

关于РУСАНОВ格式的特点及改进

黄 敦 李文 绚

Русанов方法是能够数值处理空气冲击波和物体相互作用的差分方法之一。这种方法应用领域广阔、简便,但仍存在一些问题需要澄清和改进。这种方法也曾用黎曼问题检验过^[4]。〔5〕文给出了另一个典型问题的准确分析解。这个问题中的冲击波以变速传播,波后流场随时间而变。如用这个问题来考察Русанов方法,可以发现某些特点,这些特点如用黎曼问题来检验是无法看出的。

本文讨论了Русанов方法的某些特点。它不能对粒子速度小的区域求出所要求准确度的密度值。根据数值分析,作者消除了这个缺陷,并用几种数值方法检验了这个改进。

一、引 言

描写气体运动的欧拉方程组有不少非线性项,再加上边界条件的多种多样就使得人们常要求助于数值解以期求得线性化方法所不能阐明的结果。处理空气激波绕射问题的很大难点,在于尽可能好地处理传播情况不详的激波、接触间断,这些间断的相互作用,稀疏波与强间断的相互作用等等。如果物体形状复杂,则要想算准就更为困难。Русанов在文献〔1〕中提出的格式能在一定程度上处理好这些难点。它的程序简单,不易出错,编写工作量小,它能适应相当广阔的空间范围,对于绕射等难题至今仍不失为较好的方法^[2,3]。

对于Русанов方法严格的非线性的数值分析至今不易做到,目前仅能用局部线性化的方法对它作稳定性分析。因此要用典型问题予以细致考察,也还应在实验应用中发现问题的,这些是对数值分析的不可缺少的补充。最近Sod在一篇总结性论文^[4]中以黎曼问题为典型问题考察了几种重要的差分方法,也包括了Русанов方法。黎曼问题有准确的分析解,是公认的检验计算方法的好课题。这个题目不具有特征长度、特征时间,因此运动有自模拟性^[7]。这是能求出准确分析解的重要原因。黎曼问题既没有特征长度,就也无从区分空间步长有多大,激波后流场中好几个量对空间变量的偏导数是零,因此也就考察不了方法的某些问题。〔5〕文讨论的问题既具有特征长度,又具有特征时间,从而激波以变速传播,波后流场变化较多。〔5〕文给出了非线性欧拉方程组很准确的分析解:在空间、时间的 $x-t$ 平面上的相当不小的范围内有三位或更多的有效数字,空间变量 x 愈小分析解还愈准。本文即以〔5〕的题目来考察Русанов方法。我们的试算所看出的某些特点(详见正文)是靠自模拟问题考察不出的。这样的典型经验可以帮助我们分析讨论怎样采用此方法计算实际科技问题。试算还看出该格式的一个弱点。针对这个弱点,我们对算法作了改进,克服了弱点。这个改动只涉及到几

条指令。试算及数值分析都说明改后差分格式仍然是稳定的。对于气体力学Русанов还提出过别的格式，本文只讨论文献〔1〕中所提出的格式。

二、问题提法和格式简介

1. 问题的提法

问题提法同〔5〕文，简述如下：按〔5〕，特征时间 t_1 选作 $\kappa \times 2.171893 \times 10^{-5}$ 秒。 κ 为任意常数，与爆炸时释放的能量成正比，实际问题中它可以是几千几万或更大的数，本文具体计算中选作1。特征长度 R_0 选成0.1 κ 米。在 $x = R_0, t = -t_1$ 发生强的平面爆炸〔7〕。曲线AO为强

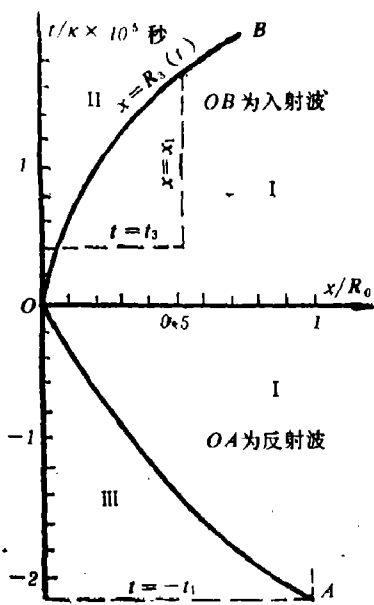


图1 $x-t$ 平面，固壁位于 $x=0$ 处

爆炸产生的激波的前沿。此激波在 $t=0$ 时遇到 $x=0$ 处的固壁而发生正反射。反射波沿曲线OB($x=R_3(t)$)向右传播。AOB之右即图中I区可用〔7〕的分析解，其较快的算式见〔5〕。〔5〕文给出了II区的高精确度的分析解。

本文选适当的时刻 $t_3 > 0$ 为初始时刻，在 $x < R_3$ 用〔5〕的解为初值，在 $R_3 < x < x_1$ 用〔7〕的解为初值。 $x=0$ 处采用固壁条件 $u=0$ （具体实现为镜面反射法）。I区既有分析解〔7〕，则为计算区规则起见可沿 $x=x_1$ ，按〔7〕给出密度 ρ 、压力 P 、质点速度 u 的已知数值作为边界条件。本文在 $0 \leq x \leq x_1, t > t_3$ 的带形区中用Русанов格式求数值解，同时在计算点上算出分析解以作对比，考察数值解的特点。再强调一下，这样可考察到数值分析所不能定量说明的问题。也看出用黎曼问题试算时遇不到的一些现象。

2. Русанов格式简介、讨论和它的一个弱点

既然所算的题目有特征时间、特征长度、特征速度和压力，就没有必要对未知量进行无量纲化。向量形式的守恒型欧拉方程组是

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

其中向量函数 F 和 G 的分量分别为 $(\rho, \rho u, \frac{\rho u^2}{2} + \frac{P}{\gamma-1})$ 及 $(\rho u, P + \rho u^2, u(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}P))$ 。

Русанов在文献〔1〕中所提出的格式简单之处在于时间导数用前差分代替，空间导数用中心差分代替。这样做，差分方程组与微分方程组是相容的。但如果不加人工粘性，差分方程组将是不稳定的。Русанов加上了特殊的人工粘性，一方面使格式稳定，一方面使得此

方法能处理激波和接触间断。这种人工粘性相当于在 (1) 式代表的三个微分方程的每个方程的右端都加上一个人工粘性项。这三项用向量形式又可写成

$$\frac{h^2}{2\Delta t_n} \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial F}{\partial x} \right) \text{ 而 } A = \omega \frac{\Delta t_n}{\Delta x} (|u| + C) \quad (2)$$

$h = \Delta x$ 为空间步长, Δt_n 为第 n 层时的时间步长 ($n = 1, 2, 3, \dots$)。 ω 与 Δt_n 的选取应保证差分格式稳定 (详后)。 Pусанов 格式的特点之一就是连续方程也加上了人工粘性。激波绕射时可能出现马赫波, 而马赫波后有接触间断 (ρ 与切向速度都有间断), 这样加粘性后此格式就避免了很费事的接触间断的处理。二维不定常问题中, 这个优点尤为显著。但是优点缺点常是一个事物的两个方面。这样地加人工粘性就可能使密度 ρ 在某些问题中的某些区域算得不够准确, 相应的温度也不够准, 详见后面的数据及图 4、6。

将 $x-t$ 平面计算区分成很多小矩形, 空间步长均匀, 每份长 Δx , 时间步长 Δt_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) 不均匀, 向量 F_j^n 的上标表示时间是第 n 层, 下标 j 表示 $x = (j-1)\Delta x$, Pусанов 格式可写成

$$F_j^{n+1} = F_j^n - \frac{\Delta t_n}{2\Delta x} (G_{j+1}^n - G_{j-1}^n) + \frac{\omega}{4} \left(-\frac{\Delta t_n}{\Delta x} \right) (\Phi_{j+\frac{1}{2}}^n - \Phi_{j-\frac{1}{2}}^n)$$

$$\Phi_{j+\frac{1}{2}}^n = [(|u| + C)_{j+1}^n + (|u| + C)_j^n] (F_{j+1}^n - F_j^n) \quad (3)$$

用富氏分析易见 (3) 的稳定性条件有两方面^[1]:

$$\Delta t_n = \frac{\sigma \Delta x}{m_j \max(|u| + C)_j} \quad (j = 1, 2, 3, \dots, j+1) \quad (4)$$

$$\sigma \leq 1, \quad \omega \sigma \leq 1 \quad (5)$$

对公式 (4)、(5) 的进一步了解, 影响到 ω 、 σ 的具体选法, 所以我们作如下剖析:

(4) 式再加上 (5) 式中的第一个条件 $\sigma \leq 1$ 和 $\omega \sigma \leq 1$, 使所有网格点的库朗数都小于 1, 为了解 (5) 式的又一个关系 $\omega \sigma \leq 1$ 可以观察差分格式的截断误差项。取时间前差分则出现以 $-\sigma^2$ 为系数的项, 它会使差分格式不稳定, 人工粘性项带来以 $+\omega\sigma$ 为系数的项, 它的作用是使格式稳定。 $\omega \sigma \leq 1$ 意味着人工粘性项引起计算不稳定的截断误差可能超过差分格式所引起的。

选 ω 为中间值即 $1/2(\sigma + 1/\sigma)$, 则 (5) 完全得到满足, ω 愈小愈好, 以免过份加大人工粘性。

$$\frac{d}{d\sigma} \frac{1}{2} (\sigma + 1/\sigma) = 0, \text{ 意味着 } \sigma = 1.$$

可见具体选 σ 时应使它近于并小于 1。

我们具体做了多批算例, 例如 $\omega = 0.9999$ 、 $\sigma = 0.998$, 则结果较好, 见图 2 (见后)。相反, 如选 $\sigma = 0.5$ 、 $\omega = 0$, 则结果就差些, 见图 3。此图是 $\omega > \sigma$ (ζ) 未得到满足的情形下在 $n = 221$ 层时的计算结果。激波后明显地跳动, 但仍能继续算下去。这两图说明人工粘性项的重要性, 及稳定性条件的重要性。

以上分析与用简化的模型方程分析截断误差的结论是一致的, 简化方程是指

$$\frac{\partial f}{\partial t} + C \frac{\partial f}{\partial x} = A \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

用Русанов格式,则它的截断误差中二阶导数 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\Delta x)^2$ 前的系数是 $\omega - \sigma$,可见 $\omega - \sigma$ 应尽可能地小, $\omega - \sigma$ 为正数是保证稳定的必要条件。

表1是 $\omega = 0$,即到处不加人工粘性时的计算结果,这是不稳定的典型例子,激波后十二个点数值解差很多,个别数据可大出 2×10^7 倍。表1对应时间 $\frac{t}{\kappa} = 0.687 \times 10^{-6}$,时间已算了64层,空间步长取 $\frac{\Delta x}{\kappa} = 0.502 \times 10^{-4}$,这是很小的步长。

表1 参数选得使格式不稳定的算例

j	$\frac{1}{\kappa} x = (j-1) \Delta x \frac{1}{\kappa}$	u (准确的分析解)	u (错误的数值解)
9	0.0004518	0.795×10^2	0.387×10^3
10	0.0005020	0.884×10^2	-0.250×10^3
11	0.0005522	0.972×10^2	-0.432×10^3
12	0.0006024	0.106×10^3	-0.138×10^6
13	0.0006526	0.115×10^3	-0.284×10^6
14	0.0007028	0.124×10^3	$+0.298 \times 10^{10}$
15	0.0007530	0.133×10^3	$+0.318 \times 10^6$
16	0.0008032	0.141×10^3	$+0.173 \times 10^5$
17	0.0008534	0.150×10^3	$+0.641 \times 10^3$
18	0.0009036	0.159×10^3	-0.171×10^4
19	0.0009538	0.168×10^3	-0.247×10^4
20	0.0010040	0.177×10^3	-0.213×10^4

本文讨论的Русанов格式是一阶格式,它的截断误差是 $O(\Delta t)$ 。当格式稳定时数值解能保持“单调性”,激波附近没有二阶、三阶格式那种类型的摆动,文后所附的图2、图6——11中都可看到这一点。

Русанов格式适用于双曲型非线性守恒定律能反映的多种多样的激波、接触间断及它们的相互作用,格式很简单而又不受这些复杂问题困扰,很重要的因素是所有计算网格都加人工粘性项。这样做能处理复杂的间断,这是优点。另一方面这样做不可避免引起误差。图4、6都说明在质点速度近于零的区域(本题是在固壁 $x = 0$ 附近出现)密度 ρ 有明显误差,较 ρ 、 u 的误差为大。这是个弱点。下节将介绍我们怎样克服这个弱点。

三、对人工粘性项采用方式的改进及相应的差分格式稳定性分析

上节所述弱点的原因从力学角度说是由于固壁处 $u = 0$,而激波($x = R_s$)则会带动 $x < R_s$,

处的气流向右走。反映到微分方程中表现为 u 与 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 在 x 小的区域比 x 近于 R_s 的区域要小很多。原来的Pусанов格式中每个网格都加人工粘性, 因此当

$$\frac{u^2}{\gamma \frac{P}{\rho}} < \frac{1}{B}, \quad \frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{\sqrt{\frac{P}{\rho}} \frac{1}{t_1}} < \sqrt{\frac{1}{B}} \quad (6)$$

其中 B 为一个常数, 我们具体采用10左右, 则人工粘性就显得多余了。我们的改法是满足(6)的区域不加人工粘性。多批试算(见5至11图)表明这样一改, 上节所述弱点得到克服, 并且差分格式仍然是稳定的。

下面的推导, 一方面从理论上说明改动的合理性, 另一方面说明别的题目中只要(6)成立也可以这样改。

根据(6)对(3)作局部线性化。将 P 与 ρ 的基本量记作 P_0, ρ_0 。 u 的基本量是零。扰动量带撇:

$$u_j^{n+1} = u_j^n = 0 + u_j', \quad P_j^n = P_0 + P_j', \quad \rho_j^n = \rho_0 + \rho_j' \quad (7)$$

其中 u', P', ρ' 都是小量, 就是说

$$u' \ll \sqrt{P_0/\rho_0}, \quad P' \ll P_0, \quad \rho' \ll \rho_0 \quad (8)$$

为书写方便, 下面式子中 u', P', ρ' 的撇都略去。

考虑到(7), (8)并且扔去人工粘性项, 差分格式(3)可局部线性化成为

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \rho_0 (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (9)$$

$$P_{j+1}^n - P_{j-1}^n = 0 \quad (10)$$

$$P_j^{n+1} = P_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \gamma P_0 (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (11)$$

值得注意的是(10)式, 这是激波正面打在固壁上反射后固壁附近总出现的特点, (5)表明如此, 本文有关压力随 x 分布的图亦可看出这一特点。上面的推导说明(10)恰好可从(6)得出。

对(9)、(10)、(11)作富氏分析, 令

$$\rho_j^n = \rho g^n e^{ij\varphi}, \quad u_j^n = u e^{ij\varphi}, \quad P_j^n = P g^n e^{ij\varphi} \quad (12)$$

u_j^n 不带 g^n 的因子, 是反映 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 小。(12)代入(9)到(11)后可得 ρ, u, P 不全为零的条件, 即行列式

$$\begin{vmatrix} (g-1) & i \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & i \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\varphi \\ 0 & i \frac{\Delta t}{\Delta x} \gamma \frac{P_0}{\rho_0} \sin\varphi & (g-1) \end{vmatrix} = 0$$

可见 $g=1$ 。按说(9)到(11)应使 g 不只有一个值,但鉴于(10)。(6)成立才有(10)。 g 的方程退化一次方程只有一个根即1。这意味着差分格式是稳定的。总之PycaHOB格式可以改进,在(6)得到满足的区域可以取消人工粘性项,这样一改,密度、温度可算得更准,而格式仍稳定。(6)式在本文算的题目中发生于固壁附近。从以上推导可见,别的题目中只要(6)的两个条件都满足,亦可取消人工粘性。

值得提出作为对比的是,在用FLIC方法作本文同一问题时,却应该在小速度区额外添加人工粘性项,才能使数值解更准。详见(8)文。

四、空间步长大小对于数值解精度的影响

每算一个实际问题都要确定空间步长 Δx 的大小。这是重要的问题,选大了省时间,但数据不够准,选得太小,则过份费机时及经费,甚至机器存储量不够。二维不定常问题的计算这件事尤为重要。我们用一维的典型问题成百倍地改变 Δx 以说明PycaHOB方法中 Δx 与计算误差之间的定量关系。 u 、 P 、 ρ 的误差还各不相同。

题目没有自模拟性,因此数据是大量的。我们主要只叙述三类数据。一方面是比较容易算得较准的固壁上的压力,它给出爆炸对固壁的作用力。其次我们介绍 u 与 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 都小的区域内 ρ 的计算,这是与上一节相呼应的。另外就是叙述不同时刻不同步长下 $u(x)$ 的计算数据。从所附各图可以看出:最易根据 $u(x)$ 判别激波大致在哪里,从 $P(x)$ 及 $\rho(x)$ 甚难判别激波在哪里。各个表与图的空间步长及主要用意由下表说明。

$\Delta x/R_0$	$R_0/\Delta x$	图 号	表号	图与表的用意
0.000602	1992	2	二	小步长,处处都加粘性
0.00533	188	4, 5	三	不同的人工粘性的比较
0.0059	169	6, 7, 8		中等的空间步长
0.0126	80	9	四	分析激波附近结果
0.06	20	10, 11	五	Δx 较大的情形

图2说明小 Δx 情形下数值解已经很准,即使如此速度剖面在激波处峰值仍偏小3.6%。表二为同一小步长及初值下的数据,仅时间略晚。它说明固壁附近密度的误差已可观,这启示我们作了上节的改进与数值分析。并且从图5到11全用改进了的方式加人工粘性。

表2 小 Δx 时固壁上数据 $t/\kappa=0.3817 \times 10^{-5}$, $n=229$

分析解	$P(0,t)=351.79 \times 10^5$ 牛顿/米 ²	$\rho(0,t)=14.929$ 公斤/米 ³
数值解	$P(0,t)=351.70 \times 10^5$ 牛顿/米 ²	$\rho(0,t)=14.246$ 公斤/米 ³
相对差别	0.026%	4.8%

人工粘性采用方式改进后与未改进的对比以图4、5、6及表三予以说明。表三最后一列最能说明改进后数据更为准确,而且差分格式是稳定的。

表3 空间步长放大, $\frac{\Delta x}{R_0} = 0.00533$, 不同人工粘性的对比

时间走的步数n		3	40	60	80	40到80
$10^5 t/\kappa$ 秒		0.53184	0.85592	1.02802	1.19283	数值解与分析解的 差别范围
$\rho(0, t)$	分析解	12.667	9.2731	8.1194	7.2218	—
	各网格都加粘性	12.291	8.5488	7.3504	6.5265	7.8% 9.5% 9.7%
	改进了人工粘性	12.577	9.403	8.209	7.386	1.4% 1.1% 2.2%
$P(0, t)$	分析解	276.31	180.37	149.65	126.91	相对差别都不显著
	各网格都加粘性	276.32	180.65	148.82	127.54	
	改进了人工粘性	276.25	181.14	148.69	127.47	
u_{\max} 的相对误差		17%	17%	14%	13%	

表三的第五行最右一列及最下面一行说明一旦人工粘性采用方式如上节所述改进后, 满足(6)的区域有明显的改进。但是表三的空间步长并不大, 但激波附近 u 的峰值已削去百分之十几。在使用人工粘性法算实际问题的时候很应该注意到这个特点。图7也表明 $u(x)$ 的抹光程度。

表4 $\Delta x/R_0 = 0.0125$ 情形下的相对误差

n	0	10	20	30	60	70	90
$\frac{t}{\kappa} \times 10^5$ 秒	0.2	0.333	0.463	0.590	0.958	1.076	1.307
$\rho(0, t)$ 的误差	0	1.65%	3.35%	6.3%	14.1%	15.7%	18.2%
$P(0, t)$ 的误差	0	1.2%	0.93%	1.2%	8.2%	9.6%	11.5%
u_{\max} 的误差	0	40%	40%	37%	27%	26%	—

有些问题限于机器容量或经费, 不得已要采用比上例更大的空间步长。表五及图10、11与表二及图2、3相比 Δx 大了近百倍。

图10、11说明数据的趋势基本正确, 但表五说明误差相当可观。这是粗步长的典型定量结果。在有自模拟性的问题中看不出 Δx 与误差的关系。本文的分析解基准, 因而可定量地看出这个关系。它相当复杂。综合各种不同步长下的结果可以看出: 如果有的区域 u 及 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 都小, 则 ρ 不易用原来的Пусанов格式算得较准, 这种区域不加人工粘性, 则精度可提高, 且格式稳定; 又可以看出用此格式 P 最容易算好, ρ 与 u 的精度比 P 差些; 还可以看出激波附近格式是“单调的”, 没有摆动现象(除非图3那种稳定性条件未能满足的情形才出现不应

表5 很粗的空间网格的例子, $\frac{R_0}{\Delta x} = 20$

$\frac{t}{\kappa} \times 10^6$	0.58	0.6536	0.7266	0.8708	1.083	1.289	1.357
n	0	1	2	4	7	10	11
$\rho_{x=0}$ 的相对误差	0	1.7%	3.7%	8.2%	15%	22%	24%
$p_{x=0}$ 的相对误差	0	-1%	-1%	-0.5%	3.5%	7.9%	10%
u_{\max} 的相对误差	0	24%	27%	32%	35%	—	—

有的摆动)；此外，既然程序简单，不写激波关系式，也不必特别跟踪激波，但代价是精度稍差。要想使激波附近算得较准，不是不可以做到的，代价是 $R_0/\Delta x$ 要大，即 Δx 要小，这样做比较费存储量及机时。在一维不定常问题中这还是容易实行的。最后值得指出：从 $R_0/\Delta x$ 为20变到80，步长缩小四倍，但精度提高并不显著，只是到170—190才有明显的提高。

五、关于激波过渡层

用了人工粘性以后激波就抹光了，变成一个占若干空间网格的过渡区。本文的典型例子在激波后 u 随 x 变，这比 u 不随 x 变的那类题目要复杂，在爆炸波传播的问题中常常遇到这种情形，尤其因为有特征长度，运动常常没有自模拟性。自从Von Neumann在1950年开始用人工粘性简化激波的处理以来^[9]，大多致情形下为考验计算方法，就试算传播速度不变的激波。通常讨论激波过渡层占多少网格都是在这类典型问题下得到一些知识。本文则有特征长度，激波以变速传播，波后 P, ρ, u 都立即随 x 变，且没有自模拟性。经常发生两个问题，至今未能圆满解决：(1) 怎样根据数值解的数据较好地，而不是错误地定出激波位置。最近，研究激波很久且很有经验的Glass在[6]文中提到这里有人为因素，有人还定得不对；(2) 到底用了人工粘性后激波上的 P, ρ, u 有多大精确度。

关于第(2)个问题，上节的表及文后附图提供了典型例子。如步长 Δx 是够小，则精度可提高，否则误差就会如上节所述。值得补充的是 $R_3(t)$ 的位置在 $x-t$ 平面上与分析解比大致只是向右平移了一下，在本文的例子中 $\frac{dR_3}{dt}$ 倒还比别的量准一些。至于怎样定 $R_3(t)$ 则就是上述的第(1)个问题。在本文的典型情况下，有下列现象：

1) 不像定常激波那样^[9]，分析解的较准的激波并不恰好位于人工粘性项数值最大的地方。

2) 过渡层的宽度较定常激波的情形更难判断。在定常激波的情形，向左或向右离远一些就有准确值，按惯例将物理量的变化每边扣去5%左右，就可定出过渡层所占网格数。本文的情况已根据 $u(x)$ 来判断最不具有人为性，即激波以左可以找到 u_{\max} ，以右可以找到 u_{\min} 。这两点之间可称为剧烈变化区，如果每边再扣去例如8%，则得“过渡层”（见图9）。在该图中这样确定，则过渡层占4格。用 $P(x), \rho(x)$ 则较难说过渡层有多宽。用这种标准来定激波

层宽度, 与定常激波的情况相比, 是比较苛刻的, 就是说网格数定得多一些。但到时间层数超过一定数值后, 网格数就不再随n增加。

3) 与分析解的结果比较可以看出: 由于粘性的作用是扩散, 它使激波的压缩效应向前扩散, 快于真正激波的效应。较准的激波位置并不发生在 u_{max} 与 u_{min} 的中间, 也不发生于 $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ 最大的地方。后几个值相差不多, 只差半个或一个网格, 但都较准确位置超前一、二个网格左右(图9)。

在我们最初编程、查程序过程中, 柳玉芝同志曾热心地给予帮助, 谨致谢意。

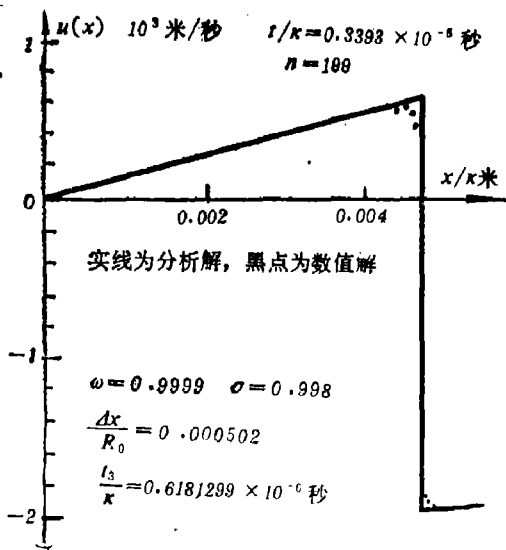


图2 步长小, ω 、 σ 合适, 数值解与分析解很接近

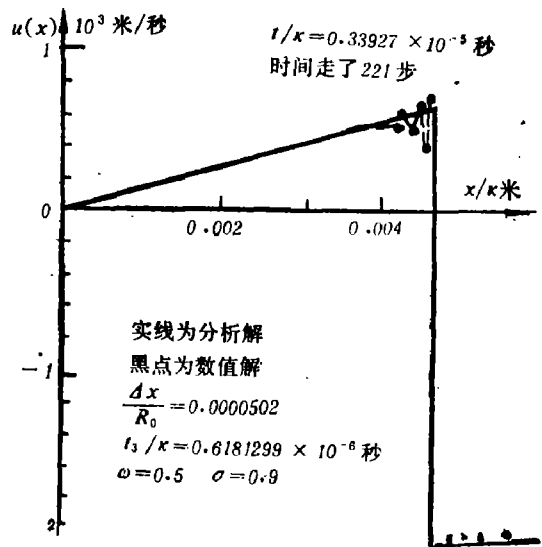


图3

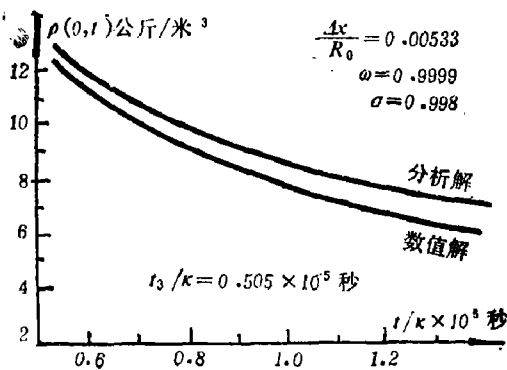


图4 处处加入人工粘性, 因壁面密度不够准

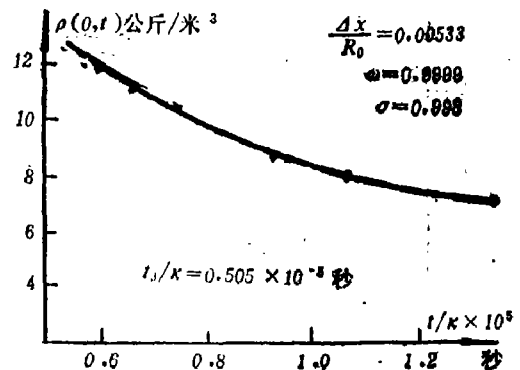


图5 $\frac{u^2}{\alpha^2} < \frac{1}{10}$ 且 $\frac{\partial u}{\partial t} < \sqrt{\frac{P}{10\rho}} \frac{1}{t_1}$ 的区域不加

人工粘性。改进后数值解与分析解重合较好

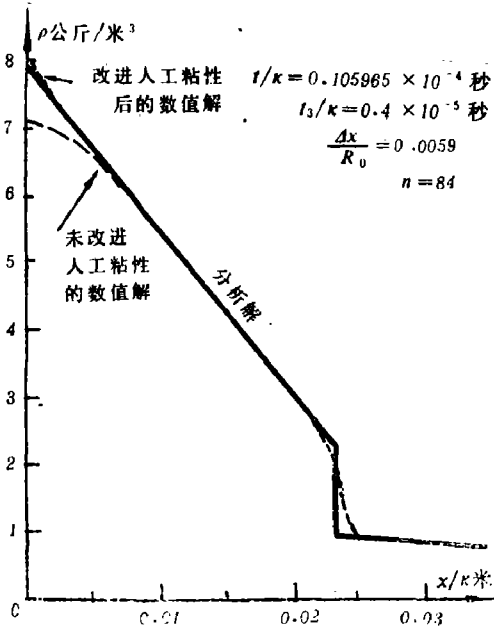


图 6 加入人工粘性的方法改进前与改进后的数值解与分析解的比较

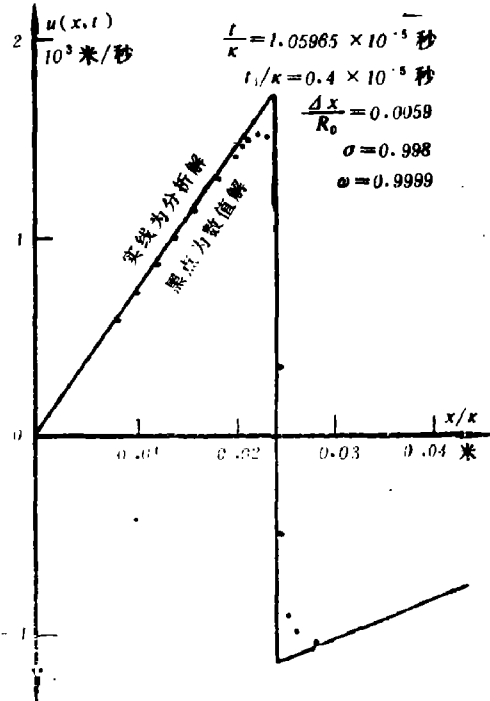


图 7 $t/\kappa = 1.05965 \times 10^{-5}$ 秒时刻的速度分布

图 8 $\frac{t}{\kappa} = 1.05965 \times 10^{-5}$ 秒时刻的压力分布

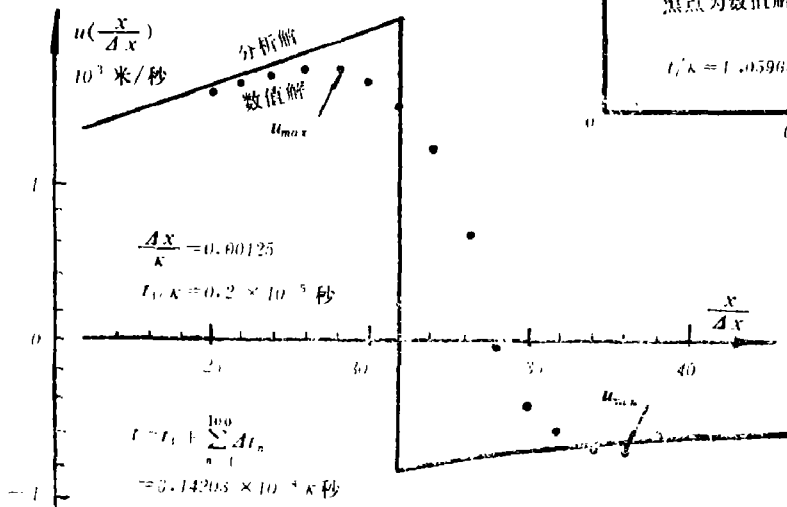
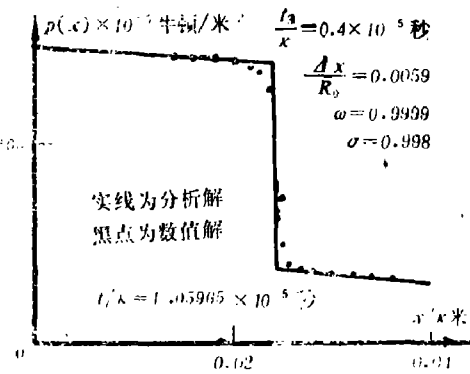


图 9 u_{max} 与 u_{min} 都扣除 8%，则过渡区就从 9 格减少到 4 格

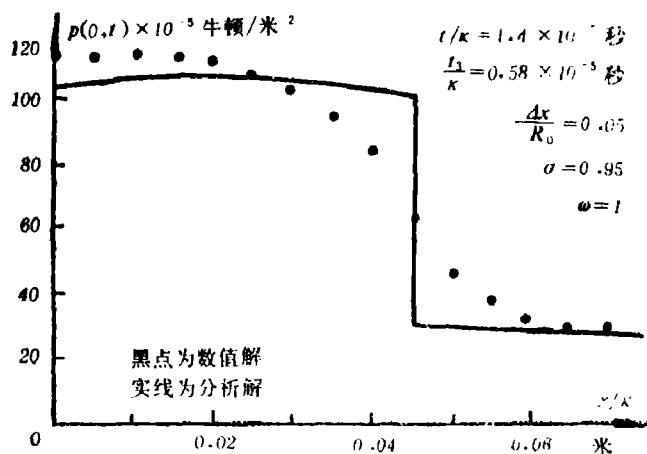


图10 $u^2/a^2 < 1/10$ 且 $\partial u/\partial t < \sqrt{P/10\rho(1/t_1)}$ 的区域不加人工粘性

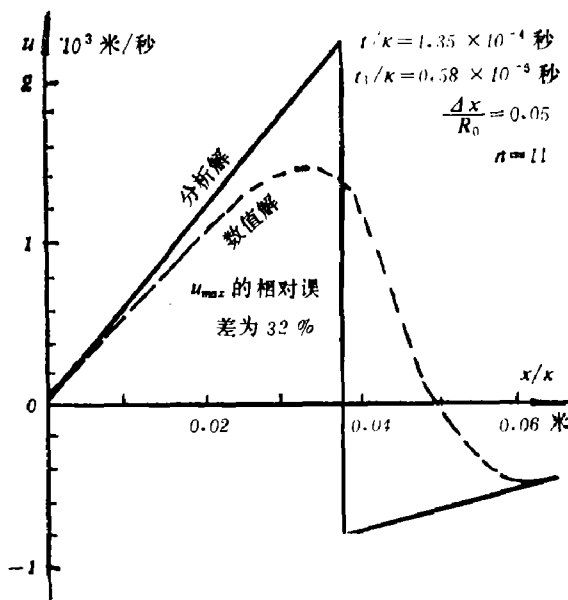


图11 $u^2/a^2 < 1/10$ 且 $\partial u/\partial t < \sqrt{P/10\rho(1/t_1)}$, 则不加粘性较粗网格下的一个速度剖面

参 考 文 献

- (1) Русанов, В. В., "Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями" *ЖВММФ*, 1 (1981), 1020 - 1050.
- (2) 李文勋等, "关于 Русанов 格式计算二维不定常空气动力学问题(一)", *高校计算数学学报*, 第一期(1980), 44-53.
- (3) 李文勋等, "关于 Русанов 格式计算二维不定常空气动力学问题(二)", *高校计算数学学报*, 第二期(1980), 44-53.
- (4) Sod, G., "Several Finite Difference Methods for system of Nonlinear Hyperbolic conservation Laws" *J. Comp. Phys.*, 27 (1978) 1-31.
- (5) 黄敦, "气体力学方程组的一套高精度分解", 1979年全国计算数学年会报告, *爆炸与冲击*, 第一期(1981).
- (6) Glass, I. I., Abstracts of 15th International Conference on Theoretical and Applied Mechanics, Aug. 1980 Toronto, 191.
- (7) Седов, Н. Н., *Методы подобия и размерности в механике*, 4 томе изд Москва 1957.
- (8) 李荫凡, "FLIC"方法的稳定性研究, *计算数学*, 第三期(1980), 278-281.
- (9) Von Neumann, J., and Richtmyer, R. D., "A method for the numerical calculation of hydrodynamical shocks" *J. Appl. Phys.*, 21 (1950), 232.

ON SOME FEATURES OF RUSANOV SCHEME AND AN IMPROVEMENT

Huang Dun Li Wenxuan

Abstract

Rusanov scheme^[1] is one of many difference schemes capable of treating numerically the interaction of shock wave in air with obstacles. It is simple and widely applicable. But there remain some problems to be explained and improved. This method was tested by Riemann problem in (4). In Ref. (5), a typical problem is solved analytically with high accuracy. In this problem the shock wave propagates with variable speed, and thus the pressure p , particle velocity u and density ρ immediately behind the shock wave vary with time. The test of Rusanov scheme by this typical problem can explore some aspects—the accuracy for region of small particle velocity, the influence of spatial mesh spacing on the accuracy of numerical solution, the behavior of smeared shock wave of varying strength, which Riemann problem can not.

Some features of this scheme are discussed. This scheme is unable to evaluate ρ with desired accuracy for region of small particle velocity. In this paper this weakness is eliminated on the basis of numerical analysis. This improvement is checked by many numerical tests and consists in only a few statements in the whole program.