

爆炸、冲击和非线性波

朱兆祥

(1982年5月27日收到)

本文讨论了爆炸、冲击和非线性波领域内的三个问题：(1) 非线性波现象。(2) 正问题——爆炸和冲击机械效应的初边值问题。(3) 反问题——由波的传播来研究材料的动力学特性。

一、非线性波动现象

波动现象是尽人皆知的，然而关于波动的定义却没有一个能够概括全部波动现象。有一个企图尽可能概括得最多的定义是^[1]：“波动是任何一种可以辨认的讯号，以一种可以辨认的速度，从介质的一处传到他处的现象。”这里所谓讯号是指扰动的任意标记。例如某个量的极值或跳跃，讯号的形状、大小、速度可以变化，只要讯号的位置可以在任何时刻被测定。这样的量指的是标志介质状态的变量，如质点速度、应变、应力、密度、内能或者水深，也可以是由它们派生的量如速度势、位移势、黎曼不变量等，这些量出现极值时即指通常所说的波峰或波谷；出现强间断即发生跳跃时乃指冲击波；出现一阶弱间断即导数发生跳跃时乃指加速度波；出现高阶弱间断时乃指弱波，然而平时用得较多作为讯号标记的（尤其在单向波中）却是某个状态幅值的微小扰动，跟踪这个讯号可以量出这个幅值水平上微扰“元波”的传播速度，例如对于一定应力幅值 σ ，其元波速度为

$$C_{\sigma} = \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{\sigma} \quad (1)$$

当 x 为物质坐标时上式定义了物质波速或内禀波速，当 x 为空间坐标时，定义了空间波速或绝对波速。对于应力 σ 和应变 ε 之间具有不受时间效应影响的本构关系的介质（如弹性流体或弹塑性固体）来说，对不同状态变量所定义的元波速度是相同的，因而不致发生歧义。一般介质的状态变量之间的本构关系，在扰动强烈时总是非线性的，因而元波速度会随变量幅度大小而变化，这正是非线性波的一个重要特征。

爆炸和冲击都是能量非常集中，而且突然地转化的现象，能量转化率可以大得极为惊人。例如常规的高能炸药爆炸时的功率密度为 10^7 千瓦每厘米立方，约为炮筒中火药燃烧所生功率密度的一万倍，为乙炔燃烧所生功率密度的一亿倍。这样大的能量转化率势将在周围介质中引起强烈的扰动，从而激发非线性波。

非线性效应是使波在传播过程中发生波形变化的原因之一。如果介质的力学性能使得高波幅元波的传播速度大于低波幅的，便会使波形的稀疏相拉得越来越长，使得压缩相越挤越

紧，最后导致波的破裂（如水波中的浪花）或者形成冲击波。也可能有高幅波元波速度低于低幅波元波的，如温德华尔气体在临界点附近的情况，或者固体因高速撞击发生相变后卸载的情况，便有压缩相拉长，而稀疏相挤紧以至形成稀疏冲击波的情况（图1）。

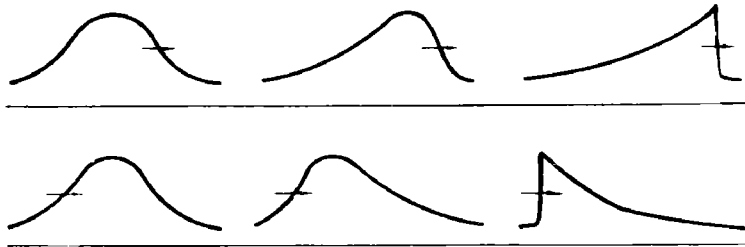


图1 压缩冲击波（上）和稀疏冲击波（下）的形成

这种非线性效应可以用最简单的数学模型即一维一阶非线性波动方程来刻画

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + C(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

这可以看作是对物质坐标中一维气体动力学方程或者弹塑性波方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - C^2(\phi) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (3)$$

进行远场分析，即只考虑单向传播效应的结果，也可以看成是一类所谓“运动学波”的数学模型。在后者中只须考虑一个联系密度 ρ 和流量 q 的质量守恒方程和一个非线性“本构”方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad q = Q(\rho) \quad (4)$$

然后定义波速 $C(\rho) = \frac{dQ}{d\rho}$ ，即能得出方程(2)。这类方程是在分析洪峰、车流、冰川中遇到的。

波形变化的另一种机制是扩散效应，这种效应来自粘性、热传导或者质量扩散，它们是分别和动量的空间梯度、温度梯度或者密度梯度成正比的。其作用是使波形散开，把原始的不间断光滑化。在一般情况下，这些扩散效应不是很显著的，而当非线性效应使波形变陡时，扩散效应就显著地增长了。冲击波的形成正是非线性效应和扩散效应共同起作用的结果。同时考虑两种效应的波动方程为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + C(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0 \quad (5)$$

稍经变换可将上式化成典型的 Burgers 方程：

$$\phi_t + \alpha \phi \phi_x + \mu \phi_{xx} = 0 \quad (6)$$

这个非线性方程经发现有精确解。一个简单例子是它存在有定态波的解 $\phi = \phi(x - ct)$ 。一般的馒头波经过相当时间的演化也会渐近地发展成钝锯齿形的定态波，而当扩散系数 $\mu \rightarrow 0$ 时，定态波就趋近于理想的冲击波。

使波形变化的第三种机制是**弥散效应**。这种效应或者来自物理的原因, 本构方程中时间导数项的存在会使不同频率的波具有不同的速度, 例如所有的粘弹性材料都具有弥散性质, 或者来自几何的原因, 波导边缘的几何限制使波速依赖于频率, 一个简单的例子就是考虑横向惯性效应时杆中弹性纵波的传播, 其控制方程为Boussinesq方程

$$\phi_{tt} - a^2 \phi_{xx} = \beta^2 \phi_{xxx} \quad (7)$$

以正弦波解 $\phi = Ae^{i(\omega t - kx)}$ 代入的结果会导致频率 ω 和波数 k 之间的非线性弥散关系

$$\omega = \pm \frac{ak}{\sqrt{1 + \beta^2 k^2}} \quad (8)$$

而使相速度 C 依赖于波数 k ,

$$C = \frac{\omega}{k} = \pm \frac{a}{\sqrt{1 + \beta^2 k^2}} \quad (9)$$

因子 β 是标志弥散的系数。在这种情况下除相速度是“可以辨认”的讯号传播速度外, 还可以发现另有一个波群的传播可资辨认。实际上波数 k 是分布在空间的波峰(或波谷)的数密度, 而频率 ω 正是在一点上观测到的每秒通过该点的波峰的个数, 也即波的流量。因此波的个数守恒可表作

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

而这正是一维一阶非线性波动方程

$$\frac{\partial k}{\partial t} + C(k) \frac{\partial k}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

式中 $C(k) = \frac{d\omega}{dk}$ 正是波流中讯号的传播速度即群速度, 例如杆中有横向效应的弹性纵波群速度为 $C(k) = \pm C / (1 + \beta^2 k^2)$ 。

如果介质是非弹性的, 则弥散效应将和非线性效应共同作用, 其结果可以形成孤立波。这是一种在传播过程中波形不发生变化的定态波或局部定态波。只要对 Boussinesq 方程作远场分析, 即只考虑波的单向传播, 就可把线性 Boussinesq 方程的弥散关系(9)只取正号, 当弥散效应较弱 $\beta k \ll 1$ 时, 可将关系(9)展开为

$$\omega = dk \left(1 - \frac{1}{2} \beta^2 k^2 + \dots \right) \quad (12)$$

依据变换 $\omega \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}$, $k \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial x}$, 即可自上式得出

$$\phi_t + \alpha \phi_x + \alpha \beta^2 \phi_{xxx} = 0 \quad (13)$$

它的非线性对应是把常数 α 易为 $\alpha(\phi)$, 再经简单变换就可得出著名的KdV方程

$$\phi_t + \alpha \phi \phi_x + \mu \phi_{xxx} = 0 \quad (14)$$

其时 α 和 μ 都是常数。KdV 方程有一个定态解

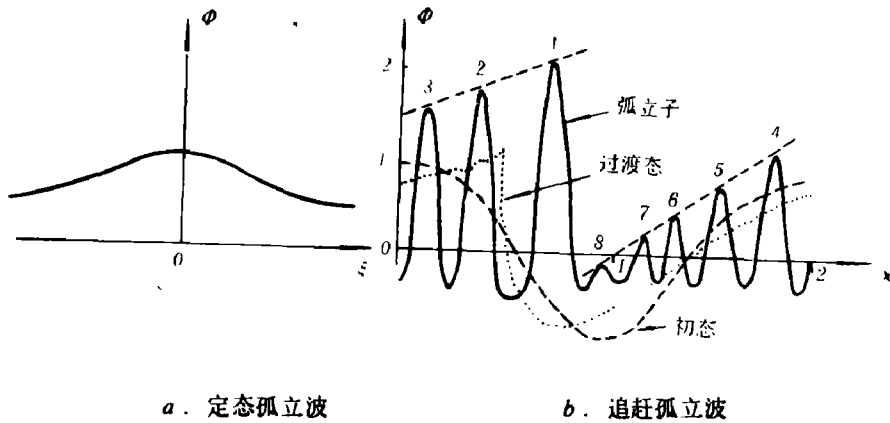


图2 KdV方程的孤立波解

$$\phi = \phi_0 \operatorname{sech}^2 \left\{ \sqrt{\frac{\alpha \phi_0}{12\mu}} (x - Ut) \right\}, \quad U = \frac{\alpha}{3} \phi_0 \quad (15)$$

这是一个草笠形的孤立波，其传播速度 U 是和幅度 ϕ_0 成正比的（图2a）。在初始波形为别的波形时，也可逐渐演化成一系列的局部定态孤立波，例如在周期边界条件下，初始的余弦波形可以演化成八个波幅和波速都不等的孤立波（图2b）。高幅波可以赶上前面的低幅波而发生相互作用，在相互作用结束之后，各孤立波仍保持其原来的波形继续前进。

Burgers 方程和 KdV 方程是考虑扩散效应或粘性效应的典型的非线性波动方程。其实一切复杂的含有高阶项的双曲型方程都可以在一阶近似的条件下通过远场分析⁽²⁾ 归结为 Burgers 方程或 KdV 方程，或二者的推广或耦合形式，如方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (H_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial t} + K_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial x}) U = 0 \quad (16)$$

式中 U 是元素为 u_1, u_2, \dots, u_n 的列阵， $A, H_{\alpha}^{\beta}, K_{\alpha}^{\beta}$ 等是元素只依赖于 U 的 $n \times n$ 矩阵。在定态常数解 U_0 附近作小参数展开

$$U = U_0 + \varepsilon U_1 + \dots$$

引进 Gardner - Morikawa 变换

$$\xi = \varepsilon^a (x - \lambda_0 t), \quad \tau = \varepsilon^{a+1} t \quad (17)$$

式中 $a = 1/(p-1)$, λ_0 是 $A(U_0)$ 的一个本征值，则得一阶近似 U_1 的一个分量 $u_{(1)}$ 的方程

$$\frac{\partial u_{(1)}}{\partial \tau} + \alpha u_{(1)} \frac{\partial u_{(1)}}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial^2 u_{(1)}}{\partial \xi^2} = 0 \quad (18)$$

上式在 $p=1$ 时是非线性波动方程， $p=2$ 时是 Burgers 方程， $p=3$ 时是 KdV 方程，更高阶的 p 为偶数时是 Burgers 型方程， p 为奇数时是 KdV 型方程。而这两类方程目前都已经得到精确解。

二、正问题：爆炸、冲击的力学效应问题

爆炸和冲击的力学效应问题在数学上一般可归结为在爆炸或冲击引发的初边值条件下求

解连续介质动力学问题, 其控制方程包括下面五个守恒方程

$$\dot{\rho} = -\rho \operatorname{div} \underline{u} \quad (1)$$

$$\dot{\underline{u}} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \underline{\sigma} \quad (2)$$

$$(A+ST) \dot{\quad} = -\frac{1}{\rho} \underline{\sigma} \cdot \operatorname{grad} \underline{u} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \underline{h} \quad (3)$$

式中 ρ 为密度, A, S 分别为单位质量的自由能和熵, T 为温度, $\underline{u} = \dot{\underline{x}}$, \underline{h} 分别为质点速度和热通量向量, $\underline{\sigma}$ 为真应力张量 (以压为正); 散度和陡度都是相对于 Euler 坐标 \underline{x} 的, 上面加一点表示对时间 t 的物质微商。此外, 还要加上反映材料对温度和变形的响应的十一个本构方程。在考虑热力学二定律限制条件下, 其一般形式为^[3,4]

$$A = \hat{A}(\underline{F}, T, \alpha), \quad \underline{h} = \hat{h}(\underline{F}, T, \underline{g}, \alpha), \quad (4)$$

$$\underline{\sigma} = \hat{\underline{\sigma}}(\underline{F}, T, \alpha) = -\rho \frac{\partial \hat{A}}{\partial \underline{F}} \underline{F}^T, \quad S = \hat{S}(\underline{F}, T, \alpha) = -\frac{\partial \hat{A}}{\partial T}$$

这里 \underline{F} 是变形陡度, $\underline{g} = \operatorname{grad} T$, α 是 n 个内变量的简写, 它们决定于 n 个演化方程

$$\dot{\alpha} = \psi(\underline{F}, T, \alpha) \quad (5)$$

α 可以是标志非弹性应变的量, 标志各类反应、相变、扩散、激活能、位错、裂隙或损伤发展程度的量。这 $16+n$ 个方程构成一个封闭方程组。

对称因素可以使问题得到相当的简化。例如空中爆炸、地下封闭爆炸、球形容器中的爆炸、球形装药爆轰等都是球对称问题。轴对称问题可以包括一大类爆炸和冲击问题, 诸如穿甲、破甲、地面和浅埋爆炸、陨石撞击、扩孔问题、药柱爆轰等。许多问题可以简化成平面问题来求解, 如爆轰波的滑移、爆炸复合、平面波的绕射等。处理得最多的还是一维问题, 其中特别是杆撞击、平板撞击、爆炸产生飞片等, 在材料的动态力学性能研究中有重要意义。本构方程也可按一定的载荷条件和材料的特点有各类简化如流体模型, 流体弹塑性模型, 弹塑性模型以及应变率敏感材料的广义 Maxwell 粘塑性模型等。实际问题虽经简化成一维或二维问题因而大大降低了复杂程度, 然而由于方程的非线性特别是材料的非线性行为, 使得正问题的求解还是很不容易的。

初值设置和自模拟解

爆炸效应的初值常常是由自模拟解来提供的。由点起爆 (或在一直线上、一平面内同时起爆) 所引发的爆轰波后方流场是自模拟的。这个自模拟解可以作为炸药—介质系统的初值。鉴于爆源在体积上的微小和爆轰过程的短促, 可以把爆源看成瞬时起爆的点源 (或线源、面源), 由此可得出介质中的自模拟解, 杆撞击或板撞击的初期效应也是自模拟的, 这些自模拟解都可作为较复杂的爆炸和冲击问题在一定时刻介质中的初值。这些自模拟解都是既无特征长度又无特征时间条件下爆炸和冲击效应问题中罕见的精确解。舍此而外的初值设置方法都带有近似的特色, 例如取容器中爆炸产物内的平均爆压为初值的瞬时爆轰近似, 或者取经

验公式或其他方法预估的压力作为作用在接触边界上的边值等等, 这些近似中总是把爆炸产物和介质间的耦合作用解除了。

解析解

除开自模拟解之外, 在爆炸和冲击领域中非线性波问题的解析解是屈指可数的, 著名的如多方气体中多方指数为 $-1, 3, 5/3, 7/5 \dots$ 时一维流动的精确定解, 描述了双向波的相互作用。在单向非线性波中, 同时考虑扩散效应的Burgers方程通过Cole-Hopf变换(1950-51)找到了精确定解; 同时考虑扩散效应的KdV方程, 由于数值解的启发, 通过散射反演法找到了孤立子解(1967); 这就刺激了寻找非线性波方程精确定解的热潮。在最近十五年中取得了快速的进展。寻找孤立子解的热情正在向爆炸力学领域扩展, 在目前已经有了爆轰过程中和直杆撞击中孤立子解的报导。

在非线性波问题中用渐近方法求出摄动解的例子是众多的, 多数是用在弱非线性的情况。近两年在国内也在弱冲击条件下用摄动法进行了解决多方指数接近于3的介质中⁵、滞迴介质中⁶和粘弹塑性介质中⁷非线性波传播问题的尝试。这种近似的解析解的求得可以免除事事求援于计算机的麻烦, 也可对各种参量对解的影响作出有意义的估计。

数值解

特征线方法对于偏微分方程的理论研究、方程分类等有重要意义, 另一方面它又是很成功的数值方法, 在含两个独立变量的双曲型方程组中, 特征线方法把原方程组化成特征线上和相对应的相容关系上的常微分方程组, 然后用有限差分法把常微分方程组化成代数方程组。对于含三个独立变量的方程组, 则发展了特征锥方法, 有效地解决了二维的爆炸和冲击问题⁸。

用特征线方法的优点是: 长于揭示波传播和相互作用的细节, 而且形象地加以表达, 对于各种间断如接触边界、冲击波边界、弹塑性边界等是显性地加以处理的, 因而清楚而准确, 连续区的波形光滑而无震荡。其缺点是逻辑复杂, 常因各种间断的出现而大量增加工作量和困难, 为求出定点时程曲线和定时波形, 常常需要进行大量的内插, 这些优缺点都是相对于有限差分法而言的。因此在不求对波形作细节的了解, 对冲击波的玷污可以容忍的条件下, 人们还是惯于使用有限差分法。

目前通行的有限差分法⁹中, Lagrange方法的优点是便于处理接触边界和材料历史, 后者对于具有记忆的材料是特别重要的, 主要的两个困难都发生在二维以上的计算中, 一是大变形时网格的缠结, 目前用自动重分网格来解决; 二是滑移面或剪切带的处理, 目前用滑动边界方法来克服。Euler法可以躲过上述困难。但其困难在于对迁移项只能在一阶精度上加以处理, 还有接触面的位置难以确定, 特别是界面的质量扩散使得两边的密度改变光滑化, 从而无法确定究竟使用何种状态方程。为了克服这些困难就出现了含有示踪粒子的各种格子法。

目前, 有限差分法可以对很复杂的问题给出优越的模拟, 几乎可以解决任意大的一维问题; 对于二维问题, 网格数增加十倍时, 贮存数需增加百倍, 主机时间则需增加千倍, 对网格数为 100^2 的通常的二维计算, 贮存量为190K, 主机时间为1.1小时, 所以用现行计算机可以

解决足够大的二维问题。但如要增大网格数以扩大分辨力,则机时的膨胀是极为可观的。至于三维问题, 100^3 网格需贮存字数 $27M$, 机时 200 小时, 因此不能期望用现行计算机来作三维计算, 除非把精度要求降得很低。

有限元法在非线性波问题中的应用, 在目前还属于草创阶段。

局部解

和上面所说的整体求解波动问题的思想有区别, 早从十九世纪的 Hugoniot 和 Hadamard 开始就发展了奇异面理论, 或叫波头分析法。奇异面理论把波看作严格地限制在一个面上的扰动。其重要性在于可以给出数学上精确的波头关系, 而不需有关材料本构性能的显性假定, 因而理论具有高度的一般性。还在于所得的结果对于解释实验数据特别成功有用。最近十几年来对于三维的一阶和二阶奇异面, 即冲击波和加速度波进行了大量的研究, 考察了这些波在各类材料中的增长和衰减特性, 得出许多有用的结果^[10], 特别是在加速度波方面。因其波幅的演化不依赖于波后流场, 几乎所有材料(只有混合材料除外)的加速度波的波幅 s 的变化都受控于 Bernoulli 方程

$$\frac{ds}{dt} = -\mu(\tau)s + \beta(\tau)s^2 \quad (6)$$

其中系数 β 只依赖于材料的弹性响应, μ 则依赖于各类材料的特性、波阵面的几何形态和波前方的情况。这个方程容易求出其解

$$s(t) = \frac{\exp\left(-\int_0^t \mu(\tau) d\tau\right)}{\frac{1}{s(0)} - \int_0^t \beta(\tau) \exp\left(-\int_0^{\tau} \mu(\tau') d\tau'\right) d\tau} \quad (7)$$

从而得出波幅的增长或衰减的规律。

冲击波的增长和衰减依赖于波后流场, 因而需要和整个流场同时解决。但也作过许多近似分析, 建立并发展了冲击波动力学^[11], 用来分析冲击波的绕射和 Mach 反射等。

后期效应

许多爆炸和冲击问题中例如射流侵彻、水下和地下爆炸中气球膨胀、薄壁构件对爆炸的响应等等, 常常不关心波的局部效应, 重要的反而是波后介质总的动力学影响, 这类问题是大量的, 据估计占爆炸力学问题半数以上。这些问题显然超出了本文范围, 但是迫切期望有个较全面而系统的总结。

三、反问题——材料的动态力学性能问题

非线性波理论的一个重要应用是作为研究材料本构关系的一个工具, 即从特定时刻观测到的应力波波形或从特定地点记录下来的应力波参量的时程曲线来反推材料的本构方程。这是一个反问题, 是在数学上远难于初边值问题的非线性问题, 特别是, 反问题的解答通常不是唯一的。

以杆撞击的一维应力问题为例, 控制方程是

$$\frac{du}{dX} + \frac{d\varepsilon}{dt} = 0, \quad \rho_0 \frac{du}{dt} + \frac{d\sigma}{dX} = 0 \quad (1)$$

假定材料是时间无关的弹塑性材料, 其加载段的本构关系可以简单地写作 $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ 或者把二者合并成非线性的波动方程

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = C^2(\varepsilon) \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}, \quad C^2 = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma(\varepsilon)}{d\varepsilon} \quad (2)$$

问题是从杆端撞击的初边值条件, 和有限个数的几处应变时程曲线, 即方程 (2) 的几个特解, 反求本构函数 $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ 。这显然是一个一般没有直接解决办法的难题^[11]。

四十年代用落锤、弹弓或飞轮为动力在细长的丝件或杆件的一端施加冲击载荷以激发应力波来验证塑性波理论, 曾发展成为用试件上残余应变数据来反推应力应变关系的方法, 而所谓残余应变分布, 实际上是以特殊的方式反映了方程 (2) 的一个特解, 所以这一方法是解决反问题的最早尝试。但是这一办法显然由于应力波的反射和卸载过程的发生而使问题复杂化了。

其后, 用压缩气体作为动力, 驱动平头弹以每秒百米左右的速度打击杆件, 采用应变片或光栅测量试件上几个截面的应变时程曲线。在塑性波波速恒定性得到保证之后, 从应变数测定出各个应变幅值的波速 $C(\varepsilon)$, 积分 (2) 式的第二式可求出函数 $\sigma(\varepsilon)$ ^[12]

$$\sigma(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \rho_0 C^2(\varepsilon) d\varepsilon \quad (3)$$

这当然只是间接的解决反问题的方法, 而且波速恒定性的假定是苛刻的, 表明这只能用于应变率钝感的材料。对于时间相关的粘弹性或粘塑性材料, 典型的本构方程具有广义 Maxwell 模型的形式, 即

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + g(\sigma, \varepsilon) \quad (4)$$

或者等价的形式

$$\dot{\sigma} = E(\varepsilon) \dot{\varepsilon} + G(\sigma, \varepsilon) \quad (5)$$

这里 E 是弹性模量, 它可以依赖于应变, g 是蠕变函数, $G = -Eg$ 是松弛函数。如果材料有个弹性极限 σ_0 , 则 g 或 G 只在 $\sigma > \sigma_0$ 时有不等于零的值, 这时材料是粘塑性的; 若 $\sigma_0 = 0$, 则材料是粘弹性的。

广义 Maxwell 材料有一个瞬态响应 $\sigma_I(\varepsilon)$, 即在实加载荷下的应力应变关系, 此时 $\dot{\varepsilon} = \infty$, 故

$$\sigma_I(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon E(\varepsilon) d\varepsilon \quad (6)$$

材料也有一个平衡响应 $\sigma_E(\varepsilon)$, 即在准静态加载下的应力应变关系, 此时 $\dot{\sigma} = \dot{\varepsilon} = 0$, $\sigma_E(\varepsilon)$ 是代数方程

$$G(\sigma_E(\varepsilon), \varepsilon) = 0, \quad [\sigma_E(\varepsilon_0) = \sigma_I(\varepsilon_0)] \quad (7)$$

的解。一维应力情况下的响应曲线通常如图 3 所示的形状, 一般加载情况下 (包括恒应变率

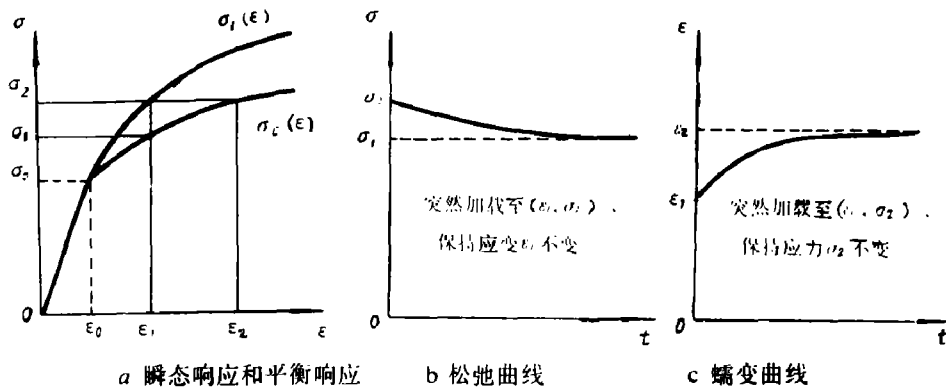


图 3 广义 Maxwell 材料的一维应力响应

下) 的应力应变曲线落在 $\sigma_1(\epsilon)$ 和 $\sigma_\epsilon(\epsilon)$ 之间。

问题在于利用实测波形反求函数 $E(\epsilon)$ 和 $G(\sigma, \epsilon)$ 。前者可以通过不同程度地预加静载荷, 然后叠加上超声脉冲测量弹性波速 $C_s(\epsilon)$ 得出: $E(\epsilon) = \rho C_s^2(\epsilon)$, 后者则是反问题的主要求解对象。直接求解的办法显然是难于找到的, 如果考虑到一维应力情况下横向惯性所引起的几何弥散效应, 还必须在运动方程 (1) 的第二式右端加上弥散项^[13] 而成为

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial X} = \frac{1}{2} \rho_0 a^2 v^{*2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial t}, \quad \left(v^* = v \left\{ 1 + \frac{1-2\nu}{2\nu} \frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}} \right\} \right) \quad (8)$$

式中 ν 为 Poisson 比, $\dot{\epsilon}_p$ 为塑性应变率。这样问题就更复杂了。目前在许多实验室中流行的办法^[13] 是假定松弛函数的形式 (或者直接作出宏观的假定, 或者通过位错动力学理论或激活能理论, 或其他理论作出假定), 代入微分方程组, 在给定的初边值条件下, 反复进行计算机模拟试验, 以确定假定的松弛函数中系数的数值, 直到计算波形和实验波形基本符合为止。

由于一维应力实验中侧向自由面上应力为零, 所以纵向应力的多少, 只能限制在屈服强度 Y 的量级。为了把纵向应力提高到比 Y 高一个或二个量级以上, 一般的采用压缩气体或炸药驱动的平板撞击的一维应变实验。从四十年代开始, 就用这种实验方法来确定高压下固体的状态方程, 后者正是材料本构方程在体积变形方面的一个表现。这种实验一般的是测量冲击波速度和自由面质点速度, 每次撞击仅能确定 Hugoniot 状态方程上的一个点。随着实验技术的不断改进, 实测速度和应力的时间分辨力不断提高 (见附表), 从而可以得出平板撞

附表 应力/速度测量的时间分辨力^[14]

探 头	分 辨 力*
离散的位移-时间探头: 探针 (1945), 间隙 (1955)	~ 200ns
连续的位移-时间探头: 电容 (1957)	~ 100ns
电磁式速度探头 (1960), 光学杠杆 (1963)	50 ~ 100ns
速度电容 (1960), 锰铜压阻探头 (1962)	25 ~ 50ns
位移干涉仪 (1965)	10 ~ 25ns
石英压电 (1960), 速度干涉仪 (1967), 兰宝石 (1968), VISAR (1972), 铌酸锂压电 (1973)	1 ~ 5ns

(* 分辨力定义: 峰值前后波幅下降到峰值的 95 ~ 97% 时的时间间隔)

击试验中应力波的精微波形，为高压和高应变率下本构关系的研究开辟了道路。

由于侧压的存在，一维应变下纵向应力可以随着撞击速度的提高，而增大到甚至是弹性模量的量级。在这种大压力下的体积变形具有非线性弹性流体的性能，从而使得一维应变下加载时的瞬态响应和平衡响应曲线一般是凹向上的（图4）。

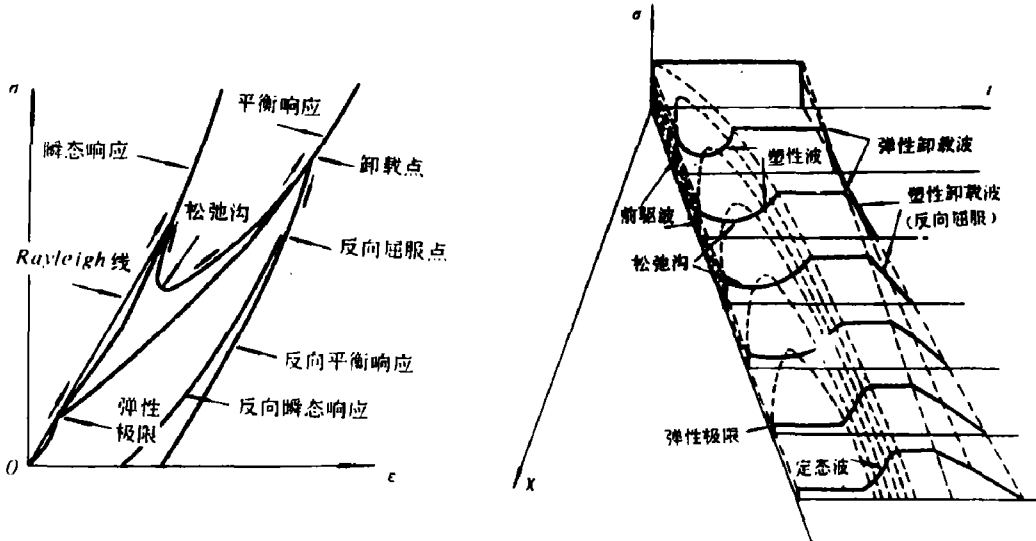


图4 一维应变下加载和卸载的响应曲线

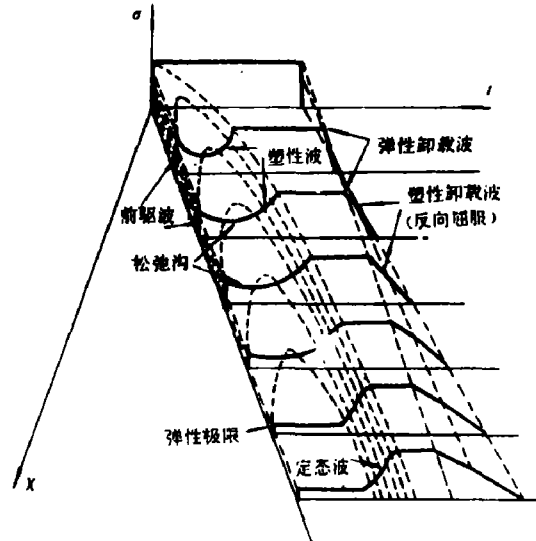


图5 突然撞击下板中应力波形的发展

在突然撞击下，在许多材料（如LiF和铁）中可以观察到的典型的波形演变如图5所示¹⁵。先有一个以恒速传播的弹性前驱波，开始时其峰值有超过弹性极限的过跳，其后有一个应力松弛沟，然后是塑性波，应力回升到平衡值。最后是标志弹性卸载和反向屈服的加速度波。在波传播过程中，前驱波峰值逐渐卸载到弹性极限，松弛沟消失，而塑性波渐近地发展成为波形基本不变的定态波。塑性平台则由于卸载波的追赶逐渐被吃去，最后是卸载波的散开。

反问题的任务就是从实验可以得到的上述波形演化数据来确定本构方程。假定某种微观变形机制，得出松弛函数形式，猜测系数，进行计算模拟以拟合实验数据的办法已经用了十几年，困难在于没有合理的收敛判据，而且各种机理和函数形式对应力波波形是不敏感的，常常是由不同的机制推出的不同本构方程竟能得出相差无几的波形，因而不禁使人慨叹¹⁷：“究竟从波传播的研究真的能够确定材料的本性吗？”

七十年代发展了从局部波形如前驱波、定态塑性波、加速度波数据直接推算松弛函数的方法¹⁸。由冲击波理论可知前驱冲击波的波幅 a 的演化和波后应力变化率 $\dot{\sigma}$ 有关，可导出加载时的松弛函数为

$$G(\sigma, \varepsilon) \Big|_{\sigma=\sigma(\varepsilon)} = -\frac{E - \rho_0 D^2}{\rho_0 D^2} \dot{\sigma} + \frac{3E + \rho_0 D^2}{2\rho_0 D^2} \dot{a} \quad (9)$$

可以从超声波观测所确定的瞬态响应 $\sigma_i(\varepsilon)$ 来求出作为冲击波波幅的函数 E 和波速 D ，从而可以从前驱波波形演变数据确定沿瞬态响应曲线的松弛函数 G 。定态波是1969年首先在实验上发现的，对广义Maxwell模型的分析可知在弹性前驱波传得很远的材料中，平衡已建立

时可以形成定态波,当然也可以把定态波看成是冲击波结构,从而可以把冲击波分析的结果用于定态波,在定态达到时,(9)式变成

$$G(\sigma, \varepsilon) \Big|_r = -\frac{E - \rho_0 D^2}{\rho_0 D^2} \frac{d\sigma}{d\xi} \quad (10)$$

式中 $\xi = \frac{X}{D} + t$,从而可以从定态波波形来确定沿着平衡响应曲线的 Rayleigh 线的松弛函数。

原则上可利用加速度波数据来确定卸载时的松弛函数,但在实践上还有不少的困难。

利用上述三种局部波形数据的方法都要对实验数据微分,因而对实验精度和分辨力要求很高,对数据处理也要使用样条拟合等较高的技巧。另一种直接求本构函数的办法是用 Fowles 提出的 Lagrange 分析法^[15],他发现对有时间效应的材料来说,应力、应变、质点速度等各有不同的波速,因而关于波的概念需要重新考察。

参 考 文 献

- [1] Whitham, G. B., *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley & Sons, New York, (1974).
- [2] 谷内俊弥, 西原功修, (徐福元等译), 《非线性波动》, 原子能出版社, (1981).
- [3] Herrmann W., Nunziato, J. W., *Dynamic Response of Materials to Intense Impulsive Loading*, Ed. Chou, P. C. & Hopkins, A. K., USA, 123 (1972).
- [4] Herrmann, W., "Dynamic Constitutive Equations", *7th U.S. Nat. Cong. Appl. Mech.*, (1974).
- [5] 朱兆祥, 蒋大和, 应用数学和力学 1: 275, (1980).
- [6] 段祝平, 赵国英: "研究滞迴介质中爆炸波传播问题的坐标摄动法", 私人通信。
- [7] 段祝平, 王厘尔: "摄动法在研究粘弹性波问题中的应用", 私人通信。
- [8] Karpp, R., Chou, P. C., 同[3], 283.
- [9] Herrmann, W., "Current Problems in The Finite Difference Solution of Stress", *Proceeding of Workshop on Nonlinear Waves in Solids* Ed. Ting, T. C. T., Clifton, R. J., Belytschko, T., USA, (1978).
- [10] Chen, P. C., *Selected Topics in Wave Propagation*, Noordhoff Int. Pub., London, (1976).
- [11] Lee, E. H., "The Theory of Wave Propagation in Anelastic Materials", *Int. Symp. on Stress Wave Propagation in Materials*, Ed. Davids, N., Interscience Pub. INC., New York, (1960).
- [12] Bell, J. F., *J. Appl. Phys.*, 31: 2 (1960).
- [13] 段祝平等: "高应变率下金属动力学性能的实验与理论研究", 力学进展 10 (1980).
- [14] Graham, R. A., 同[9], 63.
- [15] Fowles, G. R., 同[9], 473.
- [16] Herrmann, W., "Some Recent Results in Elastic Plastic Wave Propagation", *Propagation of Shock Waves in Solids*, Ed. Varley, E., AMD- Vol. 17, (1976).
- [17] Chen, P. J., 同[9], 114.

EXPLOSION, IMPACT AND NONLINEAR WAVES

Chu Chaohsiang

Abstract

Three topics of the recent developments in the fields of explosion, impact and nonlinear waves are reviewed: (1) Nonlinear wave phenomena, (2) The normal problems-Initial and boundary value problems of the mechanical effects of explosion and impact, (3) The inverse problems—Investigation of dynamical behaviors of materials from wave propagation studies.