微亨利和 0.006 欧姆。计算结果列入表 1, 与文献 [7] 从 46 次实验取得的结果和它的计算值做了比较。

表 1 桥箔爆炸时刻物理量的计算值与实验值的比较

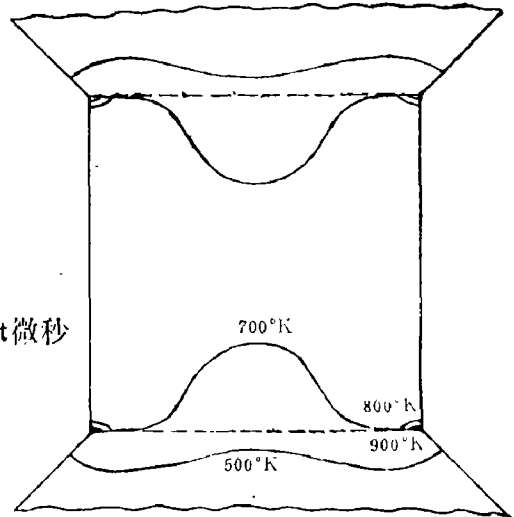
	t (微秒)	I ( $10^3$ 安培)	J ( $\frac{10^8 \text{ 安培}}{\text{厘米}^2}$ )	g ( $\frac{10^9 \text{ 安培}^2 \text{ 秒}}{\text{厘米}^4}$ )
实验值	$1.00 \pm 0.05$	687	$0.54 \pm 0.02$	1.25
本文计算值	0.931	695.6	0.537	1.243
[7] 的计算值	0.92		0.51	1.16

从表 1 看出, 爆炸时刻的电流、电流密度和比作用量与实验值相符合。爆炸电流的计算值为 695.6 千安培, 在实验的平均爆炸电流值 687 千安培的标准偏差之内。计算的电流时间经历与实验测得的结果也是吻合的 (见图二, 图中阴影区的纵向长度为爆炸电流值的标准偏差)。

计算表明, 加热的初始阶段, 箔温度的升高是缓慢的。桥箔在 0.5 微秒时才开始熔化, 随后温度迅速升高。另外, 金属箔各处加热不均匀, 方铝箔四个拐角处的温度比其他地方高得快 (见图三)。计算还给出了方铝箔的爆炸区域随时间发展的图象 (见图四); 爆炸从四



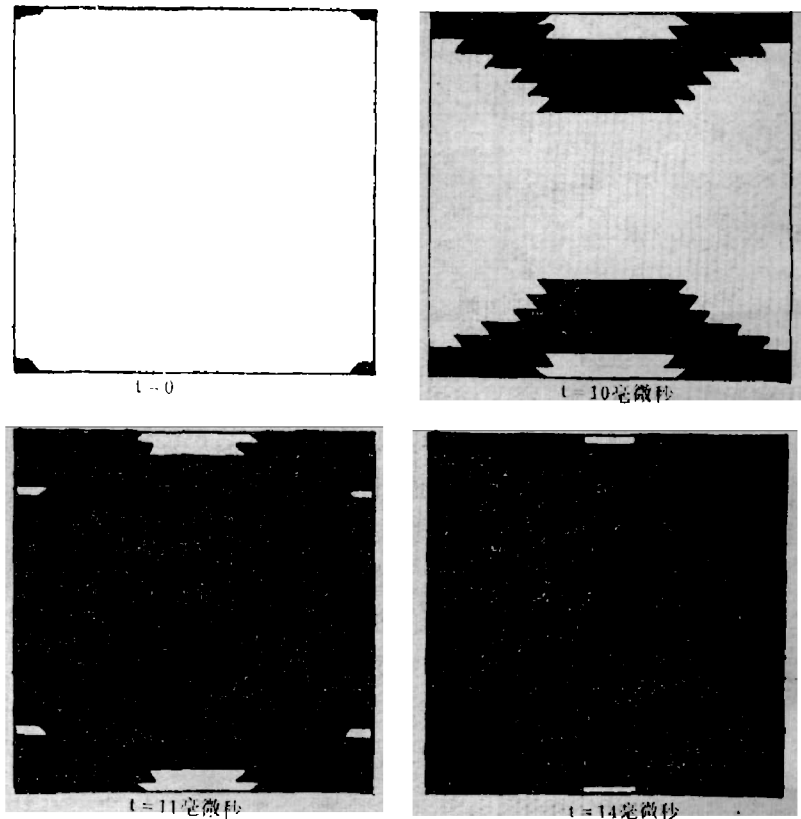
图二 回路电流的时间经历



图三 0.5微秒时金属箔上的等温线

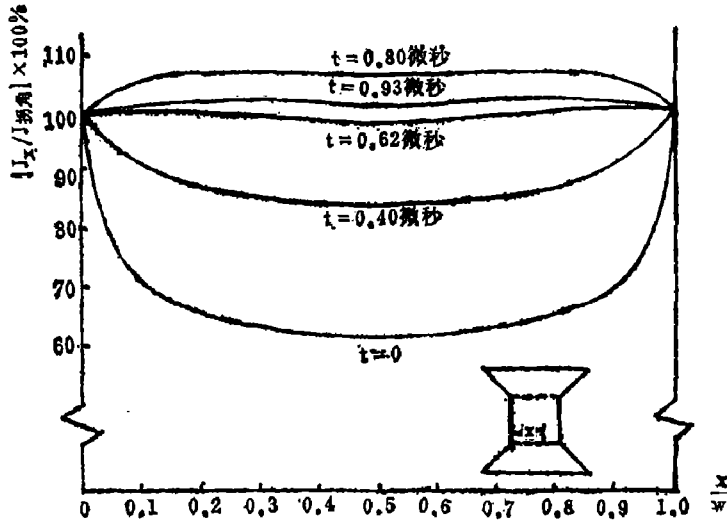
个拐角开始，随后向着箔中心和绝缘的两条边界扩展，经过11毫微秒方箔的中心发生爆炸。最后爆炸的是铝和铜箔的接触线  $L'$  的中点部位。方铝箔全部爆炸需18毫微秒。Jackson 等人<sup>[3]</sup>做了金属箔爆炸加速平面飞片碰撞 TATB 炸药的实验，实验用的金属箔和电路参量与我们的计算模型相同。他们在飞片飞行距离 1.7 毫米处测得，在直径大于飞片直径 (25 毫米) 75% 的圆面范围上，飞片在 20 毫微秒内与平面炸药靶相碰。因此，计算能够给出桥箔爆炸同时性的估计。

图五给出了方铝箔与铜箔接触线  $L'$  上的电流密度随时间变化的情况。在较早时刻，线的两端即拐角处的电流密度最大，中点处的电流密度最小。随着时间的增加，两拐



图四 方箔的爆炸区域随时间的发展 (黑影区表示已经爆炸的部分)

角随着时间增加，两拐角处的电流密度减小，中点处的电流密度增大。随着时间继续增加，中点处的电流密度达到最大值，两拐角处的电流密度达到最小值。最后，中点处的电流密度达到最大值，两拐角处的电流密度达到最小值。随着时间继续增加，中点处的电流密度达到最大值，两拐角处的电流密度达到最小值。最后，中点处的电流密度达到最大值，两拐角处的电流密度达到最小值。



图五 在接触线L'上电流密度的百分比随时间的变化

角之间部位上的电流密度比拐角上的增加得快，到0.6微秒左右时L'线上的电流密度趋于均匀。以后，线上中间部位的电流密度大于拐角上的值，但只大百分之几。在接近爆炸时刻，线上的电流密度又趋于一致了。电流密度分布的不均匀导致了箔温度分布不均匀。在拐角处由于电流密度在整个时间过程中相对地比其他地方的要大，而温度是与电流密度的平方成比例的，因此箔在拐角处加热快，最先爆炸（见图四）。相反地，在L'线的中点，箔最后爆炸。

从计算结果和实验值的比较可以看到，爆炸时间的计算比实验值偏低了一个标准偏差还多。这是由于在计算中假设  $\sigma = \sigma_0 [1 + \alpha(T - T_0)]^{-1}$ ，其中  $\alpha$  为常数，但实际上在金属熔化之后  $\alpha$  是随温度的升高而减小的<sup>[17]</sup>，因此把加热速率算大。另外，在方铝箔爆炸时与其邻近的1~2毫米的铜箔已经熔化，这本应需要能量和经历一段时间的，可是在计算中没有考虑。

## 五、总 结

本文提供的计算电加热金属箔的电流密度分布和温度分布的方法，能够适应于各种形状的爆炸箔，并允许“桥”和“地”是不同的金属，因此它比Logan等人<sup>[14]</sup>的有限差分计算更接近实际爆炸箔装置的描述。

本方法能够计算从电容器开始放电到桥箔爆炸的整个时间过程的回路电流的经历，成功地预示了箔的爆炸时间和相应的电流密度及比作用量。由于计算给出了桥箔爆炸区域随时间发展的图象，因此也能够估计桥箔的爆炸同时性。

这里使用的理论模型是做了若干简化的，对于在高温下金属箔的电离状态等问题均没有考虑。如果考虑爆炸后金属箔的加热，还需计入流体力学运动过程。这是一个复杂的问题，但也是电爆炸箔研究中一个有意义的课题。

## 附 录

铝、铜和金的比热、电导率<sup>[14]</sup>及熔化热<sup>[15]</sup>

铝：比热  $\left(\frac{\text{卡}}{\text{克} \cdot \text{度}}\right)$

$$C_v(T) = \begin{cases} 0.21 + 0.00012(T - 275) & 275 \leq T \leq 775 \\ 0.27 + 0.000233(T - 775) & 775 < T \leq 933 \\ 0.22 - 3.19 \times 10^{-6}T & 933 < T \leq 9500 \\ 0.11 + 8.64 \times 10^{-6}T & T > 9500 \end{cases}$$

电导率(  $\frac{1}{\text{欧姆} \cdot \text{米}}$  )

$$\sigma(T) = \frac{10^8}{2.5 + 0.0125(T - 275)}$$

熔化热(  $\frac{\text{千卡}}{\text{克分子}}$  )

$$L_f = 2.57$$

铜: 单位同上

$$C_v(T) = \begin{cases} 0.09 + 2.52 \times 10^{-5}(T - 250) & 250 \leq T \leq 1356 \\ 0.094 + 1.59 \times 10^{-7}T & 1356 < T \leq 28000 \\ 0.047 + 1.9 \times 10^{-6}T & T > 28000 \end{cases}$$

$$\sigma(T) = \frac{10^8}{1.25 + 0.00675(T - 250)}$$

$$L_f = 3.11$$

金: 单位同上

$$C_v = \begin{cases} 0.0309 + 5.88 \times 10^{-6}(T - 300) & 300 \leq T < 1336 \\ 0.030 + 2.10 \times 10^{-7}T & 1336 \leq T \leq 28000 \\ 0.015 + 7.8 \times 10^{-7}T & T > 28000 \end{cases}$$

$$\sigma(T) = \frac{10^8}{2 + 0.0106(T - 300)}$$

$$L_f = 2.96$$

### 参 考 文 献

- [1] R. C. Weingart, R. S. Lee, R. K. Jackson, N. L. Parker, UCRL-77610
- [2] R. C. Weingart, UCRL-52000-76-8
- [3] R. K. Jackson, R. C. Weingart, UCRL-77755
- [4] R. C. Weingart, R. K. Jackson, C. A. Honodee, R. S. Lee UCRL-82162
- [5] W. L. Seitz, S. C. Schmidt, J. Wackerle, LA-UR-78-2279
- [6] D. Seinfeld, H. Chan, G. Dittfemer, R. Weingart, UCID-17948
- [7] J. D. Logan, R. S. Lee, R. C. Weingart, K. S. Tee, J. Appl. Phys,



48(2), 621-28(1979)

- [8] F. D. Bennett, G. D. Kahl, E. H. Wedemeger, *Exploding Wires* edited by W. G. Chace and H. K. Moore (1966) Vol 3, P65
- [9] R. C. Maninger *Exploding Wires* edited by W. G. Chace and H. K. Moore (1966) Vol 3, P47.
- [10] F. D. Bennett, H. S. Burden, D. D. Shear, *J. Appl. Phys.*, **45**(8), P 3429 (1974)
- [11] T. J. Tucker, R. P. Toth, SAND-75-0041
- [12] 冯康等, 《数值计算方法》第十四章, 国防工业出版社, 1978年。
- [13] [美] 董平, J. N. 罗赛托斯著, 张圣坤等译, 《有限单元法——基本方法与实施》, 第二至四章, 国防工业出版社, 1979年。
- [14] J. D. Logan, R. S. Lee UCRL-52003
- [15] [日] 阪田修一等合编, 张质贤等译, 《物理学常用数表》 科学出版社, 1979年。

## A FINITE-ELEMENT METHOD CALCULATION OF ELECTRICALLY HEATED BURSTING METALLIC FOILS

Dong Yu-bin Li Xian-wen Dong Wei-shen

The author studied the heating Process, the distribution of temperature and the bursting phenomena in a planar nonlinear resistive element—a metallic foil, which is connected to the circuit with a discharging capacitor bank. The transient circuit current and temperature distribution in the metallic foil have been computed by a finite difference method. For every time step, the two dimensional Laplace's equation is solved by a finite-element method, so the potential distribution over the foil is given. The computed bursting time, current density and specific action are in accord with experimental results.