

# 充流体园柱壳的塑性动力反应分析

李文庆

(1982年4月28日收到)

本文对有限长充满流体的理想刚塑性园柱壳,在轴对称矩形冲击侧压作用下的塑性动力反应进行了分析。在某些简化假定的前提下,导出了流体对园柱壳塑性动力反应影响的解析解和主要参数之间的关系。经数值计算,流体对园柱壳动力极限荷载和最终位移的影响与不充流体条件下的壳体作了对比,并给出了主要的图线。

## 一、引言

刚塑性园柱壳的塑性动力反应(不充流体条件下)Hodge, P. G. 等<sup>(1)</sup>作了较完整的分析。流体对园柱壳塑性动力反应影响的分析,苏联Шапиро等<sup>(2)(3)</sup>和我国杨桂通教授<sup>(4)</sup>首先作过这方面的工作。近年来, Krajinovic 等<sup>(5)</sup>对浸没在半无限大流体的梁、园板和浸没在无限大流体中的无限长园柱壳的塑性动力反应得到了解析和数值解。近代科学技术的发展(如航天、原子能、海洋平台等),流体结构物相互作用的问题,在实际的工程中引起了人们的注意。流体对结构物承载能力的影响,在动荷载的情况下已显得比较突出,是不能忽略的因素。这一新的课题,从理论上探讨是必要的,从工程实际是有其广泛实用背景的。本文以无限长园柱壳,被等间距刚性环约束,壳内充满流体,姑且认为流体是静止的,在某两相邻刚性环之间受到轴对称矩形冲击侧压 $P_0$ 的作用进行了研究。由于对称的原因,只取壳的一半来分析,几何尺寸和柱坐标如图(1)所示。

该问题较精确的模型应包括以下两个方面:

(A)园柱壳是弹塑性材料,且考虑应变率对屈服条件及与应变率有关的塑性本构关系的影响;

(B)流体是可压缩的,且考虑粘性。这样的模型对理论分析将带来很大的困难,甚至是无法求解的。因此有必要去分析最基本的,简化了的模型,为此作以下基本假定:

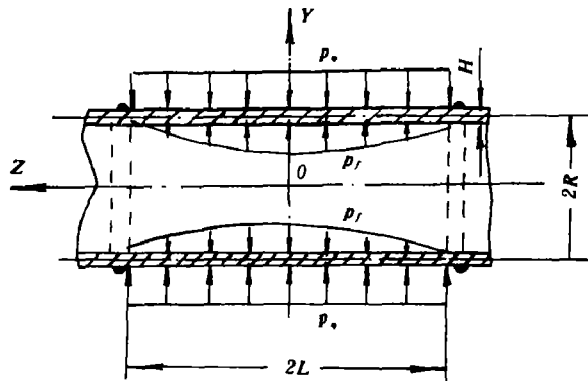


图1

- (1) 园柱壳是理想刚塑性材料, 不考虑应变率效应;  
 (2) 流体是不可压缩的, 不考虑粘性;  
 (3) 薄壳处于小变形状态;  
 (4) 荷载作用的时间较系统的自然振动周期短, 且不考虑失稳。

## 二、流体的动力响应

由不充流体理想刚塑性园柱壳的塑性动力分析, 在“外壳”“中载”的条件下, 设壳体运动的径向速度场为:

$$\dot{\omega}(z, t) = \dot{\omega}_0(t) \left(1 - \frac{z}{L}\right) \quad 0 < z < L \quad (1)$$

其中:  $\dot{\omega}_0(t)$  为  $z = 0$  处的运动速度, “·” 代表对时间  $t$  的一阶微商。

设流体的动力响应是有势的<sup>[6]</sup>, 其速度势为  $F(r, z, t)$ , 且满足拉普拉斯方程:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r} \Big|_{r=0} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial r} \Big|_{r=R} &= -\dot{\omega}(z, t) \\ \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{z=0} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{z=L} &= \frac{L}{R} \dot{\omega}_0(t) \end{aligned} \right\} [3(a, b, c, d)]$$

初始条件为:

$$F(r, z, 0) = \frac{\partial F(r, z, 0)}{\partial r} = \frac{\partial F(r, z, 0)}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

据式(1)速度势可写成:

$$F(r, z, t) = \dot{\omega}_0(t) \varphi(r, z) \quad (5)$$

在定解条件[3(a, b, c, d)]下解微分方程(2)得:

$$F(r, z, t) = \dot{\omega}_0(t) \left\{ -\frac{r^2}{4R} + \frac{z^2}{2R} - \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2k+1)\pi z}{L} I_0 \left[ \frac{(2k+1)\pi r}{L} \right]}{(2k+1)^3 I_1 \left[ \frac{(2k+1)\pi R}{L} \right]} \right\} \quad (6)$$

$$\varphi(r, z) = \left\{ -\frac{r^2}{4R} + \frac{z^2}{2R} - \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2k+1)\pi z}{L} I_0 \left[ \frac{(2k+1)\pi r}{L} \right]}{(2k+1)^3 I_1 \left[ \frac{(2k+1)\pi R}{L} \right]} \right\} \quad (7)$$

$$k = 0, 1, 2, 3 \dots \quad 0 < z < L \quad 0 < r < R$$

其中:  $I_0(r)$  和  $I_1(r)$  为零阶和一阶变型贝塞尔函数。令  $r = R$ ,  $a = R/L$ ,  $x = z/L$ , 并引进

无量纲函数  $\bar{\psi}(a, x) = [\varphi(R, z)]/R$  可得：

$$\bar{\psi}(a, x) = \frac{1}{2a^2} \left[ -\frac{a^2}{2} + x^2 \right] - \frac{4}{\pi^3 a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos[(2k+1)\pi x] I_0[(2k+1)\pi a]}{(2k+1)^3 I_1[(2k+1)\pi a]} \quad (8)$$

$$k=0, 1, 2, 3 \dots \quad 0 \leq x \leq 1$$

图(2)和图(3)分别给出了  $\beta^2 = H/R = 1/36, \beta^2 = H/R = 1/24$ , 对不同参数  $a$  时,  $\bar{\psi}(a, x)$  的曲线。

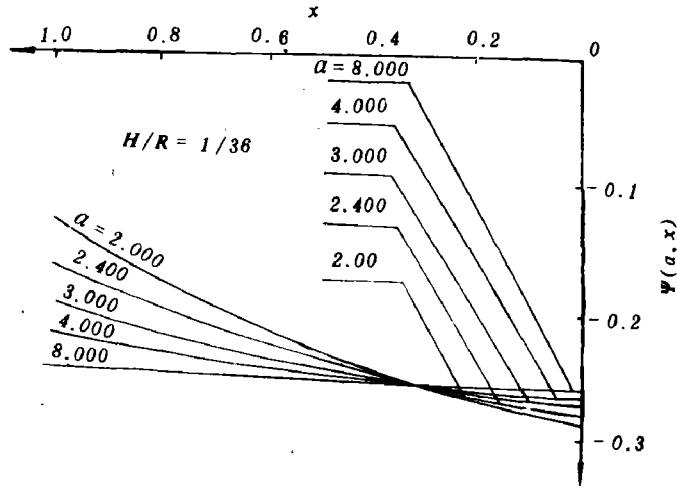


图2

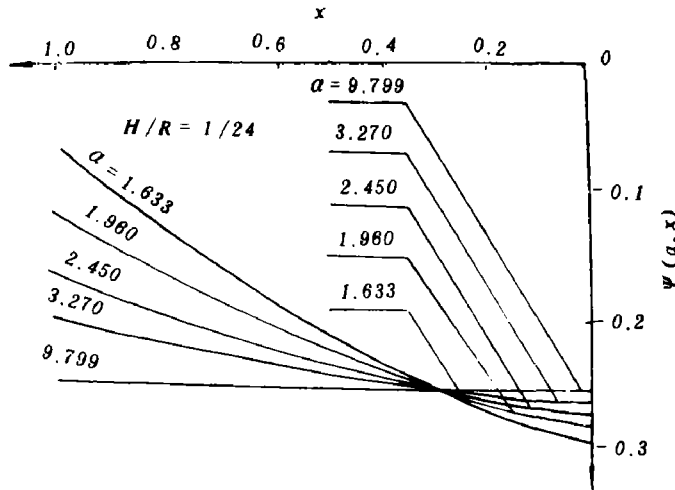


图3

为了以下对圆柱壳塑性动力反应分析方便起见, 必须对无穷级数形式的函数  $\bar{\psi}(a, x)$  作近似的处理, 本文取二次曲线  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$  拟合函数  $\bar{\psi}(a, x)$ , 系数  $a_0, a_1, a_2$  由最小二乘法求得, 其误差不超过百分之五。

依无涡理想流体的Bernoulli公式:

$$-\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{q^2}{2} + \frac{p}{\rho_f} + \Omega = c$$

忽略流体所受力的势 $\Omega$ 和流体质点由于位置变化所具有的动能 $q^2/2$ ,且 $c=0$ 时,Bernoulli公式可写成 $-(\partial F/\partial t) + (p/\rho_f) = 0$ ,所以流体对壳体运动的阻尼力为:

$$p_f = -\rho_f \frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{r=R} = -\rho_f R \bar{\Psi}(a, x) \ddot{\omega}_0(t) = Mv \ddot{\omega}_0(t) \quad (9)$$

其中:  $Mv = -\rho_f R \bar{\Psi}(a, x)$ , 定义为附加质量;  $\rho_f$ —流体的密度。

### 三、刚塑性园柱壳的动力反应

为了讨论问题方便起见,采用以下无量纲量:

$$\left. \begin{aligned} n &= N_s/2kH, \quad m = 2M_z/kH^2, \quad P\eta = p_n R/2kH \\ W_0 &= \omega_0 \rho H/2kt_0^2, \quad X = \frac{z}{L}, \quad \tau = \frac{t}{t_0} \\ C &= L/\sqrt{RH} = \frac{1}{a\beta}, \quad a = \frac{R}{L}, \quad \beta = \sqrt{\frac{H}{R}} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

其中:  $\rho$ —壳体材料的密度;  $k$ —壳体材料的纯剪屈服应力;  $t_0$ —压力冲量 $p_n$ 的作用时间;  $N_s$ —壳体周向膜力且以拉为正;  $M_z$ —壳体沿 $Z$ 坐标的弯矩且以壳内表面受拉为正;  $\omega_0$ —壳体中面在 $z=0$ 处的径向位移,以指向内法线方向为正。壳体运动的方程式为:

$$\frac{d^2 M_z}{dz^2} + \frac{N_s}{R} + p_n - p_f = \rho H \frac{d^2 \omega}{dt^2} \quad (11)$$

壳体无量纲的运动方程为:

$$m''/4C^2 + n + P_n = \frac{1}{\beta^2} \left[ (1-x) - \frac{\eta}{\beta^2} \bar{\Psi}(a, X) \right] \ddot{W}_0 \quad (12)$$

其中:  $\eta = \rho_f/\rho$ , “ $''$ ”表示对无量纲坐标 $X$ 的二阶微商,“ $\ddot{\cdot}$ ”表示对无量纲时间 $\tau$ 的二阶微商。

本文采用在 $(n, m)$ 应力平面上的简化屈服面,如图(4)所示。应变率矢量为:

$$\dot{\epsilon} = \lambda [-\dot{W}, -\dot{W}''/4C^2] \quad (13)$$

$\lambda$ 为任一非负的乘子。现将 $DA$ 、 $AB$ 、 $A$ 、 $B$ 这几种塑性格式及相应的流动法则列入表(1)中。

表(1)

塑性格式	内 力		应 变 率 矢 量			
	$n$	$m$	不等式	$\dot{W}$	$\frac{\dot{W}''}{4C^2}$	方程
$DA$	$-1$	$-1 < n < 1$	$0$	$\lambda$	$\dot{W} = 0$	$\dot{W}'' \geq 0$
$A$	$-1$	$-1$	$\mu$	$\lambda$		$\dot{W} \geq 0, \dot{W}'' \geq 0$
$AB$	$-1$	$-1 < m < 1$	$\mu$	$0$	$\dot{W}'' = 0$	$\dot{W} \geq 0$
$B$	$-1$	$1$	$\mu$	$-\nu$		$\dot{W} \geq 0, \dot{W}'' < 0$

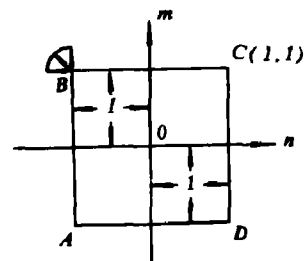


图 4

至此我们得到了运动方程, 屈服条件和与之相关连的流动法则。于是可以连同边界条件、初始条件以及连续性条件一起, 构成求解壳体运动的数学问题。

对于任一运动的或静止的塑性区边界, 弯矩和剪力以及位移和速度都应保持连续, 即

$$\left. \begin{aligned} [m] &= [m'] = 0 \\ [W] &= [\dot{W}] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

在壳中央的剪力和平均斜率都等于零, 即:

$$\left. \begin{aligned} W'(0^-, \tau) &= \dot{W}'(0^-, \tau) = 0 \\ m'(0, \tau) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

在  $X=1$  处, 由于刚性环的存在, 于是:

$$\left. \begin{aligned} W(1, \tau) &= \dot{W}(1, \tau) = 0 \\ W'(1^+, \tau) &= \dot{W}'(1^+, \tau) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

初始条件为:

$$W(X, 0) = \dot{W}(X, 0) = 0 \quad (17)$$

当外荷载小于静态极限荷载  $P_0$  时, 则壳体处于刚性静止状态。根据静态极限分析得在  $X=0$  处服从塑性格式  $B$ , 在  $X=1$  处服从塑性格式  $A$ , 其余部分相应于  $AB$ , 静态极限荷载为:

$$P_0 = (C^2 + 1) / C^2 \quad (18)$$

相应的速度场为:

$$\dot{W}(X, \tau) = \dot{W}_0(\tau)(1 - X) \quad (19)$$

当外荷载大于  $P_0$  不多, 则可认为壳体各点仍服从于静态塑性格式。这就是说, 在讨论壳的塑性动力反应时, 仍采用静态屈服条件。

壳体的第一相运动 ( $0 < \tau < 1$ )

将  $\bar{\psi}(a, X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$  代入运动方程(12)可得

$$m'' / 4C^2 + n + P_n = \frac{1}{\beta^2} (A + BX + DX^2) \ddot{W} \quad (20)$$

其中:  $A = 1 - (\eta a_0 / \beta^2)$ ,  $B = -[1 + (\eta a_1 / \beta^2)]$ ,  $D = -(\eta a_2 / \beta^2)$

边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} m(0) &= 1 \\ m(1) &= -1 \\ m'(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

初始条件为:

$$W_0(0) = \dot{W}_0(0) = 0 \quad (22)$$

解壳体的运动方程(20)可得:

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{D}{3\xi} [C^2(P_n - 1) - 1]X' + \frac{2B}{3\xi} [C^2(P_n - 1) - 1]X^2 \\ &\quad + [2C^2(P_n - 1)(\frac{A}{\xi} - 1) - \frac{2A}{\xi}]X^2 + 1 \\ W &= \frac{\beta^2 \tau^2 (1 - X)}{2C^2 \xi} [C^2(P_n - 1) - 1] \\ n &= -1, \quad 0 < \tau < 1 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

其中:

$$\xi = A + \frac{B}{3} + \frac{D}{6}$$

现在讨论式(23)满足表(1)中第三行及塑性铰园上的间断条件等要求。实际上, 不等式  $\dot{W} \geq 0$ , 在  $P_n > P_0$  时是满足的, 因  $\xi > 0$ 。当  $0 < X < 1$  时, 要求  $-1 < m < 1$ , 数学上要求  $m$  在  $0 < X < 1$  的区间内无极值点存在; 力学上要求在  $0 < X < 1$  的范围内无塑性铰园出现。经讨论得:

$$P_0 < P_n < 1 + \frac{A}{(A - \xi)C^2} = P_{n1} \quad (24)$$

$P_{n1}$  定义为“中载”动力极限荷载。图(5)、图(6)分别给出了  $\beta^2 = 1/36, \beta^2 = 1/24$  时, 在  $\eta = 0$ ,

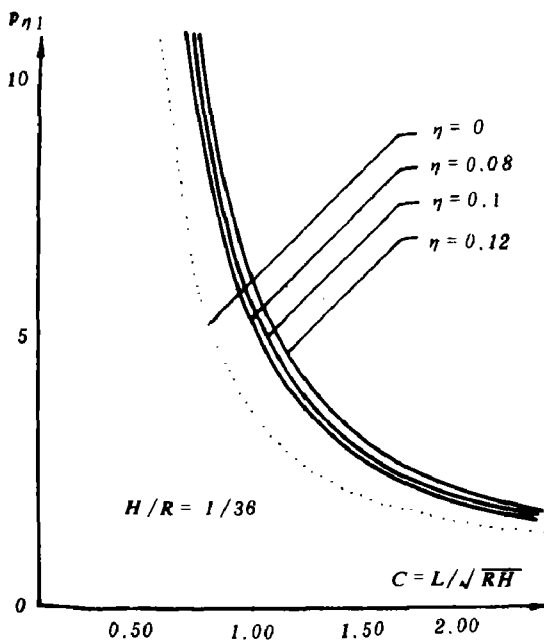


图5

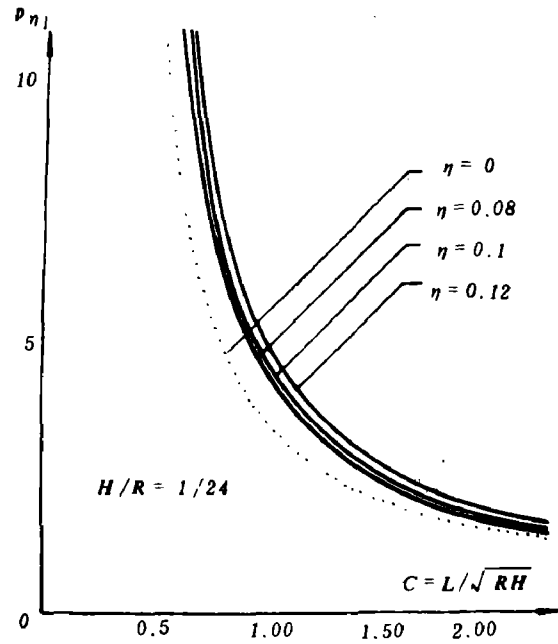


图6

$\eta = 0.08, \eta = 0.1, \eta = 0.12, P_n$  随几何参数  $C$  的变化。

壳体的第二相运动 ( $1 < \tau < T$ )

在时刻  $\tau = 1$  突然卸载后, 壳体的运动如仍服从塑性格式  $AB$ , 则壳体在第二相的运动和前面的讨论一样, 只需令  $P_n = 0$ , 可得:

$$\left. \begin{aligned} m &= -\frac{D(C^2+1)}{3\xi}X^4 - \frac{2B(C^2+1)}{3\xi}X^3 + \left[2C^2 - \frac{2A(C^2+1)}{\xi}\right]X^2 + 1 \\ W &= \frac{\beta^2}{2\xi} [P_n(2\tau-1) - P_0\tau^2](1-X) \\ n &= -1, \quad 1 < \tau < T, \quad P_0 < P_n < P_{n1} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

事实上只要  $\tau < P_n/P_0$ , 那末就可满足  $\dot{W} > 0$  的要求。由  $0 < X < 1$  时  $-1 < m < 1$  的充要条件:  $m'(1) < 0$ , 可得,

$$C^2 < \frac{\theta}{4\xi - \theta}, \quad \theta = 4A + 2B + \frac{4}{3}D \quad (29)$$

令  $\dot{W}_0 = 0$ , 可得壳体运动的最终时刻  $T$

$$T = P_n/P_0 \quad (31)$$

若以  $W_{0,0}$  表示当  $\eta = 0$  时在  $X = 0$  处的无量纲的最终位移;  $W_{0,\eta}$  表示当  $\eta \neq 0$  时壳在  $X = 0$  处的无量纲的最终位移;  $P$  表示当  $\eta = 0$  时壳体的无量纲的冲击荷载。依式(28)的第二式可得:

1) 当  $\eta = 0, \xi = 2/3, P_n = P, T = P/P_0$  时

$$W_{0,0} = (3\beta^2/4)P \{(P/P_0) - 1\} \quad (32)$$

2) 当  $\eta \neq 0, T = P_n/P_0$  时,

$$W_{0,\eta} = (\beta^2/2\xi)P_n(P_n/P_0 - 1) \quad (33)$$

图(7)、(8)分别给出了  $\beta^2 = 1/36, C = 0.75$  和  $\beta^2 = 1/24, C = 0.75$  时的荷载一位移曲线。

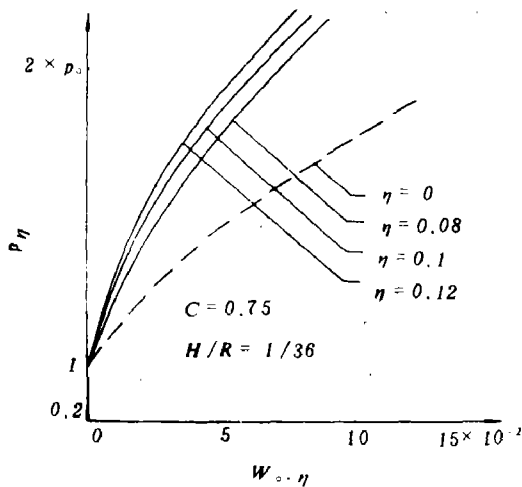


图7 荷载一位移曲线

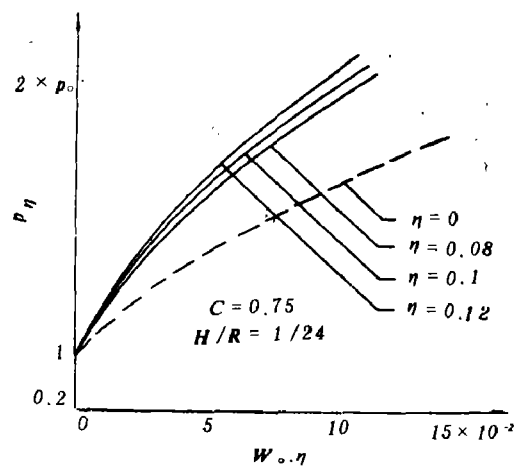


图8 荷载一位移曲线

#### 四、结果和讨论

流体和固体结构物相互作用的问题,以前的作者<sup>(2,3,4)</sup>假定流体对结构物运动的阻尼力与速度成比例。本文假定流体对结构物运动的阻尼力由流体的速度势确定的。本文所得的结果与文献[3]的结果作了对比。在壳体的几何参数( $C, \beta$ )和外荷载相同的情况下,在 $\tau = 1$ 时由壳中央位移数值对比看出,外荷载作用的时间在某一数值附近时,两种结果较为接近,如:当流体为水时,  $H = 1.5in, t_0 = 9 \times 10^{-4} sec$ , 两种结果相差不超过百分之四。如果外荷载作用的时间 $t_0$ 不在此数值附近,两种结果的差别是较大的。

由图(2)、(3)可看出,在 $X = 0.3$ 处,对不同长度的壳,附加质量几乎是一个常数,这是因为当壳体的速度场为线性分布时, $X = 0.3$ 总是壳体动量矩中心坐标。该点在理论分析和实验上具有一定的参考价值。

壳体的运动在不充流体的情况下,无量纲的位移和动力极限荷载,由无量纲的外荷载 $P$ 和壳体的几何参数 $C$ 唯一地确定。但在充流体情形下,无量纲的位移和动力极限荷载,还和壳体的几何参数 $\beta$ 和系统的惯性参数 $\eta$ 有关,即

$$W = f_1(P_n, C, \beta, \eta)$$

$$P_{n1} = f_2(C, \beta, \eta)$$

由图(5)、(6)可看出,充流体塑性园柱壳动力极限荷载随几何参数 $C$ 的变化。当 $C < 1$ 时,流体对壳体动力极限荷载的影响是较大的,在理论分析和工程实际中,必须予以考虑,当 $C > 1$ 时,随着 $C$ 的增加(当 $C > 1.75$ ),这种影响几乎可以忽略不计,所以对“中载”“长壳”忽略流体的影响是允许的。

图(7)、(8)给出了 $C = 0.75$ 时,对于不同的 $\beta, \eta$ 值荷载和壳中央位移的关系曲线。经数值计算,当 $W_{0.75} = W_{0.0}, P = 2P_0$ 时,

1)对于 $\beta^2 = 1/36, \eta = 0.1$ 时 $P_n/P = 1.36$ ,即承载能力提高百分之三十六。当 $\eta = 0.12$ 时, $P_n/P = 1.42$ ,即承载能力提高百分之四十二。

2)对于 $\beta^2 = 1/24, \eta = 0.1$ 时, $P_n/P = 1.26$ ,即承载能力提高百分之二十六。当 $\eta = 0.12$ 时, $P_n/P = 1.299$ ,即承载能力提高近百分之三十。

本文受到太原工学院杨桂通教授和山西农大王笃敬付教授的指导,特此致谢。



## 参 考 文 献

- [1] Hodge, P. G. Jr, *J. Mech. Phys. Solids* 3 (1955), 176 .
- [2] Шануров, Г. С., *ПММ*, 26 (1962), 2 .
- [3] Аманбосов, А. А., *Трубы IV Всесоюзной Конференции по Теории Облочек и Пластин*, 199 - 205, Ереван, 24 - 31, Октября, (1962) .
- [4] 杨桂通, 太原工学院学报, 第一期, (1964) .
- [5] Srinivasan, M. G., Valentin R. A. and Krajeinovic, D., *The Shock and Vibration Bulletin part 4 Structural Dynamics, Systems Identification, Computer Applications*, September (1977) .
- [6] Lamb, H. *Hydrodynamics*, New York (1932) .

## ANALYSIS OF THE DYNAMIC PLASTIC RESPONSE OF CYLINDRICAL SHELL FULL OF FLUID

Li Wenqing

### Abstract

In this paper, an analysis is presented for the dynamic plastic response of an ideal rigid-plastic cylindrical shell, full of fluid and with a limited length, under a symmetric rectangular impact loading. Under some simplify conditions, an analytic solution and a relationship among main parameters have been obtained for the influence of fluid on the dynamic plastic response of the cylindrical shell. By the numerical calculation, the influence of fluid on the limiting dynamic loading and final displacement of the shell has been compared with that of non-fluid shell. Some main graphs are also given.