

# 临界爆轰的稳定条件和螺旋爆轰波

孙 锦 山

本文应用耗散结构热力学理论和微扰的方法, 研究临界爆轰波对二维扰动的稳定性问题。在忽略粘性、热传导、浓度扩散、外力和交叉效应的情况下, 作出了扰动在爆轰波结构内传播的稳定性判据。对 Arrhenius 反应率, 当化学反应活化能  $E$  大于某一临界值  $E_c$  之后, 对反应率随温度增加而增加的放热反应, 临界爆轰波对二维扰动是不稳定的, 扰动的振幅在反应燃烧区内随时间的增加而增长, 直至扰动最后离开爆轰波结构进入波后产物区。当考虑了粘性的影响之后, 扰动振幅的增长和衰减依赖于扰动本身的频率, 在反应放热量超过某临界值后, 频率愈小亦即扰动波长愈长的扰动振幅, 随时间增长愈快, 以致最长波长的扰动增长掩盖了其它波长的扰动, 或者只有最长波长的扰动振幅维持不变, 其它波长的扰动振幅都逐渐衰减, 最后形成有规则的螺旋爆轰波。所得结果当忽略化学反应以及粘性对扰动传播相速度的微小影响之后, 结论与 N. Monson<sup>[1]</sup> 和 J. A. Fay<sup>[2]</sup> 等所作的声波理论结果相一致, 比较成功地解释了螺旋爆轰的一些实验现象。

## 一、引 言

螺旋爆轰现象是 C. Campabell 和 D. Woodhead<sup>[3]</sup> 在研究一氧化碳和氧的混合气中的爆轰波时, 得到的一种与预计爆轰波截然不同的摄影记录。这种螺旋爆轰的现象, 以后被许多研究工作者重复地研究过<sup>[4-7]</sup>, 并指出在化学反应活化能较高, 即在较难起爆的混合气体内, 或者在接近爆轰极限的爆轰介质内, 螺旋爆轰是一种常见的爆轰现象。

螺旋爆轰的主要实验图象见图一, 主要是:

1. 爆轰波波面速度不均匀, 是周期振动的。
2. 在圆柱爆轰的管壁上留下螺旋形的痕迹, 在散心爆轰的平板上留下对数螺旋线的痕迹。



图 1

3. 反应产物区的光亮条纹线与波纹线有关, 波头上每一次突出对应于反应物区的一个条纹, 每个起伏之间的距离  $L$ , 是很规则的常数, 且改变管径  $R$ , 那么  $L$  也与  $R$  成比例地变化。

以下应用耗散结构的热力学理论来研究临界爆轰波结构的稳定性问题, 并用反应流体力学的微扰方法来研究不稳定临界爆轰波的耗

散结构问题。

临界爆轰波是指爆轰波波头上温度较低,被冲击压缩过的介质,它的化学反应进行得相当缓慢,波后形成一个比较长的反应燃烧区,单位时间释放出的化学反应能较少,以致于只能勉强维持爆轰波的状态向前传播。在实验时可以调配反应介质的浓度比例以达到临界爆轰状态。在理论处理时,可以认为在此临界爆轰波结构内,除介质成份 $\rho_r$ 有所变化外,其余的宏观物理量都近似认为空间分布是均匀的。

下面二节,将文献<sup>[8]</sup>所介绍的非平衡热力学方法,应用到爆轰波的具体情况,进行结构稳定性分析。第四节的内容用不同于文献<sup>[2][10]</sup>的方法,考虑了化学反应和粘性的影响,得到螺旋爆轰的结构。最后讨论一下由此得到的一些结论和实验数据进行对比的情况以及就结论进行一些有关的讨论。

## 二、反应流体力学方程组

坐标系建立在定常运动的爆轰波波阵面上。讨论单一反应道单一反应介质 $A \rightarrow B$ 的情况。采用通常的温度、密度、压力、速度、内能和熵的符号:  $T, \rho, P, \vec{V}, e, S$ , 采用张量表示形式。

总质量守恒方程:

$$\partial_t \rho + (\rho V_j)_{,j} = 0 \quad (1)$$

这里  $j = 1, 2, 3$  表示  $x, y, z$  三个方向的分量,逗号后的  $j$  表示沿相应方向的导数。

分质量守恒方程中,忽略浓度扩散,记  $\rho_A$  为反应介质的密度,则有:

$$\partial_t \rho_A + (\rho_A V_j)_{,j} = -\omega \quad (2)$$

动量守恒方程中,忽略重力对流体动量的贡献后,记  $P_{ij}$  为压力张量,则可写成:

$$\partial_t (\rho V_j) + [P_{ij} + \rho V_i V_j]_{,j} = 0 \quad (3)$$

忽略热传导、重力和热扩散效应,  $e$  表示物质内能与介质化学能之和,则能量方程为:

$$\partial_t (\rho e) + [\rho e V_j + h_j]_{,j} = -P_{ij} V_{i,j} \quad (4)$$

其中  $h_j$  表示  $j$  方向的热流,在此假定  $h_j = 0$ 。

利用热力学关系式与压力张量表示式,由 (4)、(1)、(2) 可求出熵平衡方程如下:

$$\partial_t (\rho S) + (\rho S V_j)_{,j} = -P_{ij} T^{-1} V_{i,j} + \frac{\omega A}{T} \quad (5)$$

这里  $A$  表示化学亲和力,定义为  $A = -\sum \nu_r \mu_r$ , 其中  $\mu_r$  为化学势,  $P_{ij}$  为粘性应力张量,它与压力张量之间成立:

$$p_{ij} = P_{ij} + P \delta_{ij} \quad (6)$$

由这些方程可以得到定常爆轰附近的微扰方程组,记  $\delta$  为增量,故有:

$$\partial_t \delta \rho + [\delta (\rho v_j)]_{,j} = 0 \quad (7)$$

$$\partial_t \delta \rho_A + [\delta (\rho_A v_j)]_{,j} = -\delta \omega \quad (8)$$

$$\partial_t \delta (\rho v_j) = -[\delta p_{ij} + \delta (\rho v_i v_j)]_{,j} \quad (9)$$

$$\partial_t \delta (\rho e) + [\delta (\rho e v_j)]_{,j} = -\delta (p_{ij} v_{i,j}) \quad (10)$$

### 三、稳定性分析

爆轰波结构是由一个冲击压缩波以及紧跟一个燃烧区而组成。化学反应结束点即为爆轰波波后的状态点。一般的爆轰燃烧区一直延伸到冲击压缩波结构内部，形成一个相互交叉的区域。在P-V图上，流体微团从初态出发，基本上沿Rayleigh与Hugoniot之间某一曲线，向冲击波的终态发展，由于粘性、热传导的存在，使得流体的宏观运动速度，由碰撞逐渐变成无规运动速度，随着流体内部熵增，温度逐渐提高，由于化学反应的存在，流体运动达不到Von-Neumann尖上的状态，从而化学反应迅速占主导地位，流体密度、压力很快下降，直至化学反应进行完毕，流体微团流出爆轰波结构，进入波后化学反应产物区。

从非平衡热力学观点，爆轰波结构相当于一个开放的热力学系统。流体介质以及它所携带的质量、动量和能量进入此结构，经过化学反应再携带一部分质量、动量和能量流出爆轰波结构。根据定态爆轰波结构的要求，它要满足质量、动量和能量的守恒要求。从热力学熵平衡的观点，它要满足：流出爆轰波结构的熵减去流进爆轰波结构的熵，要等于结构内部所产生出来的熵。这种不断依靠外界提供负熵来维持的定常状态，一般称为耗散结构。爆轰波结构在定常态附近，它对二维扰动的稳定性问题，也可以应用这种耗散结构的热力学理论来进行讨论。

由热力学关系式，并选择 $\rho e$ 、 $\rho v$ 和 $\rho \gamma$ 作为独立变量时，可求出熵和动能的二次微商：

$$d^2(\rho s) = d\left(\frac{1}{T}\right) d(\rho e) - \sum_{\gamma} d\left(\frac{\mu_{\gamma}}{T}\right) d\rho_{\gamma} \quad (11)$$

$$d^2\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) = \rho (dv)^2 \quad (12)$$

文献〔8〕已证明：函数 $d^2(\rho s)$ 是一个恒负的函数， $d^2\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)$ 是一个恒正的函数。因此它们可以选取作为研究系统热力学与动力学稳定性的Liapounoff函数。系统的稳定性状况视此两函数对时间的导数而决定。

对平面临界爆轰波的情况，(11)与(12)式对时间的导数，并代入相应的微扰方程，整理得：

$$\frac{1}{2}\partial_t [d^2(\rho s)] = d\omega d\frac{A}{T} + T^{-1}dP\delta_{ij}dv_{,j} \quad (13)$$

$$\frac{1}{2}\partial_t [d^2\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)] = dP\delta_{ij}dv_{,j} - 2\eta\lambda_{ij}^2 - (dv_i dP_{ij})_{,j} \quad (14)$$

其中 $\eta$ 为粘性系数，而 $\lambda_{ij} = \frac{1}{2}(dv_{i,j} + dv_{j,i})$ ，选择系统热力学流体力学稳定性的Liapounoff

$$\text{函数为：} d^2(\rho z) = d^2(\rho s) - \frac{1}{2T} d^2(\rho v^2) \quad (15)$$

显然 $d^2(\rho z)$ 是一个恒负的函数，由(13)与(14)式可求出(15)式的时间导数为，

$$\partial_t d^2(\rho z) = d\omega d\frac{A}{T} + \frac{2\eta}{T}\lambda_{ij}^2 + \frac{1}{T} [dv_i dP_{ij}]_{,j} \quad (16)$$

上式对整个所讨论的体积积分,且在此体积的外边介上扰动项的积分影响为零,那么可得:

$$\int_V \partial_i d^2(\rho z) dv = \int_V \left[ d\omega \frac{A}{T} + \frac{2\eta}{T} \lambda_{ij}^2 \right] dv \quad (17)$$

据根稳定性理论, (17) 式大于零, 那么系统是渐近稳定的, 反之是不稳定, 等于零表示中性稳定状态。

取反应率 $\omega$ 为Arrhenius公式:

$$\omega = W \rho_A e^{-E/R_0 T} \quad (18)$$

$W$ 为一个大于零的常数,  $E$ 为分子活化能, 再利用化学亲和力的定义和吉卜斯(Gibbs)自由能表示式, 可以得到:

$$A = Q + T \left( \frac{\partial s}{\partial \xi} \right)_{p, T}$$

这里 $Q$ 为反应生成热,  $\xi$ 为反应度。定义无量纲量:

$$Q^\ddagger = Q/R_0 T \quad E^\ddagger = E/R_0 T \quad \delta T = dT/T \quad \delta \rho_A = d\rho_A/\rho_A$$

由(17)式, 系统热力学——流体力学稳定条件为:

$$-Q^\ddagger \int_V \left[ E^\ddagger (\delta T)^2 + (\delta \rho_A \delta T) \right] dV + \frac{2\eta e^{E^\ddagger}}{WR_0 T} \int_V \frac{\lambda_{ij}^2}{\rho_A} dV \geq 0 \quad (19)$$

其中 $\delta \rho_A$ 与 $\delta T$ 的关联, 对放热化学反应, 一般 $\rho_A$ 的减少伴随着温度 $T$ 的上升, 因此成立,  $\delta \rho_A \delta T < 0$ , 而对吸热化学反应情况正相反。定义:

临界活化能:

$$E_c = -R_0 T \int_V (\delta \rho_A \delta T) dV / \int_V (\delta T)^2 dV \quad (20)$$

临界反应能

$$Q_c = R_0 T \frac{2\eta e^{E^\ddagger}}{WR_0 T} \int_V \frac{\lambda_{ij}^2}{\rho_A} dV / \int_V \left[ E^\ddagger (\delta T)^2 + (\delta \rho_A \delta T) \right] dV \quad (21)$$

从(19)式可见:

1. 对放热化学反应的情况, 当 $E > E_c$ 和 $Q > Q_c$ 时, (19)式不成立, 故系统是不稳定的。其它情况, 系统一定是渐近稳定或者中性稳定。

2. 对吸热化学反应和无化学反应能释放的情况, 系统一定是稳定的。

3. 当不考虑粘性的影响时, 有 $Q_c = 0$ , 对随温度增长而增长的反应率, 如果 $\omega$ 仅是温度的函数, 那么放热反应的定常态, 它一定是不稳定的。这就得到H. Jones<sup>[10]</sup>的结论。

#### 四、螺旋爆轰波

上述的稳定性分析, 可见临界炸轰波只要活化能 $E$ 比较高时, 放热量大于某一临界值之后, 定常临界炸轰波是不稳定的。这一节进一步讨论定常态不稳定时, 通过扰动方程求出扰动的传播和发展情况, 并确定放热量的临界值。

首先讨论忽略粘性的情况。

由冻结声速和冻结定压比热的定义, 通过质量、分质量守恒方程和熵守恒方程, 可有:

$$\frac{1}{a_f^2} d_t P + \rho (V_j)_{,i} = Q\omega / TC_{p,f} \quad (22)$$

由浓度定义, 通过质量、分质量守恒方程有:

$$\partial_t C_A + V_j (C_A)_{,j} = \omega / \rho \quad (23)$$

对动量方程、熵方程以及 (22)、(23) 式在定常态附近进行微扰, 忽略高阶小量后得到:

$$\partial_t C'_A = -\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial \omega}{\partial C_A} C'_A + \frac{\partial \omega}{\partial P} p' + \frac{\partial \omega}{\partial S} S' \right] \quad (24)$$

$$\rho \partial_t V'_i + (p')_{,i} = 0 \quad (25)$$

$$\rho (v'_j)_{,j} + \frac{1}{a_f^2} \partial_t p' - \frac{Q}{C_{p,f} T} \left[ \frac{\partial \omega}{\partial C_A} C'_A + \frac{\partial \omega}{\partial P} p' + \frac{\partial \omega}{\partial S} S' \right] \quad (26)$$

$$\partial_t S' = 0 \quad (27)$$

这里以“'”表示相应的扰动量, 在上述方程线性化时, 假定了定常态时反应速率相当小。近似取作零, 扰动引起的熵增是扰动的二阶以上小量。由方程 (27), 如果在  $t=0$  时选择一定的基数, 使得  $S'=0$ , 那么在以后的时刻忽略二阶以上小量时有  $S'=0$ , 将 (26) 式乘  $\rho$ , 对时间  $t$  求导数, 再将 (24) 式代入, 然后对空间坐标求梯度, 由 (25) 式可以求出:

$$\partial_t \left[ \frac{1}{a_f^2} \partial_t^2 V'_i - (V'_j)_{,j,i} \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial C_A} \left[ \frac{1}{a_f^2} \partial_t^2 V'_i - (V'_j)_{,j,i} \right] + \frac{Q}{C_{p,f} T} \frac{\partial \omega}{\partial P} \partial_t^2 V'_i \quad (28)$$

化学反应的特征时间  $R$  度  $\tau$  为:

$$\tau \sim (\partial \omega / \rho \partial C_A)^{-1}$$

这里假定反应时间相当长, 因此可忽略方程 (28) 中带  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial C_A}$  的项, 这相当于假定了分子活

化能不大于临界活化能, 设扰动速度存在势:  $\vec{V}' = \nabla \Phi$ , 以此代入方程, 并对  $t$  积分一次, 对第  $i$  个空间坐标再积分一次, 得到:

$$\frac{1}{a_f^2} \partial_t^2 \Phi - \frac{Q}{C_{p,f} T} \frac{\partial \omega}{\partial P} \partial_t \Phi = \nabla^2 \Phi \quad (29)$$

其中系数均取零级量时的值, 故上为常系数方程。取柱面坐标, 并假定速度势  $\Phi$  可分离变量:  $\Phi = \psi(r) T(t) \Theta(\theta)$  以此代入 (29) 式, 并令:

$$\frac{\psi''}{\psi} + \frac{1}{r} \frac{\psi'}{\psi} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta} = -\lambda^2 \quad (30)$$

$$-\Theta''/\Theta = \nu^2 \quad (31)$$

这里  $\lambda$  与  $\nu$  均为常数, 由此可求得:

$$\Theta = A_1 \sin \nu \theta + B_1 \cos \nu \theta$$

$$\Psi = A_2 J_\nu(\lambda r) + B_2 Y_\nu(\lambda r)$$

$$T = A_3 e^{\alpha t} \quad \alpha = \frac{Q}{2C_{p,f} T} \frac{\partial \omega}{\partial P} a_f^2 \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4C_{p,f}^2 T^2} \left( \frac{\partial \omega}{\partial P} \right)^2 a_f^4 - \lambda^2 \nu a_f^2}$$

由于要满足周期不变性,  $\nu$  一定是整数,  $J_\nu$  与  $Y_\nu$  分别为第一类和第二类 Bessel 函数, 据  $\gamma=0$  处  $\Phi$  有限的要求, 因此有  $B_2=0$ ,  $\nu > 0$ , 同时还要求圆柱壁上满足边界条件:

$$r = R_0 \text{ 上, } \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_{R_0} = 0$$

亦即要求:

$$J'_{\nu}(\lambda R_0) = 0 \quad (32)$$

由(32)式可以求 $\lambda$ , 设 $\lambda_{k\nu}$ 表示上方程的第 $k$ 个根, 由 $\alpha$ 的表示式, 因为:

$$C_{P,i}T \sim a_i^2 \quad \lambda_{k\nu}^2 a_i^2 \gg \frac{Q^2}{4C_{P,i}^2 T^2} \left( \frac{\partial \omega}{\partial P} \right)^2 a_i^4$$

所以 $\alpha$ 可近似为:

$$\alpha = \frac{Q a_i^2}{2C_{P,i}T} \frac{\partial \omega}{\partial P} \pm \lambda_{k\nu} a_i$$

由此得到扰动速度势的表示式为:

$$\Phi = \Phi_0 \exp \left[ \frac{Q a_i^2}{2C_{P,i}T} \frac{\partial \omega}{\partial P} t \right] \sum_{R,\nu} J_{\nu}(\lambda_{k\nu} r) \left[ A \cos(\nu \theta + \lambda_{k\nu} a_i t) + B \cos(\nu \theta - \lambda_{k\nu} a_i t) \right]$$

这就是无粘性影响时扰动速度势介, 由此可求出扰动压力、密度的空间分布。可见, 若  $Q \frac{\partial \omega}{\partial P} > 0$ , 那么扰动振幅随时间指数增长, 临界爆轰波定态是不稳定的。

下面考虑粘性项的影响。

在动量方程中考虑粘性项的影响, 而能量方程中粘性项的贡献是扰动速度的二级以上的小量, 因此可以忽略。这样方程(25)变成:

$$\rho \partial_t V_{i'} + P_{,i'} = \eta \nabla^2 V_{i'} + \frac{1}{3} \eta (\text{div} \vec{V}')_{,i} \quad (33)$$

记  $\frac{1}{3} \eta (\text{div} \vec{V}')_{,i} = n_i$ , 对上式求一次与二次时间导数后, 代入(28)式, 改写成向量形式, 省略“'”的符号, 同样假定反应时间相当长, 则有:

$$\begin{aligned} \partial_t \left[ \frac{1}{a_i^2} \partial_t^2 \vec{V} - \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) \right] - \frac{\eta}{\rho a_i^2} \partial_t^2 \nabla^2 \vec{V} + \frac{Q}{C_{P,i}T} \frac{\partial \omega}{\partial P} \frac{\eta}{\rho} \partial_t \nabla^2 \vec{V} \\ = \frac{Q}{C_{P,i}T} \frac{\partial \omega}{\partial P} \partial_t^2 \vec{V} - \frac{Q}{C_{P,i}T} \frac{\partial \omega}{\partial P} \frac{1}{\rho} \partial_t \vec{n} + \frac{1}{\rho a_i^2} \partial_t^2 \vec{n} \end{aligned} \quad (34)$$

上式对时间积分一次, 以  $\vec{n} = \frac{1}{3} \eta \nabla (\nabla \cdot \vec{V})$  代入, 然后对所得方程取旋度第三分量与散度后有:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{a_i^2} \partial_t^2 - \frac{Q}{C_{P,i}T} \frac{\partial \omega}{\partial P} \partial_t + \frac{Q}{C_{P,i}T} \frac{\partial \omega}{\partial P} \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 - \frac{1}{a_i^2} \frac{\eta}{\rho} \partial_t \nabla^2 \right] \\ \cdot \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{a_i^2} \partial_t^2 - \frac{Q}{C_{P,i}T} \frac{\partial \omega}{\partial P} \partial_t + \frac{Q}{C_{P,i}T} \frac{\partial \omega}{\partial P} \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 - \frac{1}{a_i^2} \frac{\eta}{\rho} \partial_t \nabla^2 \right] \nabla \cdot \vec{V} \\ = \left[ \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{\eta}{\rho} \frac{Q}{C_{P,i}T} \frac{\partial \omega}{\partial P} \right) \nabla^2 + \frac{1}{3} \frac{\eta}{\rho a_i^2} \partial_t \nabla^2 \right] \nabla \cdot \vec{V} \end{aligned} \quad (36)$$

假设有:

$$V_z = \partial_z \Phi + \partial_y \psi \quad V_y = \partial_y \Phi - \partial_z \psi$$

则方程 (35) 与 (36) 化为:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{a_f^2} \partial_t^2 - \frac{Q}{C_{P,f} T} \frac{\partial \omega}{\partial p} \partial_t + \frac{Q}{C_{P,f} T} \frac{\partial \omega}{\partial p} \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 - \frac{1}{a_f^2} \frac{\eta}{\rho} \partial_t \nabla^2 \right] \nabla^2 \Phi \\ & = \left[ \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{\eta}{\rho} \frac{Q}{C_{P,f} T} \frac{\partial \omega}{\partial p} \right) \nabla^2 + \frac{1}{3} \frac{\eta}{\rho a_f^2} \partial_t \nabla^2 \right] \nabla^2 \Phi \end{aligned} \quad (37)$$

$$\left[ \frac{1}{a_f^2} \partial_t^2 - \frac{Q}{C_{P,f} T} \frac{\partial \omega}{\partial p} \partial_t + \frac{Q}{C_{P,f} T} \frac{\partial \omega}{\partial p} \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 - \frac{\eta}{\rho a_f^2} \partial_t \nabla^2 \right] \nabla^2 \psi = 0 \quad (38)$$

对方程 (37) 的  $\nabla^2$  积分, 得到  $\Phi$  的方程, 为求此方程, 与前面无粘性的情况相同, 分离变量后求得:

$$T = T(0) e^{\alpha t} \exp(\pm i a_f \lambda \zeta) \quad (39)$$

其中:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{Q}{C_{P,f} T} \frac{\partial \omega}{\partial p} a_f^2 - \lambda \frac{4\eta}{3\rho} \right)$$

$$\zeta = \sqrt{1 - \frac{4Q}{3 C_{P,f} T} \frac{\partial \omega}{\partial p} \frac{\eta}{\rho} - \left( \frac{Q}{C_{P,f} T} \frac{\partial \omega}{\partial p} a_f^2 - \lambda^2 \frac{4\eta}{3\rho} \right)^2} / 4 a_f^2 \lambda^2$$

而:

$$\Theta = A_1 \sin \nu \theta + B_1 \cos \nu \theta \quad (40)$$

$$R = A_2 J_\nu(\lambda r) + B_2 Y_\nu(\lambda r) \quad (41)$$

以后由方程 (38) 求函数  $\psi$ , 若  $\psi$  满足:

$$\left[ \frac{1}{a_f^2} \partial_t^2 - \frac{Q}{C_{P,f} T} \frac{\partial \omega}{\partial p} \partial_t + \frac{Q}{C_{P,f} T} \frac{\partial \omega}{\partial p} \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 - \frac{1}{a_f^2} \frac{\eta}{\rho} \partial_t \nabla^2 \right] \psi = 0 \quad (42)$$

同样设可分离变量, 令  $\psi = T(t) \bar{\Theta}(\theta) \bar{R}(r)$ , 这里的  $T(t)$  与 (39) 式相同, 以此代入 (42), 求出对应的介为:

$$\bar{R}(r) = A_4 J_\nu(\xi r) + B_4 Y_\nu(\xi r)$$

$$\bar{\Theta}(\theta) = A_3 \sin \nu \theta + B_3 \cos \nu \theta$$

其中:

$$\xi^2 = \frac{\rho}{\eta} \left[ \frac{T''}{T} - \frac{Q}{C_{P,f} T} a_f^2 \frac{\partial \omega}{\partial p} \frac{T'}{T} \right] / \left( \frac{Q a_f^2}{C_{P,f} T} \frac{\partial \omega}{\partial p} - \frac{T'}{T} \right) \quad (43)$$

而  $J_\nu$  与  $Y_\nu$  为复宗量的第一、二类的 Bessel 函数, 至此我们已全部求出函数  $\Phi$  和  $\psi$  的形式:

$$\Phi = T(t) [A_1 \sin \nu \theta + B_1 \cos \nu \theta] [A_2 J_\nu(\lambda r) + B_2 Y_\nu(\lambda r)] \quad (44)$$

$$\psi = T(t) [A_3 \sin \nu \theta + B_3 \cos \nu \theta] [A_4 J_\nu(\xi r) + B_4 Y_\nu(\xi r)] \quad (45)$$

由 (44) 与 (45) 式, 可以求出  $r$  与  $\theta$  方向的速度, 在管壁上满足边界条件:  $V_r|_{R_0} = V_\theta|_{R_0} = 0$ ,

而在  $r = 0$  处要求速度  $V_r$  与  $V_\theta$  有限, 另外据周期变化不变性可有:

$v$  为大于零的整数.

$$B_2 = B_4 = 0$$

$$A_1 A_3 + B_1 B_3 = 0$$

$$\lambda R_0 J'_v(\lambda R_0) - v J_v(\lambda R_0) J_v(\xi R_0) / \xi R_0 J'_v(\xi R_0) = 0 \quad (46)$$

记  $\lambda_{k,v}$  为上式的第  $k$  个根.

由 (43) 式可见:  $\xi \propto 1/\sqrt{\eta}$ , 当粘性系数比较小时,  $\xi R_0$  很大, 根据 Bessel 函数的渐近展开式和递推公式, 可将 (46) 化为:

$$\lambda R_0 J'_v(\lambda R_0) - v J_v(\lambda R_0) / [\xi R_0 J_{v-1}(\xi R_0) - v J_v(\xi R_0)] = 0 \quad (47)$$

当  $\eta \rightarrow 0$  时显然  $\xi R_0 \rightarrow \infty$ , 上式就蜕化为无粘性情况常数  $\lambda$  的选取公式,  $J'_v(\lambda R_0) = 0$ .

由上可得:

$$\Phi = \sum_{k,v} \Phi_v^0 \exp \left\{ \left( \frac{Q a_f^2}{C_{P,f} T} \frac{\partial \omega}{\partial p} - \frac{2}{3} \frac{\eta}{\rho} \lambda_{k,v}^2 \right) t \right\} J_v(\lambda_{k,v} r) \\ [ A_v \cos(v\theta + \lambda_{k,v} a_f \xi t) + B_v \cos(v\theta - \lambda_{k,v} a_f \xi t) ] \quad (48)$$

$$\psi = \sum_{k,v} \psi_v^0 \exp \left\{ \left( \frac{Q a_f^2}{C_{P,f} T} \frac{\partial \omega}{\partial p} - \frac{2}{3} \frac{\eta}{\rho} \lambda_{k,v}^2 \right) t \right\} J_v(\xi r) [ C_v \cos(v\theta + \lambda_{k,v} a_f \xi t) \\ + D_v \cos(v\theta - \lambda_{k,v} a_f \xi t) ] \quad (49)$$

其中常数  $\Phi_v^0$ 、 $\psi_v^0$ 、 $A_v$ 、 $B_v$ 、 $C_v$ 、 $D_v$  为前述的  $T(0)$ 、 $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$ 、 $A_4$ 、 $B_1$ 、 $B_3$  且满足边界条件的选择, 通过一定的组合而成的.

从表达式 (48)、(49) 式, 可以看到不考虑粘性时, 对随压力增加而增加的放热反应率, 所有扰动的振幅, 随时间指数增长. 而考虑粘性影响时, 化学反应在单位时间的放能量要大于某一临界值:

$$\left( Q \frac{\partial \omega}{\partial p} \right)_c = \min_{k,v} \frac{4 \eta C_{P,f} T}{3 \rho a_f^2} \lambda_{k,v}^2 \quad (50)$$

在大于此临界值之后, 某些频率的扰动才有可能维持振幅不变, 或者随时间同时增长. 当  $\eta$

比较小时, 忽略一阶以上的小量则临界值近似为:  $\min_{k,v} \frac{4 \eta C_{P,f} T}{3 \rho a_f^2} \lambda_{k,v}^{*2}$ , 其中  $\lambda_{k,v}^*$  为

$J'_v(\lambda R_0) = 0$  的解. 由于  $v$  为不等于零的正整数, 据 Bessel 函数的性质则有:

$$\min_{k,v} \frac{4 \eta C_{P,f} T}{3 \rho a_f^2} \lambda_{k,v}^{*2} = \frac{4 \eta C_{P,f} T}{3 \rho a_f^2} \lambda_{11}^{*2}$$

故对临界爆轰波, 若  $Q \frac{\partial \omega}{\partial p} \geq \frac{4 \eta C_{P,f} T}{3 \rho a_f^2} \lambda_{11}^{*2}$  那么定常态是不稳定的. 从 (48) (49) 式可

见, 振幅的增长随扰动频率  $\lambda_{k,v}^2$  的增长而减小, 直至随时间的增长而衰减.

如果  $Q \frac{\partial \omega}{\partial p} = \frac{4 \eta C_{P,f} T}{3 \rho a_f^2} \lambda_{11}^{*2}$ , 那么除了  $\lambda_{k,v} = \lambda_{11}^*$  的扰动之外, 所有其它频率的扰动,



均由于粘性的存在而逐渐衰减, 唯有频率为 $\lambda_{11}^*$ 的扰动维持振幅不变, 如果放能量大于此临界值, 虽然除 $\lambda_{11}^*$ 之外, 还可能有一些频率的扰动振幅随着时间的增长而增长, 但增长最快的, 显然是 $\lambda_{11}^*$ 的扰动。因此一定时间之后, 频率为 $\lambda_{11}^*$ 的扰动占主导地位, 从而发展成为有规则的螺旋爆轰波。

综上所述有以下几个结论:

(1) 不考虑粘性影响时, 若 $Q > 0$ 的放热反应, 且能满足 $\frac{\partial \omega}{\partial P} > 0$ , 那么扰动振幅随时间指数增长, 临界爆轰波的定常态是不稳定的。

(2) 当考虑粘性影响时, 上述的结论要 $Q > Q_c$ 时才能成立, 其中 $Q_c = \frac{4\eta C_{p,f} T}{3 \rho a_f^2} \lambda_{11}^{*2}$ ,

而且扰动的增长只有最长波长的扰动能够得到充分的发展, 其它波长的扰动要么是衰减, 要么被最长波长的扰动所掩盖。

(3) 扰动以一个向正 $\theta$ 方向, 另一个向负 $\theta$ 方向旋转的波向外传播, 当 $\theta$ 变化 $2\pi$ 时, 相角变化 $2\nu\pi$ , 因此 $\nu$ 表示 $\theta$ 方向扰动振幅所达到的相对极值数目, 同理 $K$ 表示 $r$ 变化时达到振幅极值的数目, 它的相速度为:  $d_t \theta = \pm \frac{\lambda_{k,\nu} a_f \zeta}{\nu} = 2\pi f$ , 这里 $f$ 为自旋频率, 在管壁上扰动旋转的相速度为 $v = R_0 \lambda_{k,\nu} a_f \zeta / \nu$ 。

(4) 设爆轰波的传播速度为 $D$ , 由管壁的旋转相速度, 可以求出形成螺旋爆轰倾角的斜率为:  $t_g \alpha = v/D = \lambda_{k,\nu} R_0 \zeta a_f / \nu D$

若忽略粘性与化学反应对相速度的微小影响, 可令 $\zeta = 1$ , 据Bessel函数性质,  $\lambda_{11}^* R_0 = 1.84$ 这样就可以求出自旋频率 $f$ 和螺旋倾角的斜率 $t_g \alpha$ 。

下表是实验自旋频率 $f$ , 螺旋倾角斜率 $t_g \alpha$ 与理论计算数据的比较, 可见两者符合得是相当令人满意的。实验爆轰介质为 $2\text{CO} + \text{O}_2$ 的气体混合物, 冻结声速与爆速之比为:  $D = 555$ ,  $D/a_f = 0.571$ 。

## 五 讨 论

前面讨论的临界爆轰波, 在定态假定了爆轰介质的化学反应进行得如此之慢, 以至于在定态完全可以假定反应速率为零。而在扰动波内, 化学反应又能很快地进行。情况如图(2)所示, B点温度较低, 反应速度很慢, 波结构的前部接近冲击压缩波附近的状态, 即近B点状态。扰动使得冲击压缩到C点, 反应产物到F点的状态, 使得 $P_F = P_B$ , 维持扰动能以过载爆轰的形式以大于原爆轰波的速度前进。

对应的爆轰波运动见图(3)所示, 爆轰波 $\text{O}_1\text{P}_1$ 和 $\text{O}_2\text{P}_2$ 沿轴线作匀速直线运动, 波速为 $D$ , 扰动为 $\text{O}_1\text{O}_2$ 处, 它有较强的推进速度 $D_1$ , 但它的运动方向与管轴成一定角度,  $D_1$ 的轴线方向分速, 据定态要求, 应等于 $D$ , 而与轴线相垂直的方向上分速为 $D_2$ , 正由于这个速度的存在, 使扰动沿管子的园周基本上等速运动, 这种前进与旋转运动的合成便形成了所谓的



(1932)

- [ 5 ] А. И. Дремин, О.И. Розанов, ДАН СССР 139 1 (1961)
- [ 6 ] К. И. Щелкин, ЖЭТФ Т36 в.н. 2 600 (1959)
- [ 7 ] VII—th Symposium on Combustion Discussion London 876 (1959)
- [ 8 ] Glansdorff P. & Prigogine I. "The Thermodynamic theory of structure stability and fluctuations" (1971)
- [ 9 ] Prigogine I, "Introduction to thermodynamics of irreversible processes" (1967)
- [ 10 ] Jones H., Proc. Roy. Soc. 348 299 (1976)
- [ 11 ] Campbell C. & Woodhead D., J. Chem. Soc. 129, 3010 (1926)
- [ 12 ] Р.Ц. Солоухин, ДАН. СССР 127 772 (1959)
- [ 13 ] М. Е. Топгиян, ПМТФ № 4 104 (1962)
- [ 14 ] Б. В. Воцеховский, Структура фронта Демонации (1962)

## STABILITY OF CRITICAL DETONATION AND SPIN DETONATION

Sun Jin-shan

critical detonation stability for two-dimensional perturbations is discussed by means of thermodynamic theory of dissipative structures and perturbation method. Except viscosity, transport properties (such as heat conduction, diffusion, radiation etc.) are neglected. The stability criteria of detonation combustion zones is given for viscid fluids and inviscid fluids respectively.

We use Arrhenius reaction rate law and consider exothermic chemical reactions. The rate increases when the temperature raises. In the case without viscosity, when activation energy  $E$  is greater than a certain critical value  $E_c$ , the critical detonation is unstable for the two-dimensional perturbations. The amplitudes grow exponentially in the detonation reaction zone until perturbations leave the reaction zone for the region of detonation products.

When we consider viscosity effects, the variations of the perturbation amplitudes depend upon the frequencies of the perturbation. When reaction activation energy is greater than the critical value  $E_c$ , and chemical reaction energy released exceeds the critical value  $Q_c$ , the less frequency of perturbation (the longer wavelength of perturbation) is, the faster the amplitude increases. Then, the longest perturbation may cover the others. in other

---

words, only longest perturbation wavelength can remain its amplitude unchanged or growed. Finally, it will develop and form a regular spinning detonation wave. When the small influences of chemical reaction and viscosity on perturbation phase velocity are neglected, the results obtained here are in agreement with the results of acoustic theory worked by N. Monson and J. A. Fay, and may explain some experimental phenomena of spin detonation successfully.