

实际空气中的点爆炸数值计算*

贺成林 郝保田

本文用击波装配程序求解球对称流体力学偏微分方程组,完成了实际空气中点爆炸产生的爆炸波问题的计算。报告中描述了计算方法和实际空气的状态方程,并提供了解的部分结果,给出了阵面上的超压、粒子速度、动压和到达时间等以及正相和负相作用时间。

一、引 言

理想气体中点爆炸的数值结果已由 Охоцимский 给出^[1,2],但尚应了解实际空气中点爆炸的结果并与其比较。

对于实际空气中的点爆炸, Brode 曾做过计算^[3],但他采用人工粘性的数值方法,需要对被光滑了的冲击波阵面上的力学参量进行校正,而这些量恰恰是我们很关心的。而且他做得较早,他用的状态方程也不够好。

我们采用击波装配法对实际空气中的点爆炸进行计算,冲击波阵面上的量由兰金-雨贡尼奥关系式给出,而采用的状态方程则由数据^[7,8]逼近给出。文中假定冲击波前的空气是均匀的,波后介质的运动是等熵的,并忽略了辐射输运。

本文包含着比较完整的计算方案、若干计算数据和计算图形,其中冲击波阵面上力学参量的发展变化比较仔细地描绘了出来。

二、流体动力学运动方程

一维球对称流体动力学运动方程是

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{c^2}{V} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2u}{x} \right) = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + u \frac{\partial V}{\partial x} - V \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2u}{x} \right) = 0 \quad (2.3)$$

状态方程

$$E = E(p, v), \quad T = T(p, v), \quad (2.4)$$

本文于1981年1月24日收到

* 本文是1973年完成的,这次做了修改。

式中 $c = \left\{ V^2 \cdot \left[P + \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_P \right] / \left(\frac{\partial E}{\partial P} \right)_V \right\}^{1/2}$ 是局部声速, u , P , E , V 和 T 分别表示粒子速度、压力、比内能、比容和温度。令

$$\xi = \frac{x}{x^0}, \quad \tau = \frac{t}{t^0}, \quad (2.5)$$

$$x^0 = (\alpha w / P_0)^{1/3}, \quad t^0 = x^0 / (P_0 V_0)^{1/2} \quad (2.6)$$

这里我们称 x^0 为特征长度, t^0 为特征时间。式中 w 为爆炸能量, $\alpha = 1.175^{[4]}$, P_0 , V_0 取标准海平面大气压力和比容。将无量纲变换

$$\bar{u} = u / (P_0 V_0)^{1/2}, \quad \bar{c} = c / (P_0 V_0)^{1/2} \quad (2.7)$$

$$\bar{P} = P / P_0, \quad \bar{V} = V / V_0, \quad \bar{E} = E / P_0 V_0, \quad \bar{T} = T / T_0$$

和(2.5)代入方程组(2.1)~(2.4), 看出 \bar{u} , \bar{P} , \bar{V} , \bar{E} 和 \bar{T} 所满足的方程与(2.1)~(2.4)具有同样的形式, 从而可认为方程组(2.1)~(2.4)的解适用于任何初始总能 w 和任何冲击波波前条件 $(P_0, V_0, u_0, E_0, T_0)$ 。再作变换

$$\tau = \tau, \quad \eta = \xi / \xi_M(\tau), \quad (2.8)$$

其中 ξ_M 为无量纲冲击波半径, 方程组(2.1)~(2.4)最后变为(为方便起见, 以下略去参量上的“-”)

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{u - \eta D}{\xi_M} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{V}{\xi_M} \frac{\partial P}{\partial \eta} = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} + \frac{u - \eta D}{\xi_M} \frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{c^2}{V \xi_M} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{2uc^2}{V \xi} = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{u - \eta D}{\xi_M} \frac{\partial V}{\partial \eta} - \frac{V}{\xi_M} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{2uV}{\xi} = 0 \quad (2.11)$$

$$E = E(P, V), \quad T = T(P, V), \quad (2.12)$$

式中 $D = d\xi_M/d\tau$ 为无量纲冲击波速度。

对于球对称点爆炸, 物质在中心静止, 即

$$u = 0, \quad (2.13)$$

在波阵面 ξ_M 上, 运动由击波关系式确立:

$$P - 1 = u^2 / (1 - V) \quad (2.14)$$

$$D = u / (1 - V) \quad (2.15)$$

$$E - E_0 = \frac{1}{2} (P + 1) (1 - V), \quad (2.16)$$

三、数值计算

1. 差分方程

我们用差分方法求解 (2.9) ~ (2.12), 将计算的区域 $\{\eta, \tau | [0, 1], [0, T]\}$ 用相互垂直的直线划分成若干网格, 在每一格子的中心对 Ψ 采用如下差分逼近:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tau}\right)_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\Delta\tau} \left[\Psi_{m+1}^{n+1} - \Psi_{m+1}^n + \Psi_m^{n+1} - \Psi_m^n \right] \quad (3.1)$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right)_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\Delta\eta} \left[\Psi_{m+1}^{n+1} - \Psi_m^{n+1} + \Psi_{m+1}^n - \Psi_m^n \right]$$

显然差分方程逼近微分方程有二阶精度 $O(\Delta\tau^2 + \Delta\eta^2)$ 。

首先, 对 (2.9)(2.10) 进行差分, 得

$$(\mathbf{I} + l\mathbf{B})_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{X}_{m+\frac{1}{2}}^{n+1} + (\mathbf{I} - l\mathbf{B})_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{X}_m^{n+1} = \mathbf{f}_m, \quad (3.2)$$

其中 \mathbf{I} 为二阶单位矩阵, $l = \Delta\tau/\Delta\eta$, 矩阵 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b & V/\xi_M \\ C^2/V\xi_M & b \end{pmatrix}$, $b = \frac{u-\eta D}{\xi_M}$, 向量 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2u \\ V\xi \end{pmatrix} \frac{C^2}{V\xi}, \mathbf{f} = (\mathbf{I} - l\mathbf{B})_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{X}_{m+\frac{1}{2}}^n + (\mathbf{I} + l\mathbf{B})_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{X}_m^n - 2\Delta\tau \mathbf{C}_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$$

设 $\mu_m = (\mu_m^{(1)}, \mu_m^{(2)})^*$ 为二维单位向量, g_m 为标量, 使内积等式 $(\mu_m, \mathbf{X}_m) = g_m$ 成立。根据 (3.2) 式得:

$$\left([(\mathbf{I} - l\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{I} + l\mathbf{B})]_{m+\frac{1}{2}}^{*n+\frac{1}{2}} \mu_m, \mathbf{X}_{m+\frac{1}{2}}^{n+1} \right) + g_m = \left(\mu_m, (\mathbf{I} - l\mathbf{B})_{m+\frac{1}{2}}^{-1} \mathbf{f}_m \right), \quad (3.3)$$

从而得递推公式:

$$\mu_{m+1} = \left[(\mathbf{I} - l\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{I} + l\mathbf{B}) \right]_{m+\frac{1}{2}}^{*n+\frac{1}{2}} \mu_m / \|\cdot\|_{\mathbb{E}}, \quad (3.4)$$

$$g_{m+1} = \left\{ \left(\mu_m, [(\mathbf{I} - l\mathbf{B})^{-1}]_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{f}_m \right) - g_m \right\} / \|\cdot\|_{\mathbb{E}}. \quad (3.5)$$

这里 \mathbf{A}^* 表示 \mathbf{A} 的转置, \mathbf{A}^{-1} 表示逆矩阵, $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$ 表示某向量的长度, 使得向量 μ_{n+1} 的长度为 1。

数值计算中发现, $\left[(1 - bl)^2 - \left(\frac{cl}{\xi_M} \right)^2 \right]^{-1}$ 在流场内有一奇点, 使得 μ_{n+1} 、 g_{n+1} 和 \mathbf{X} 的计算精度大大降低, 甚至发生溢出停机。为消去此奇点, 于 (3.3) 两边同时乘以因子 $\left\{ (1 - bl)^2 - \left(\frac{cl}{\xi_M} \right)^2 \right\} / \left(\frac{cl}{\xi_M} \right)^2 \Big|_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$, 从而得具体表达式如下:

$$\begin{cases} f_m^{(1)} = (1-bl)_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} u_{m+1}^n + (1+bl)_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} u_m^n - \frac{Vl}{\xi_M} (P_{m+1}^n - P_m^n) \\ f_m^{(2)} = (1-bl)_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} P_{m+1}^n + (1+bl)_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} P_m^n - \frac{c^2 l}{V\xi_M} (u_{m+1}^n - u_m^n) - \frac{4uc^2}{V\xi} \cdot \Delta\tau \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} \tilde{\mu}_{m+1}^{(1)} = \left(\frac{\xi_M}{cl}\right)^2 \left[\left(1 - b^2 l^2 + \frac{c^2 l^2}{\xi_M^2}\right) \mu_m^{(1)} + \frac{2c^2 l}{V\xi_M} \mu_m^{(2)} \right] \\ \tilde{\mu}_{m+1}^{(2)} = \left(\frac{\xi_M}{cl}\right)^2 \left[\frac{2Vl}{\xi_M} \mu_m^{(1)} + \left(1 - b^2 l^2 + \frac{c^2 l^2}{\xi_M^2}\right) \mu_m^{(2)} \right] \\ \mu_{m+1}^{(1)} = \tilde{\mu}_{m+1}^{(1)} / \sqrt{\tilde{\mu}_{m+1}^{(1)^2} + \tilde{\mu}_{m+1}^{(2)^2}} \\ \mu_{m+1}^{(2)} = \tilde{\mu}_{m+1}^{(2)} / \sqrt{\tilde{\mu}_{m+1}^{(1)^2} + \tilde{\mu}_{m+1}^{(2)^2}} \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} g_{m+1} = & \left\{ \left[(1-bl)f_m^{(1)} + \frac{Vl}{\xi_M} f_m^{(2)} \right] \mu_m^{(1)} + \left[\frac{c^2 l}{V\xi_M} f_m^{(1)} + (1-bl)f_m^{(2)} \right] \mu_m^{(2)} - \right. \\ & \left. - g_m \left[(1-bl)^2 - \frac{c^2 l^2}{\xi_M^2} \right] \right\} / \left\{ \frac{c^2 l^2}{\xi_M^2} \cdot \sqrt{\tilde{\mu}_{m+1}^{(1)^2} + \tilde{\mu}_{m+1}^{(2)^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

不妨取 $\mu_0 = (1, 0)^*$, 据(2.13)和内积表达式显然有

$$g_0 = 0. \quad (3.9)$$

利用(3.6)~(3.9)可以逐次直至冲击波阵面求出 $f_m^{(1)}$, $f_m^{(2)}$, $\mu_{m+1}^{(1)}$, $\mu_{m+1}^{(2)}$ 和 g_{m+1} ($m = 0, 1, 2, \dots, M-1$).

计算扰动区域内的力学参量也采用递推方法: 若 p_m^{n+1} , u_m^{n+1} 已知, 利用从(3.2)式导出的

$$u_m^{n+1} = - \frac{\mu_m^{(2)}}{\mu_m^{(1)}} p_m^{n+1} + \frac{1}{\mu_m^{(1)}} g_m \quad (3.10)$$

$$p_m^{n+1} = \frac{f_m^{(2)} - (1+bl)_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} p_{m+1}^{n+1} - \left(\frac{c^2 l}{v\xi_M}\right)_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} u_{m+1}^{n+1} + \left(\frac{c^2 l}{v\xi_M}\right)_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} g_m}{(1-bl)_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \left(\frac{c^2 l}{v\xi_M}\right)_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \mu_m^{(2)} / \mu_m^{(1)}} \mu_m^{(1)} \quad (3.11)$$

即可求出 P_m^{n+1} 和 u_m^{n+1} ($m = M-1, \dots, 1, 0$).

类似地, 考虑(2.11)式, 不难得到

$$V_m^{n+1} = \frac{1}{(1-bl)_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}} \left[f_m^{(3)} - (1+bl)_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} V_{m+1}^{n+1} + \left(\frac{vl}{\xi_M}\right)_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}) \right]. \quad (3.12)$$

其中

$$f_m^{(2)} = (1-bl)_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} V_{m+1}^n + (1+bl)_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \dot{V}_m^n + \left(\frac{lV}{\xi_M}\right)_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (u_{m+1}^n - u_m^n) + \frac{4uV}{\xi} \Delta\tau \quad (3.13)$$

2. 冲击波阵面上力学参量的计算

假定 $n+1$ 层上的冲击波速度 D^{n+1} 已知, 利用 (2.14)、(2.15) 式得到的

$$P-1 = Du \quad (3.14)$$

和内积等式 $\mu_M^{(1)} u_M + \mu_M^{(2)} P_M = g_M$, 有

$$P_M = \left[\mu_M^{(1)} + Dg_M \right] / \left[\mu_M^{(1)} + D\mu_M^{(2)} \right] \quad (3.15)$$

$$u_M = \frac{1}{\mu_M^{(1)}} \left[g_M - \mu_M^{(2)} P_M \right]. \quad (3.16)$$

固定 u_M , 再用 (2.14)、(2.16) 联立确定 P, V 。事实上, 令

$$\delta = E - E_0 - \frac{1}{2}(P+1)(1-V), \quad (3.17)$$

由牛顿迭代

$$V^{(i+1)} = V^{(i)} - \frac{E^{(i)} - E_0 - \frac{1}{2}(P^{(i)}+1)(1-V^{(i)})}{\left(\frac{\partial E}{\partial V} + \frac{P-1}{1-V} \frac{\partial E}{\partial P}\right)^{(i)} + 1}, \quad (3.18)$$

$$P^{(i)} = 1 + \frac{u_M^2}{1-V^{(i)}}, \quad (3.19)$$

〔迭代初值 $V^{(0)} = V_M^n$, $P^{(0)}$ 由 (3.15) 式给出〕就能求出 P_M, V_M 。最后由 (3.16)、(2.15) 和 (2.16) 依次给出 u_M, D^{n+1} 和 E_M, T_M 从状态方程求出。

总括起来, 整个数值计算过程可以归纳如下: 若 n 层上的力学量全部已知, 取 $D^{n+1} = D^n$, 由

$$\xi_M^{n+1} = \xi_M^n + D^{n+1} \cdot \Delta\tau, \quad \xi_m^{n+1} = \eta_m \xi_M^{n+1} \quad m=0, 1, \dots, M \quad (3.20)$$

求出冲击波阵面和质点的新空间位置。利用 (3.9)、(3.6)、(3.13)、(3.7) 和 (3.8) 式逐次求出 f_m, μ_{m+1} 和 g_{m+1} ($m=0, 1, \dots, M-1$), 再由 (3.18)、(3.19)、(3.16)、(2.15) 和 (2.16) 求出冲击波阵面上各参量, 最后据 (3.10)、(3.11) 和 (3.12) 求出新的 u_m, P_m, V_m ($m=M-1, \dots, 1, 0$), 这就给出 $n+1$ 层网格点上新的力学参量。随后, 利用新的 D^{n+1} 重复上述计算过程, 如果两个相邻的 D^{n+1} 相对误差满足精度要求, 迭代过程终止, 由状态方程给出 E_m 和 T_m , 整个计算推进了一个时间步长。否则, 继续迭代。

上述方法, 通常称为隐式迭代追赶方法。需要说明, 各公式中的系数取 $n + \frac{1}{2}$ 层上的值时约定 $\psi^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\psi^{n+1} + \psi^n)$, ψ^{n+1} 由迭代给出, 始值取 $\psi^{n+1} = \psi^n$ 。

3. 差分方程组的稳定性及时间步长的选取

对应于方程组 (2.9) ~ (2.11) 的差分方程组具有 (3.2) 式的形式。我们考虑它的局部稳定性条件^[6], 运用福里哀展开, 不难得到增长矩阵的三个特征根为

$$\lambda_{1,2} = \left[\alpha \cdot \beta - \frac{c^2 l^2}{\xi_M^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \pm i(\alpha + \beta) \frac{cl}{\xi_M} \sin \frac{\varphi}{2} \right] / \left\{ \alpha^2 + \frac{c^2 l^2}{\xi_M^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right\},$$

$$\lambda_3 = \beta / \alpha,$$

其中 $\alpha = \cos \frac{\varphi}{2} + ib \sin \frac{\varphi}{2}$, β 为 α 的共轭。容易验证这三个 λ 的模都等于 1, 即增长矩阵的特征根都在单位圆周上, 因而差分方程组对初值是绝对稳定的。

研究追赶过程对边值的稳定性, 我们得到限制条件 (充分条件) $-1 \leq b \leq 0$ 。数值计算时用近似条件 $\Delta \tau_n \leq \frac{1}{D^n} \Delta \xi$ 代替它, 作为时间步长选取的限制, 即小扰动不允许一个时间步长跨过一个网格。

4. 渐近公式的使用

(2.9) ~ (2.11) 中的项 $\frac{2uc^2}{V\xi}$ 和 $\frac{2uV}{\xi}$ 在 $\xi = 0$ 没有定义, 用上述程序进行数值解时, 由于中心 ($\xi = 0$) 产生不稳定导致中心区间出现奇异现象。这样, 我们不得不在中心区间内使用微分方程的渐近解代替数值计算的差分解。

设爆心压力 P_0 已知, 它由差分解给出。中心区间内的量满足下述渐近公式:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_m &= \frac{\xi_m}{\xi_{m+1}} \tilde{u}_{m+1}, \quad \tilde{V}_m = \left(\frac{\xi_m}{\xi_{m+1}} \right)^{-s} \tilde{V}_{m+1} \\ \tilde{P}_m &= P_0 + \left(\frac{\xi_m}{\xi_{m+1}} \right)^{s+2} (\tilde{P}_{m+1} - P_0) \end{aligned} \quad m = J-1, \dots, 1, 0. \quad (3.21)$$

其中 $S = 3E_1 / P_1 V_1$, J 是中心区间边界点。中心区间边界点的选取由差分解与渐近解的耦合精度所确定。

考虑了中心处理, 计算过程需作适当修改: 当追赶程序求出新的一遍 u_m , P_m , V_m 和 E_m 后, 由耦合精度给出中心区间的边界, 用 (3.21) 给出渐近解代替中心区间内的差分解。实际计算过程是每追赶一次后接着确定一次中心区间的边界, 运用渐近公式修改一次中心区间内的差分解。

四、状态方程

空气的状态方程仿照文献^[9]中的状态方程逼近形式给出。设

$$\begin{aligned} T &= zv(z, V), \quad z = P \cdot V, \\ E &= z \cdot \frac{\mu - 1}{2}, \quad \mu(z, V), \end{aligned} \quad (4.1)$$

为了满足热力学第二定律, 一个互易关系式存在, 对函数 μ 与 v 进行制约。根据

$Tds = dE + pdv$ 和熵 s 满足全微分条件, 得互易关系式是

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{V^2}{2v} \left(\frac{\partial \mu}{\partial V} \right)_z - \frac{1}{vV} \right] = -V^2 \frac{\partial}{\partial V} \left[\frac{1}{2v} \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right)_v + \frac{\mu-1}{2vz} \right], \quad (4.2)$$

对纯流体动力学问题, 我们特别关心 $\mu(z, v)$ 的表达式。将 $v(z, v)$ 仅仅作作为 z 的函数考虑 (实际上在 v 的很大量程内这样近似仍很精确), 相应地 μ 有形式

$$\mu = \mu_0(z) - \mu_1(z) \ln V, \quad (4.3)$$

这时由 (4.2) 式可给出

$$\mu_1(z) = \frac{2zv'(z)}{v + zv'(z)}. \quad (4.4)$$

函数 $\mu_0(z)$ 与 $v(z)$ 由最新数据^[7, 8]逼近给出:

$$v(z) = \frac{486.8}{1000 + z^2} + \frac{3860 + z}{7500 + 16.5z} \quad (4.5)$$

$$\mu_0(z) = 1 + \frac{18.49425 + 3z}{3.29885 + z} + \frac{900(z-1)}{2810 + z^2} + \frac{1400(z^2-1)}{5 \times 10^6 + z^3} +$$

$$+ \frac{35 \times 10^3(z-1)}{1 \times 10^7 + z^2} + \frac{1920(z^2-1)}{256 \times 10^6 + z^3} + \frac{3 \times 10^5(z^2-1)}{108 \times 10^{12} + z^3} - \frac{100(z^5-1)}{6 \times 10^{11} + z^6}.$$

逼近误差一般不超过 1%~2% (就绝热指数 γ 而言)。(4.1)、(4.3)、(4.4) 和 (4.5) 式给出了状态方程的具体表达式。

五、初值选取

$\gamma = 1.4$ 忽略反压的强点爆解析解^[4]适用于理想气体和强冲击波, 不能直接作为实际空气问题的初值。而 $\gamma = 1.3$ 的理想气体点爆自模解能较好地反映早期实际空气中的爆炸现象, 就总能量守恒而言与使用四节状态方程也很协调, 我们就取这个 γ 的点爆自模解作为初值。其力学参量初始分布给出在 100 个空间网格点上。

取冲击波前的压力 $p_0 = 1.013 \times 10^6$ 达因/厘米², 密度 $\rho_0 = 0.001293$ 克/厘米³。取 $W = 8.37 \times 10^{20}$ 尔格。相应的特征长度 $X^0 = 990.18872$ 米, 特征时间 $t^0 = 3.5376309$ 秒。若初值分布在半径 25 米的球内, 则冲击波半径 ξ_M 、到达时间 τ 及阵面上的压力 (见附录表) 分别为 $\xi_M = 0.025247712$, $\tau = 0.0^3 11860663^*$, $\bar{P} = 6304.4660$ ($\gamma = 1.3$ 时因子 $\alpha = 0.8569^{[4]}$)。

六、计算结果

从上述初值出发, 计算 680 个 $\Delta\tau$ 后, 冲击波位置和相应的到达时间分别达到 $\xi_M = 17.601$, $\tau = 14.207$ 。而离爆心稍远的整个流场几乎恢复到原始状态, 击波衰减已接近声波 ($\bar{P} = 1.0097$), 计算终止。

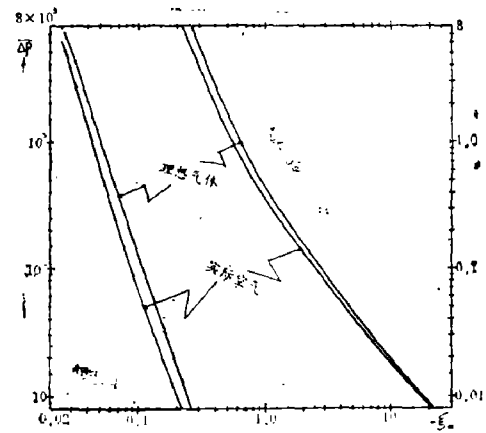
* $0.0^3 11860663$ 表示 0.00011860663 , 以下使用此缩写符号。

1. 计算正确性检查:

计算过程中, 计算机自动地用质量积分和能量积分检查计算的正确性。令 ϵ_M 和 ϵ_E 分别记扰动区域中总质量和总能量的相对误差 ($\epsilon_M = \left(3 \int_0^{\xi_M} \frac{1}{V} \xi^2 d\xi \left(\frac{\xi_M^3}{\xi_M^3}\right) - 1, \epsilon_E = \left\{3 \int_0^{\xi_M} \left(E + \frac{u^2}{2}\right) \times \frac{1}{V} \xi^2 d\xi \left(\frac{3}{4\pi\alpha} + E_0 \xi_M^3\right)\right\} - 1, E_0 = 2.5$ 是波前空气的比内能), 五节初值的相对误差是 $\epsilon_M = 0.00578, \epsilon_E = -0.018$, 整个计算过程中, 由机器不断打印出的 ϵ_M 和 ϵ_E 看出总质量总能量守恒性很好, 例如 $\xi_M = 0.57$ 时, $\epsilon_M = -0.0003, \epsilon_E = 0.002$; $\xi_M = 2.1$ 时, $\epsilon_M = -0.0001, \epsilon_E = 0.0003$ 。相对误差一直不增长。

2. 冲击波阵面上力学参量的变化 (见附录表):

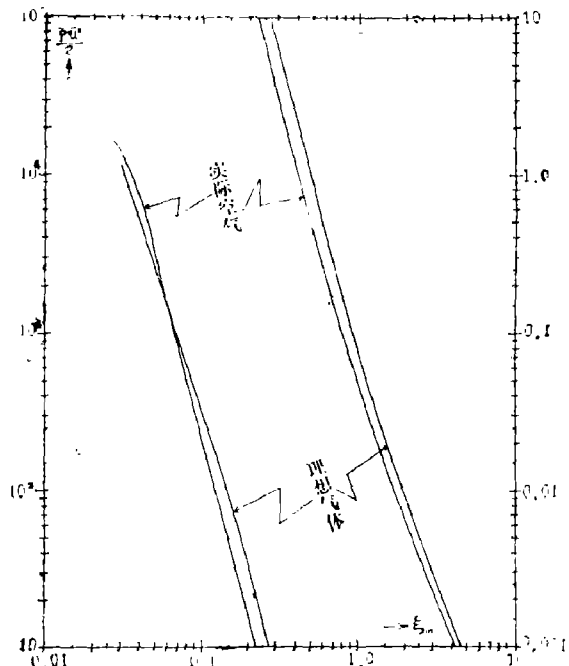
冲击波阵面上的超压 Δp 作为冲击波半径 ξ_M 的函数指示在图一上。为了比较, $\gamma = 1.4$ 的理想气体点爆数值解的阵面超压也画在上面。结果表明, 实际空气中的超压偏低, 并且, 在同一压力下, 理想气体曲线的衰减半径乘以因子 $\beta^{1/3}$, 两条曲线相重合。也就是说, 就超压峰值而言, 实际空气中的爆炸仅仅与理想气体中 β 倍能量的爆炸相等效。虽然 β 不恒等于常数, 但在我们特别感兴趣的范围内(超压在 $0.1 \leq \Delta p \leq 10$), 大约等于0.65。



图一 无量纲超压 Δp 随冲击波半径 ξ_M 的变化

图二上给出阵面动压 $\left(\frac{1}{2} \rho u^2\right)$ 随冲击波半径的

变化。爆炸初期, 由于空气被严重压缩(最大压缩11倍), 实际空气中的动压比理想气体中的动压大。但高温空气中因电离、离解和分子结合等过程消耗能量, 实际空气中爆炸的能量将较快地衰减。因而实际空气中的动压峰值也较快地衰减, 并且在某地(大约 $\xi_M = 0.2$ 附近)仅仅为理想气体中的动压峰值的一半。

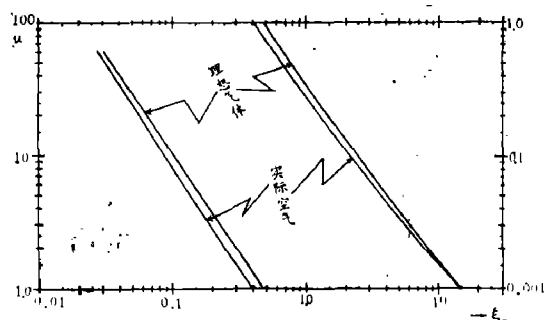


图二 动压峰值随冲击波半径的变化

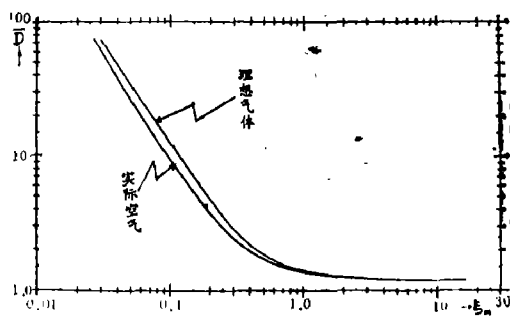
在图三、四、五上分别给出阵面粒子速度、冲击波速度、冲击波到达时间与冲击波半径的关系和相应的理想气体计算曲线的比较。从图中看出实际空气中的粒子速度、冲击波速度比理想气体中的值偏低。而击波走时比理想气体中的要慢。随着距离的增加, 两种计算结果逐渐接近。这是由于在远距离上, 冲击波的超压减小, 温度降低, 实际空气的状态方程已接近理想气体的缘故。

至于冲击波阵面上的密度和内能的变化,

可参看附录表。动能和温度可用给出的已知数据容易计算出来。



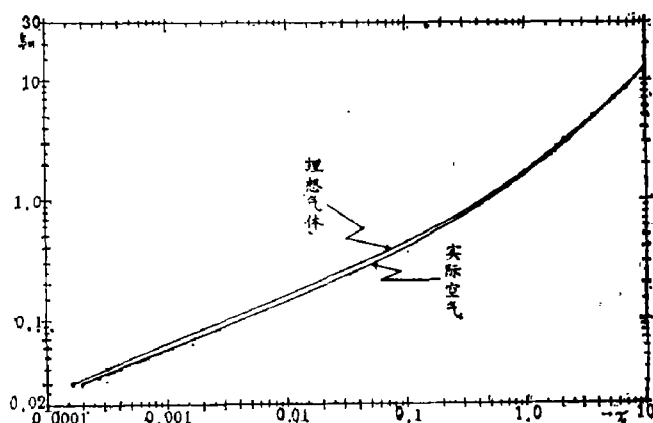
图三 波阵面粒子速度随击波半径的变化



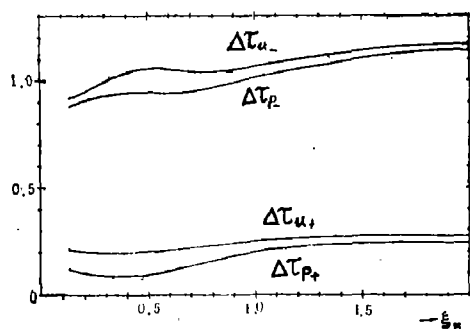
图四 击波速度随半径的变化

3. 超压和粒子速度的正相持续时间和负相持续时间:

数值计算也给出了一系列固定时间在扰动区域上超压、速度、内能和比容的分布以及在一系列固定位置上超压、速度、内能和比容随时间的变化, 根据这些资料画出的曲线的形态(定性上)与理想气体中的相应曲线差不多。这里仅仅在图六上给出超压和粒子速度的正相持续时间 $\Delta\tau_{p+}$ 、 $\Delta\tau_{u+}$ 和负相持续时间 $\Delta\tau_{p-}$ 、 $\Delta\tau_{u-}$, 与理想气体点爆计算结果比较, 二者基本一致。



图五 击波走时曲线



图六 超压和速度的正负相持续时间

需要指出, 点爆炸模型的必然结果是爆心附近 ($\xi < 0.2 \sim 0.3$ 的范围) 始终相当稀疏。那里又没有热传导和辐射机制耗散这个高温球中的能量, 比内能、比容、温度和声速一直非常大。而正压作用时间的大小取决于波阵面的速度和波尾的声速。这就是点爆计算正压作用时间偏低的理由所在。使用球爆炸模型的辐射流体力学计算可以改进爆心附近的这些结果。

参 考 文 献

1. Охоцимский Д. Е. и пр Расчет точечного Взрыва с учетом протидовления. Труды матем. института Ан ссср 50 (1957).
2. Охоцимский Д. Е. и пр Оповедений ударных волн на большом расстоянии от места

- взрыва, ЖБММФ. 2 (1962)
3. Brode, H. L., RM-1824 (1956)
 4. 哥洛别尼柯夫等著 戴家谦译 点爆炸理论 (1962)
 5. Brode, H. L., RM-1825
 6. R. D. 里奇特迈尔著 何旭初等译 初值问题的差分方法 (1964)
 7. Hilsenrath, J., Klein, M., AD-612301 (1965)
 8. Gilmore, F. R., RM-1543 (1955)

NUMERICAL SOLUTIONS OF THE POINT SOURCE EXPLOSION IN REAL AIR

He Cheng-lin Hao Bao-tian

A shock-fitting method is programmed for the solution of the partial differential equations governing hydrodynamic motion with spherical geometry. The problem of the blast wave from a point source in real air was calculated numerically. In this paper, the author describes the computational method, the equation of state of real air and some results, such as the overpressure at the shock wave front, particle velocity, dynamic pressure and the time of arrival, as well as the durations of positive and negative phases. Comparisons are made with those for ideal gas.

附表 2 无量纲冲击波半径、冲击波速度、冲击波阵面上的粒子速度、压力、内能和比容随时间的变化

τ	ξ_M	\bar{D}	\bar{u}	\bar{P}	\bar{E}	\bar{V}
0.0 ³ 11860663	0.025247712	85.147730	74.041504	6304.4660	2741.0722	0.13043478
0.0 ³ 19658219	0.030753363	59.630736	53.179892	3172.0404	1417.3907	0.10817986
0.0 ³ 33185925	0.037463074	42.561043	38.733869	1649.4247	753.50760	0.089921995
0.0 ³ 56051729	0.045638783	30.643653	27.833100	853.82934	390.71335	0.091717301
0.0 ³ 94558391	0.055600542	22.209406	19.964844	444.35710	202.67367	0.10106442
0.0 ² 15912720	0.067739203	16.215219	14.358110	233.78810	106.44906	0.11452875
0.0 ² 26637954	0.082533297	11.992413	10.431456	126.07736	57.768357	0.13016202
0.0 ² 44108202	0.10056822	9.0435466	7.6829324	70.465794	32.856802	0.15045140
0.0 ² 72183607	0.12255144	6.8994332	5.6977839	40.299996	19.553463	0.17416637
0.011675955	0.14934891	5.3247265	4.2542067	23.644647	12.344959	0.20104691
0.018681837	0.18201604	4.1524399	3.1809272	14.201876	8.3226082	0.23396190
0.029535143	0.22184848	3.2930507	2.3800137	8.8303617	6.0523892	0.27726175
0.046006140	0.27043422	2.6794100	1.7849074	5.7765408	4.7571196	0.33384303
0.070339933	0.32971061	2.2438728	1.3372592	3.9952865	3.9884963	0.40403966
0.10523105	0.40204292	1.9366516	0.99879682	2.9292006	3.5132109	0.48426614
0.15377105	0.49031749	1.7223716	0.74462889	2.2770708	3.2083844	0.56767233
0.21943136	0.59804913	1.5721315	0.55378555	1.8656231	3.0047099	0.64774859
0.30613309	0.72952834	1.4684688	0.41470866	1.6052312	2.8678702	0.71759110
0.41841049	0.88997996	1.3953464	0.31235887	1.4332848	2.7723546	0.77614242
0.56163444	1.0857802	1.3432479	0.23659039	1.3159664	2.7039592	0.82386691
0.74227822	1.3247124	1.3055832	0.18141572	1.2358260	2.6553382	0.86104602
0.96820969	1.6162670	1.2778565	0.13764996	1.1748908	2.6171390	0.89228058
1.2490302	1.9720321	1.2575528	0.10656413	1.1333292	2.5903884	0.91526071
1.5964933	2.4061400	1.2423992	0.082205668	1.1015701	2.5695272	0.93383313

(续)

τ	ξ_M	\bar{D}	\bar{u}	\bar{P}	\bar{E}	\bar{V}
2.0249591	2.9358498	1.2310403	0.064205863	1.0786167	2.5542059	0.94784422
2.5519840	3.5821999	1.2224232	0.050013455	1.0607899	2.5421569	0.95908663
3.1990206	4.3708761	1.2158482	0.039188841	1.0473681	2.5329951	0.96776831
3.9922736	5.3332163	1.2107973	0.030623221	1.0368479	2.5257578	0.97470802
4.9637435	6.5074591	1.2069048	0.024279903	1.0291217	2.5204104	0.97988250
6.1524978	7.9402623	1.2038807	0.019329329	1.0231259	2.5162415	0.98394415
7.6062232	9.6885583	1.2015268	0.015465102	1.0184665	2.5129901	0.98712879
9.3831304	11.821815	1.1996826	0.012457422	1.0148527	2.5104610	0.98961607
11.554223	14.424796	1.1982488	0.0 ² 99348562	1.0118290	2.5083402	0.99170885
14.206751	17.600928	1.1970745	0.0 ² 81295524	1.0096713	2.5068240	0.99320882