瞬时加热热点的近似临界理论

章　冠　人

（1982年4月5日收到）

文中给出了瞬时加热热点的近似解析理论　临界起爆参量δ_c的公式如下：

$$\ln\theta_0=\frac{\delta_c}{4}-\frac{n+1}{2}\ln\delta_c-\ln\frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

式中$\theta_0=E(T_0-T_1)/(RT_0^2)$，$E$是活化能，$R$是气体常数，$T_0$是热点的初始温度，$T_1$是周围的温度，对于板$n=0$，对圆柱体$n=1$，对于球$n=2$　除掉公式右边的常数外，其余均和P. H. Thomas所给出的完全相似

在加热时间，热点的能量平衡方程式可以推得δ_c的另外一个表示式，它和M. H. Friedman所给出的相似　如代入平面冲击波输出的能量，可以推得起爆不均匀炸药的临界条件$D^n t=$常数　所以作者认为不论炸药是否均匀，均是热起爆机制

一、引　　言

许多文章[1-14]已经叙述了迅速将"热点"加热到某一温度的临界理论　临界问题在于寻求在什么样的条件下，热点的初始温度可以导致温度快速升高或者如条件不够，则温度就下降

实际上，除掉考虑热点的温度和其它几个量之外，常常要求起爆的最低能量和时间

最近，P. H. Thomas[15]给出了单个板状和球状热点的临界近似解析理论　这个理论表明和Merzhanov等[1]的计算相差10%的精度　本文的目的，由这个理论的推动，试图建立一种物理意义比较清晰的临界条件以确定起爆的最小能量和时间

二、普 遍 理 论

和大多数处理这个问题的方法一样，用热平衡方程式来表示：

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=K\nabla^2 T+qf\exp\left(-\frac{E}{RT}\right)+Q\delta(t)\delta(x) \qquad (1)$$

式中c、ρ和K是无限介质的比热、密度和热传导系数（均假定是常数），R是气体常数，T为温度

t时间，q单位体积的反应热，E活化能，f指数前系数假定是常数，这表示忽略反应部分　Q是在时间$t=0$，$x=0$处加入的热量　这里$\delta(t)$和$\delta(x)$是通常的狄拉克δ函数　方程式（1）的初始条件为：

$$t=0,\qquad T=T_0,\qquad x<r_0 \qquad (2)$$

$$T=T_1,\qquad x>r_0$$

$T_0 > T_1$、r_0是热点的半径。

方程式（1）用下列变量无量纲化后变为：

$$\theta = \frac{E}{RT_0^2}(T - T_0)\ ,\qquad \lambda = \frac{Kt}{\rho c r_0^2} = \frac{a^2 t}{r_0^2} \tag{2}$$

$$\delta = -\frac{Qf\,Ea^2 exp(-E/RT_0)}{KRT_0^2},\qquad \xi = \frac{X}{r_0}$$

对Arrhenius 项应用Frank-Kamenetskii 近似[16]

$$exp(-E/RT) \approx exp(-E/RT_0)\cdot exp(\theta)$$

这样转变之后，方程式变化为：

$$\frac{\partial\theta}{\partial\lambda} = \delta exp(\theta) + V^2\theta \tag{3}$$

方程式（1）中右边第三项已经化为初始条件，所以在这个式子中只保留了二项，V^2现在是对无量纲长度x/r_0微分。

现在问题转变为求临界值$\delta_c(\zeta, t, \theta_0)$。当$\delta > \delta_c$，热点温度会迅速上升；反之温度会不断下降。显然$\delta_c$决定于$\theta_0$，$\zeta$和$\tau$。为了要消去$\zeta$和$\tau$，第一步我们必须确定在什么$\zeta$和$\tau$处，去求出$\delta_c$。换言之，在什么地方和什么时间去建立临界条件。$E.\ K.\ R$ideal和A. J. Robertson[3]在任意时间t建立热点产生的热和从其表面传导出去的热的平衡关系。J. Zinn[6]定义一个时间t，即由热传导所导致的冷却起作用的时刻。他把t_c和感应时间相等，即得到了δ_c。P. H. Thomas[15]应用近似的临界时间$\lambda \approx 1/\delta_c$。这些方法的主要差别为在不同的时间建立临界条件。下面，我们可以看到不同的时间将给出不同的答案。根本上，临界条件应该自然而然地建立起来，就是在临界点或者拐点。所以我们必须寻找临界点。

根据δ_c的定义，在临界点，即当$\delta = \delta_c$，在点$\xi = \xi_c$，$\lambda = \lambda_c$，在热点内释放的热量恰恰和从它表面传走的热量相等。在这个条件下。温度增加的速度必须等于零。因此

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\right|_{\substack{\lambda=\lambda_c\\ \xi=\xi_c=\xi_0}} = 0 \tag{4}$$

在最初，从热点表面传失的热量可以忽略，因为温度梯度不大的缘故。当时间达到临界值λ_c时，由热传导所致的冷却变得重要了。因此，在临界时间以前，我们可以忽略方程式（3）右边的第二项，即得

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \delta_c\ exp(\theta) \tag{5}$$

将方程式（5）对时间λ积分，得

$$\int_0^{\theta_c} exp(-\theta)\,d\theta = \delta_c \int_0^{\lambda_c} d\lambda \tag{6}$$

方程式（6）左边可以近似为

$$\int_0^{\theta_c} exp(-\theta)d\theta \approx \int_0^{\infty} exp(-\theta)d\theta = 1 \qquad (7)$$

这是因为当温度达临界温度时，温度能在短时间内突然跳跃到无穷大。将式（7）代入式(6)得

$$\lambda_c \approx \frac{1}{\delta_c} \qquad (8)$$

将方程式（3）对 λ 微分，得

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\lambda^2} = \delta_c\, exp\theta \frac{\partial\theta}{\partial\lambda} + \frac{\partial}{\partial\lambda}(V^2\theta) \qquad (9)$$

由方程式（4），在临界点和以前，热点的温度改变不大，可以将 θ 近似取为零，将方程式（4）代入式（3），并将 $\theta\approx 0$，得

$$V^2 0 \approx -\delta_c \qquad (10)$$

把式（10）和式（4）代入式（9），得

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\lambda^2} = 0 \qquad (11)$$

因此我们证明了临界点是一个拐点。

实际上，Frank-Kamenetskii[16] 的热炸爆理论隐含着在任意时间内满足方程式（4）和方程式（11）的条件，而 P. H. Thomas[15] 仅在临界时间推导求得。这里我们给出了关于热点临界性质的一个普遍近似性质。

三、δ_c 表示式的推导

让我们应用上节所述的内容来推导 δ_c 的表示式。将方程式（3）对热点的体积积分并应用方程式（4），得

$$\int_V \delta_c\ exp\theta\ d\theta = -\int_V V^2\ \theta d\theta = -\int_S V\theta \cdot ds \qquad (12)$$

式中 s 是热点的面积，在方程式（12）的左边，我们可以近似用热点中心的峰值温度代入，即令 $\theta=0$，得

$$\delta_c \frac{2^n}{n+1}\pi n \xi^{n+1}\Big|_{\xi=1} = -2^n\pi\xi^n \frac{\partial\theta}{\partial\xi}\Big|_{\substack{\xi=1\\ \lambda=\lambda_c}} \qquad (13)$$

经化简后

$$\delta_c = -(n+1)\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\Big|_{\substack{\xi=1\\ \lambda=\lambda_c=1/\delta_c}} \qquad (14)$$

式中　$n=0$，　板；　$n=1$，园柱；　$n=2$，球。

方程式（14）中的温度可以用各种不同的表示式。在瞬时加热的情形。忽略化学反应的热量。温度可表示为[17]：

$$T=\frac{Q}{2^{n+1}ak(\pi t)^{(n+1)/2}}exp(-\frac{x^2}{4a^2t})+T_I \tag{15}$$

式中 $a^2=K/(\rho c)$

如假定在$t=t_0$，$r=0$处、温度等于T_0，t_0是一极短时间、可以当作加热时间。则得

$$T_0=\frac{Q}{2^{n+1}ak(\pi t_0)^{(n+1)/2}}+T_I \tag{16}$$

把方程式（16）代入（15）得

$$T=(T_0-T_I)(\frac{t_0}{t})^{(n+1)/2}exp(-\frac{x^2}{4a^2t})+T_I \tag{17}$$

或者用式（2）代替，则式（17）变为

$$\theta=\theta_0(\frac{1}{4})^{(n+1)/2}exp(-\frac{\xi^2}{4\lambda}) \tag{18}$$

把式（18）代入式（14），得

$$\delta_c=\frac{n+1}{2}(1/2)^{n+1}\theta_0\delta_c^{(n+1)/2}exp(-\frac{\delta_c}{2}) \tag{19}$$

简化后，式（19）变为

$$ln\ \theta_0=\frac{\delta_c}{4}-\frac{n+1}{2}ln\ \delta_c-ln\frac{n+1}{2}(1/2)^{n+1} \tag{20}$$

对于板（$n=0$）

$$ln\ \theta_0=\frac{\delta_c}{4}-\frac{1}{2}ln\ \delta_c+ln\ 4 \tag{20'}$$

对于园柱（$n=1$）

$$ln\ \theta_0=\frac{\delta_c}{4}-ln\ \delta_c+ln\ 4 \tag{20''}$$

对于球（$n=2$）

$$ln\ \theta_0=\frac{\delta_c}{4}-\frac{3}{2}ln\ \delta_c-ln\ -\frac{3}{16} \tag{20'''}$$

除方程式（20'）—（20''）右边第三项以外，其余各项均和P. H. Thomas[15]所给的一致。它们的曲线以及和A. G. Merzhanov[1]的结果的比较如图1所示。

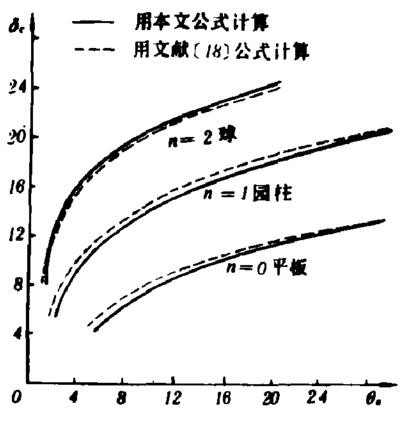

图1 δ_c和θ_0的关系

四、δ_c表示式其它近似方法的推导

如果定义$r_0^2/(4a^2t_0)=1$作为热点的半径，在

$r=r_0$，$t=t_0$ 处建立平衡方程式（13），我们可以得到另一 δ_c 的近似公式。把方程式（18）代入方程式（13），在 $\xi^2/4\lambda_0=1$。$\lambda=\lambda_0$（$\lambda_0=Kt_0/\rho_c r_0^2=1/4$），$\delta_c$ 变为

$$\delta_c=2(n+1)e^{-1}\theta_0 \tag{21}$$

这个结果和 M. H. Friedman[18] 求得的，除 θ_0 的系数不同外，其余均相似，为了比较，列表如下：

作者方法		Friedman	章
参考文献		18	
函数形式		$b_n\ \theta_0$	$2(n+1)\theta_0/e$
n 值	$n=0$	$b_0=1.0$	0.735
n 值	$n=1$	$b_1=2.6$	1.472
	$n=2$	$b_2=4.7$	2.207

方程式（21）可以写成

$$\delta_c=2(n+1)\frac{E(T_0-T_1)}{eRT_0^2}e^{-1} \tag{22}$$

式中 θ_0 是用式（16）代入了。在平面情形，忽略初始温度 T_1 可得

$$\delta_c=2E/(eRT_0) \tag{23}$$

用方程式（16）代入，得

$$\delta_c=4EaKt_0^{1/2}/(eRQ) \tag{24}$$

式中 Q 应理解为在时间 t_0 内输入的能量。

五、不均匀炸药的冲击起爆判据

对冲击波起爆均匀炸药的机制，一般公认为热起爆[21]。对非均匀炸药的冲击起爆，则其说不一；但根本的一点是普遍接受的，就是冲击波直接不均匀地加热炸药，使炸药分解是引起反应的原因[22]。所以对均匀和非均匀炸药之间的差别，在于前者是均匀加热而后者是不均匀加热。但无论如何，它们加热的初始能量均来自冲击波本身。我们知道当冲击波进入炸药时，一部分能量变为冷能，只有一部分变为热能。我们认为只有热能可以对不均匀炸药的起爆有贡献，如把这部分热能作为瞬时输入的 Q，那末我们来看看需要什么样的冲击波方能引爆。

根据能量守恒关系和格临爱森方程可以导出冲击波后的温度[23]，几种炸药冲击波后温度和冲击压力的关系如图二所示。它们在这些压力范围内，可以认为是强冲击波，所以是一条直线。如炸药的初始温度为 T_1，压力为零，则

 1982年

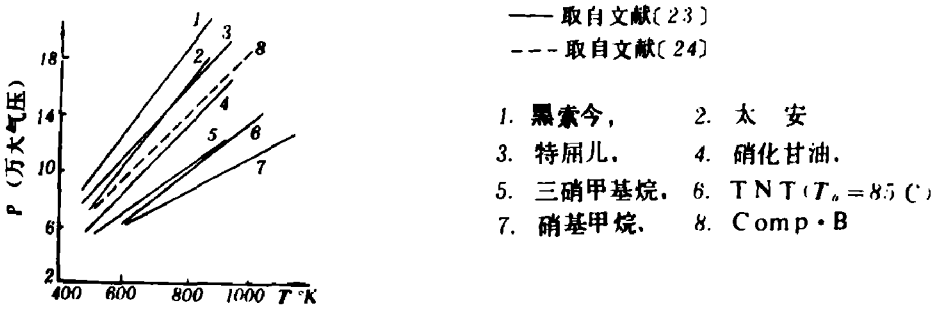

图2 冲击压力和温度的关系

$$T-T_i=\beta p \tag{25}$$

式中β对一种炸药是一个常数。所以冲击波后进入炸药内的热能为:

$$Q=C_v(T-T_i)t_0D=\beta C_v p t_0 D \tag{26}$$

式中t_0为飞板中冲击波来回传播时间，D为炸药中冲击波速度。如以此Q作为输入炸药的热能代入式(24)，则立刻可得

$$\delta_c=4EaKt_0^{1/2}/(eR\beta C_v p t_0 D) \tag{27}$$

因为只有p、D、t_0为变量，所以炸药起爆的临界条件为

$$p^2D^2t_0=\text{常数} \tag{28}$$

通过大量对各种炸药的计算，在一定压力范围内，当p变化达5—6倍时，D的变化不到20%。这对PBX—9404，Comp B等均是这样，所以一般认为当p稍有变化时，D可以认为是常值。这样就得著名的不均匀炸药的起爆判据:

$$p^2t_0=\text{常数} \tag{29}$$

如把D凑成p的幂函数，则对一般高能混合炸药，p的指数约为0.15左右，所以高能混合炸药的起爆判据变为:

$$p^nt_0=\text{常数} \tag{30}$$

式中的$n>2.3$。这和R. Frey等[26]的实验结果$n=2.6\sim2.8$的数据是接近的。

上面我们只是应用热传导方程(1)导出来的。众所周知，用热传导方程解释均匀炸药起爆十分成功[20,21]，而这里又说明了也可用来解释不均匀炸药的起爆，这些均说明了热起爆理论的正确性，而不论各种热源如何。

参　考　文　献

[1] Merzhanov, A. G., Barzykin, V. V. et al., *Dokl. Acad. Nauk. SSSR* **148**,380 (1963).
[2] Merzhanov, A. G. *Combustion and Flame* .**10**.340 (1966).
[3] Rideal, E. K., and Robertson, A. J. B., *Proc. Roy. Soc.* (London), A **195**.135 (1948).
[4] Bowden, F. P., Yoffe, A. D., "*Initiation and Growth of Explosion in Liquids and Solids*", Cambridge Univ. Press, Cambridge (1952).
[5] Bowden, F. P., and Yoffe, A. D., *Fast Reactions in Solids*. Butterworth, London (1958).
[6] Zinn, J., *J. Chem. Phys.* **36**.1949 (1962).
[7] Boddington, T., Ninth Symp. (Inte.) Combustion, Academic Press, New York, 287 (1963).
[8] Friedman, M. H., *Trans. Faraday Soc.* **59**.1865 (1963).
[9] Thomas, P. H., *Combustion and Flame* **9**.369 (1965).
[10] Barzykin, V. V., Gonitkoaskaya, V. T., et al., *Zh. Prik. Mekh. i. Tekh. Fiz.* **3**.118 (1964).
[11] Friedman, M. H., *Combustion and Flame* .**11**.329 (1967).
[12] Friedman, M. H., *Combustion and Flame* .**12**.281 (1968).
[13] Gray, P. and Lee, P. R., *Oxidation and Combustion Review*. Vol. **2**. American Elsevier, New York (1967).
[14] Merzhanov, A. G., and Averson, A. E., *Combustion and Flame*. **16**.89 (1971).
[15] Thomas, P. H., *Combustion and Flame* .**21**.99 (1973).
[16] Frank-kamenetskii, D. A., *Zh. Fiz. Khim.* **13**.738 (1939).
[17] Zeldovich, Ya. B., Raizer, Yu. P., "Physics of Shock Waves and High Temperature Hydrodynamic Phenomena", Vol. I and Vol. 2. Edited by W. D. Hayes and P. F. Probstein Academic Press, New York-London (1966).
[18] Friedman, M. H., Ninth Symp. Combustion, pp. 294-302, Academic Press, New york, (1963)
[19] Walker, F. E. and Wasley, R. J., "Critical Energy Shock Initiation of Heterogeneous Explosives", *Explosive-Stoffe* (1968).
[20] Campell, A. W., Davis, W. G. et al., *Phys. of Fluids*. **4**.498 (1961).
[21] Maber, G. L., LA.S.L. Report, *LA*-2703 (1962).
[22] Dremin, A. N. Shvedov, K. K. 6th Symp. Detonation, P. 29 (1976).
[23] Воскобойников. И. М., Богомолов. В. М., Апин. А. Я., *ФГВ*. **4**. 44 (1968).
[24] 苏林祥・华 祝・孙义亭，"均匀凝聚炸药冲击起爆的数值计算"，私人通信(1980).
[25] Frey, R. and Howe, P. Proc. 6th Symp. Detonation, P. 325 (1976).

AN APPROXIMATE THEORY OF CRITICALITY OF "HOT SPOT" OF INSTANTANEOUS ADDITION OF HEAT

Zhang Guanren

Abstract

An approximate analytic theory of criticality for thermal hot spots of instantaneous addition of heat is given. Formular of the critical explosion parameter δ_c is derived as following:

$$\ln\theta_0=\frac{\delta_c}{4}-\frac{n+1}{2}\ln\delta_c-\ln\frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

where $\theta_0=E(T_0-T_1)/(RT_0^2)$. E is the activation energy. R is the universal gas constant. T_0 is the initial temperature of the hot spot. and T_1 is the temperature of the surroundings. $n=0$ for a plate, $n=1$ for a cylinder and $n=2$ for a sphere. They are exactly same as given by P. H. Thomas except the constants on the right hand side of the expression.

From the energy balance equation of a thermal hot spot. at the time of addition of heat. another expresion of δ_c can be derived. which is similar to that given by M. H. Friedman. After substituting the thermal energy input by a plane shock wave. the critical condition $P^n\tau=$const. of initiation of the heterogeneous explosives can be derived. Thus the author concluded that no matter the explosive is homogeneous or heterogeous. the mechanism of initiation is thermal.