

二维非定常流的滑移面计算

何高玉 周光镒

(1983年2月25日收到)

文中叙述了一种适用于具有滑移面的, 和时间有关的弹塑性流数值计算方法。推导了滑移运动的拉格朗日方程。详细描述了滑移面的结果。标准圆柱试验的数值模拟结果和实验十分符合。

在二维非定常流问题中, 滑移(即接触间断)是经常出现的一种力学现象。在滑移面上, 介质的法向速度连续, 切向速度间断, 运动微分方程失去意义, 必须用另外一组滑移运动方程来代替。

本文考虑弹塑性流, 假定滑移面是没有摩擦(无粘性)的光滑曲面, 用解析方法推导滑移运动方程, 并且提出滑移运动方程的一种差分格式, 最后给出一个数值计算实例。

一、滑移运动方程

在弹塑性流问题中, 根据质量、动量和能量守恒定律, 可以证明^[1]: 在滑移面上法应力连续, 切应力为零。这就是滑移面上的应力条件, 对于流体就是压力连续条件。

在连续区, 运动微分方程的Lagrange形式为

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = V(\nabla \cdot \sigma) \quad (1.1)$$

其中 $\vec{u} = (u, v)$ 是介质速度, V 是比容, σ 是应力张量。 $(\nabla \cdot \sigma)$ 的 x, r 分量分别是

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \sigma)_x &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xr}}{\partial r} + v \frac{\tau_{xr}}{r}, \\ (\nabla \cdot \sigma)_r &= \frac{\partial \tau_{xr}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + v \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

其中 $v = 1$ 对应于柱坐标系 $xr\theta$, $v = 0$ 对应于笛卡尔直角坐标系 xrz 。 $\sigma_x, \sigma_r, \sigma_\theta$ 是应力张量 σ 的法向分量, τ_{xr} 是切应力。

在 xr 平面上, 滑移面是一条随时间变化的曲线 Γ : $x = \phi_1(s, t), r = \phi_2(s, t)$, 这里 s 是弧长, t 是时间。 Γ 的单位切向量 $\vec{\tau}$ 和单位法向量 \vec{n} 为

$$\vec{\tau} = \frac{\partial \phi_1}{\partial s} \vec{i} + \frac{\partial \phi_2}{\partial s} \vec{j} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}, \quad (1.3)$$

$$\vec{n} = -\frac{\partial \phi_2}{\partial s} \vec{i} + \frac{\partial \phi_1}{\partial s} \vec{j} = -\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j},$$

其中 \vec{i} 和 \vec{j} 分别为 x 轴和 r 轴上的单位向量, $\alpha(s, t)$ 是切向量 $\vec{\tau}$ 同 x 轴的夹角。介质速度分解为切向和法向速度为 $\vec{u} = u_t \vec{\tau} + u_n \vec{n}$ 。

现在考虑运动方程(1.1)在滑移面 Γ 的切向和法向分量形式。为此, 考虑加速度 $\partial \vec{u} / \partial t$,

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \frac{\partial u_t}{\partial t} \vec{\tau} + u_t \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t} + \frac{\partial u_n}{\partial t} \vec{n} + u_n \frac{\partial \vec{n}}{\partial t} \quad (1.4)$$

我们来求 $\partial \vec{\tau} / \partial t$ 和 $\partial \vec{n} / \partial t$ 的表达式。设 Γ 的速度为

$$\vec{u}_L = \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \vec{i} + \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \vec{j} = u_{L,t} \vec{\tau} + u_{L,n} \vec{n} \quad (1.5)$$

滑移面 Γ 两侧的量分别用上标“+”和“-”来表示。由于法向速度连续, 即 $u_n^+ = u_n^- = u_{L,n}$, 于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t} &= \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t} \Big|_s + (u_t - u_{L,t}) \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial s} \\ \frac{\partial \vec{n}}{\partial t} &= \frac{\partial \vec{n}}{\partial t} \Big|_s + (u_t - u_{L,t}) \frac{\partial \vec{n}}{\partial s} \end{aligned} \quad (1.6)$$

现在来求 $\frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t} \Big|_s$, $\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} \Big|_s$, $\frac{\partial \vec{\tau}}{\partial s}$, $\frac{\partial \vec{n}}{\partial s}$ 与 $\vec{\tau}$ 和 \vec{n} 的关系。由(1.3)得

$$\frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t} \Big|_s = \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial s \partial t} \vec{i} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial s \partial t} \vec{j} = \frac{\partial \vec{u}_L}{\partial s} = \frac{\partial u_{L,t}}{\partial s} \vec{\tau} + u_{L,t} \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial s} + \frac{\partial u_{L,n}}{\partial s} \vec{n} + u_{L,n} \frac{\partial \vec{n}}{\partial s}$$

注意单位向量的微分垂直于该向量, 因此

$$\frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t} \Big|_s = \frac{\partial u_n}{\partial s} \vec{n} + u_{L,t} \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial s} \quad (1.7)$$

类似地可得

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} \Big|_s = -\frac{\partial u_t}{\partial s} \vec{\tau} + u_{L,t} \frac{\partial \vec{n}}{\partial s} \quad (1.8)$$

又由(1.3)可得

$$\frac{\partial \vec{\tau}}{\partial s} = \frac{\partial(\cos \alpha)}{\partial s} \vec{i} + \frac{\partial(\sin \alpha)}{\partial s} \vec{j} = \frac{\partial \alpha}{\partial s} \vec{n} = -\frac{1}{R} \vec{n} \quad (1.9)$$

这里 R 表示在 Γ 的点 (s, t) 上的瞬时曲率半径 $|\partial s / \partial \alpha|$ 。

类似地可得

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial s} = \frac{1}{R} \vec{\tau} \quad (1.10)$$

这样就得到了加速度的表达式

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \left[\frac{\partial u_t}{\partial t} - u_n \left(\frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{1}{R} u_t \right) \right] \vec{\tau} + \left[\frac{\partial u_n}{\partial t} + u_t \left(\frac{\partial u_t}{\partial s} - \frac{1}{R} u_n \right) \right] \vec{n} \quad (1.11)$$

代入运动方程(1.1), 分别写出切向和法向分量形式为

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} - u_n \left(\frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{1}{R} u_r \right) = V (\nabla \cdot \sigma) \cdot \vec{\tau} \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + u_r \left(\frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{1}{R} u_r \right) = V (\nabla \cdot \sigma) \cdot \vec{n} \quad (1.13)$$

由于滑移面上法向速度 u_n 连续, 因此 $\frac{\partial u_n}{\partial s}$ 和 $\frac{\partial u_n}{\partial t} \Big|_s$ 亦连续, 注意到

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \frac{\partial u_n}{\partial t} \Big|_s + (u_r - u_{Lr}) \frac{\partial u_n}{\partial s},$$

于是可得滑移运动方程组⁽²⁾

$$\frac{\partial u_r^\pm}{\partial t} - u_n \left(\frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{1}{R} u_r^\pm \right) = (V (\nabla \cdot \sigma) \cdot \vec{\tau})^\pm \quad (1.14)$$

$$(u_r^+ - u_r^-) \left[2 \frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{1}{R} (u_r^+ + u_r^-) \right] = (V (\nabla \cdot \sigma) \cdot \vec{n})^+ - (V (\nabla \cdot \sigma) \cdot \vec{n})^- \quad (1.15)$$

二、滑移计算公式

在二维数值计算中, 如果将计算区域划分为Lagrange网格, 用一条Lagrange网格线跟踪滑移面, 滑移面就成了一条折线。在这样的网格上, 可以将滑移运动方程组(1.14)、(1.15)中的微分写成差分, 然后求解差分方程。但是立刻就会发现, 由于两侧切向速度不同, 两侧界面的相互运动必然出现交错分离现象。为了避免这种情况, 在计算时一般要作“主从面”的假定。通常设密度大的一侧为“主面”, 另一侧为“从面”。

设网格线 $k = k_0$ 是滑移线, 如图2.1所示。又设“+”侧为“主面”, 而且 0^+ 和 0^- 是滑移线两侧最靠近的两点, 现在考虑这两点的速度 \vec{u}_0^+ 和 \vec{u}_0^- 的计算公式。

首先我们取过 2^+ 、 0^+ 、 4^+ 这三点的外接圆半径作为点 0 的瞬时曲率半径 \bar{R}_0 , 取外接圆的切向量作为点 0 的切向量 $\vec{\tau}_0 = (\cos \alpha_0, \sin \alpha_0)$ 。这样, 方程(1.15)左端的差分可以取为

$$\Delta_{\pm} \equiv \left[(u_r)_{0^+} - (u_r)_{0^-} \right] \left\{ \left[(u_n)_2 - (u_n)_0 \right] / |\Delta \vec{x}_{02}| + \left[(u_n)_0 - (u_n)_4 \right] / |\Delta \vec{x}_{04}| - \left[(u_r)_{0^+} + (u_r)_{0^-} \right] / \bar{R}_0 \right\} \quad (2.1)$$

其中 $(u_r)_0 = u_0 \cos \alpha_0 + v_0 \sin \alpha_0$, $(u_n)_0 = -u_0 \sin \alpha_0 + v_0 \cos \alpha_0$, $|\Delta \vec{x}_{02}| = [(x_0 - x_2)^2 + (r_0 - r_2)^2]^{1/2}$, $|\Delta \vec{x}_{04}|$ 亦类似。

方程(1.15)右端的差分可以按照在连续区方程(1.1)的差分格式类型而确定。例如, 用偏导数的迴路积分公式⁽³⁾ (对于任意函数 ψ)

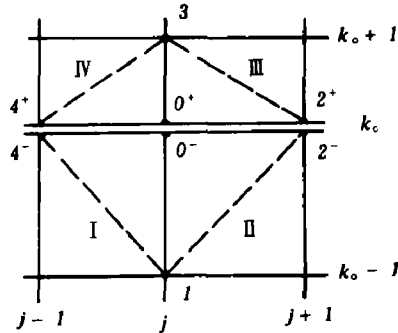


图 2.1

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{(x,r)} &= \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \oint_C \psi dr \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{(x,r)} &= \lim_{A \rightarrow 0} \frac{-1}{A} \oint_C \psi dx\end{aligned}\quad (2.2)$$

迴路 C 取点 O 的四个相邻网格角点连线组成的四边形(见图2.1), A 是 C 内部的面积,四条边上的物理量用网格量代替。

按照迴路积分公式(2.2),方程(1.15)右端的差分可以写成沿闭迴路 $12^-2^+34^+4^-1$ 的积分,同时也可以写成分别沿滑移线两侧的闭迴路 $12^-0^-4^-1$ 和 $2^+34^+0^+2^+$ 的积分之和。由于沿滑移线 02 的切应力为零,法应力连续。设法应力为 \bar{P}_0 ,于是,由 $dr = ds \cdot \sin a_0$, $dx = ds \cdot \cos a_0$,可得

$$\begin{aligned}& - \left(\int_{402} \sigma_x dr - \int_{402} \tau_{xr} dx \right) \sin a_0 + \left(\int_{402} \tau_{xr} dr - \int_{402} \sigma_r dx \right) \cos a_0 \\ &= - \int_{402} (\sigma_x \sin^2 a_0 + \sigma_r \cos^2 a_0 + 2 \tau_{xr} \sin a_0 \cos a_0) ds \\ &= - \int_{402} \sigma_n ds = - \bar{P}_0 (|\Delta \vec{x}_{02}| + |\Delta \vec{x}_{40}|)\end{aligned}\quad (2.3)$$

余下沿 4^-12^- 和 2^+34^+ 的积分可以分别写成

$$\begin{aligned}\Delta \bar{c} &= (\sigma_x \sin a_0 - \tau_{xr} \cos a_0)_{II} (r_1 - r_2) + (\sigma_x \sin a_0 - \tau_{xr} \cos a_0)_I (r_4 - r_1) \\ &\quad - (\tau_{xr} \sin a_0 - \sigma_r \cos a_0)_{II} (x_1 - x_2) - (\tau_{xr} \sin a_0 - \sigma_r \cos a_0)_I (x_4 - x_1) \\ \Delta \bar{c}^+ &= (\sigma_x \sin a_0 - \tau_{xr} \cos a_0)_{III} (r_2 - r_3) + (\sigma_x \sin a_0 - \tau_{xr} \cos a_0)_{IV} (r_3 - r_4) \\ &\quad - (\tau_{xr} \sin a_0 - \sigma_r \cos a_0)_{III} (x_2 - x_3) - (\tau_{xr} \sin a_0 - \sigma_r \cos a_0)_{IV} (x_3 - x_4)\end{aligned}$$

因此,由方程(1.15)的迴路积分型差分格式,可以解出法应力 \bar{P}_0 为

$$\bar{P}_0 = \frac{(\Delta \bar{c} + \gamma^+ - \gamma^-) - (V/2A)_0^- \Delta \bar{c} + (V/2A)_0^+ \Delta \bar{c}^+}{(|\Delta \vec{x}_{02}| + |\Delta \vec{x}_{40}|) [(V/2A)_0^- + (V/2A)_0^+]}\quad (2.4)$$

其中

$$\gamma^+ = \frac{\nu}{2} \left\{ [\tau_{xr} \sin a_0 - (\sigma_r - \sigma_\theta) \cos a_0]_{III} \cdot \left(\frac{A}{M} \right)_{III} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + [\tau_{xr} \sin a_0 - (\sigma_r - \sigma_\theta) \cos a_0]_N \cdot \left(\frac{A}{M} \right)_N \} \\
v^- = & \frac{v}{2} \left\{ [\tau_{xr} \sin a_0 - (\sigma_r - \sigma_\theta) \cos a_0]_I \cdot \left(\frac{A}{M} \right)_I \right. \\
& \left. + [\tau_{xr} \sin a_0 - (\sigma_r - \sigma_\theta) \cos a_0]_{II} \cdot \left(\frac{A}{M} \right)_{II} \right\} \\
\left(\frac{V}{2A} \right)_0^- = & 2 \left[\left(\frac{A}{V} \right)_I + \left(\frac{A}{V} \right)_{II} \right]^{-1} \\
\left(\frac{V}{2A} \right)_0^+ = & 2 \left[\left(\frac{A}{V} \right)_{III} + \left(\frac{A}{V} \right)_{IV} \right]^{-1}
\end{aligned}$$

这里 A 是网格面积, M 是网格质量, $v = 0$ 对应于笛卡尔直角坐标系, $v = 1$ 对应于柱坐标系。

用(2.4)式可以算出 $t = t^n$ 时刻的滑移面上的法应力 \bar{P}^n 。于是, 滑移面两侧的运动速度的过渡值可以用给定压力边界条件的速度公式来计算。因此, 在滑移面两侧在 $t = t^{n+1/2}$ 时刻的速度过渡值 u'_{0+} 和 u'_{0-} 的计算公式为:

$$\begin{aligned}
u'_{0+} = & u_{0+}^{n-1/2} + \Delta t \left(\frac{V}{2A} \right)_0^{n+} \left[(\sigma_x)_{III}^n (r_3^n - r_2^n) + (\sigma_x)_{IV}^n (r_4^n - r_3^n) \right. \\
& \left. + \bar{P}_0^n (r_2^n - r_4^n) - (\tau_{xr})_{III}^n (x_3^n - x_2^n) - (\tau_{xr})_{IV}^n (x_4^n - x_3^n) \right] \\
& - \frac{\Delta t \cdot v}{4} \left[(\tau_{xr})_{III}^n \left(\frac{A}{M} \right)_{III}^n + (\tau_{xr})_{IV}^n \left(\frac{A}{M} \right)_{IV}^n \right] \\
v'_{0+} = & v_{0+}^{n-1/2} + \Delta t \left(\frac{V}{2A} \right)_0^{n+} \left[(\tau_{xr})_{III}^n (r_3^n - r_2^n) + (\tau_{xr})_{IV}^n (r_4^n - r_3^n) \right. \\
& \left. - (\sigma_r)_{III}^n (x_3^n - x_2^n) - (\sigma_r)_{IV}^n (x_4^n - x_3^n) - \bar{P}_0^n (x_2^n - x_4^n) \right] \\
& - \frac{\Delta t \cdot v}{4} \left[(\sigma_r - \sigma_\theta)_{III}^n \left(\frac{A}{M} \right)_{III}^n + (\sigma_r - \sigma_\theta)_{IV}^n \left(\frac{A}{M} \right)_{IV}^n \right] \\
u'_{0-} = & u_{0-}^{n-1/2} + \Delta t \left(\frac{V}{2A} \right)_0^{n-} \left[(\sigma_x)_{II}^n (r_2^n - r_1^n) + (\sigma_x)_{I}^n (r_1^n - r_4^n) \right. \\
& \left. + \bar{P}_0^n (r_2^n - r_4^n) - (\tau_{xr})_{II}^n (x_2^n - x_1^n) - (\tau_{xr})_{I}^n (x_1^n - x_4^n) \right] \\
& - \frac{\Delta t \cdot v}{4} \left[(\tau_{xr})_{II}^n \left(\frac{A}{M} \right)_{II}^n + (\tau_{xr})_{I}^n \left(\frac{A}{M} \right)_{I}^n \right] \\
v'_{0-} = & v_{0-}^{n-1/2} + \Delta t \left(\frac{V}{2A} \right)_0^{n-} \left[(\tau_{xr})_{II}^n (r_2^n - r_1^n) + (\tau_{xr})_{I}^n (r_1^n - r_4^n) \right. \\
& \left. - (\sigma_r)_{II}^n (x_2^n - x_1^n) - (\sigma_r)_{I}^n (x_1^n - x_4^n) - \bar{P}_0^n (x_2^n - x_4^n) \right] \\
& - \frac{\Delta t \cdot v}{4} \left[(\sigma_r - \sigma_\theta)_{II}^n \left(\frac{A}{M} \right)_{II}^n + (\sigma_r - \sigma_\theta)_{I}^n \left(\frac{A}{M} \right)_{I}^n \right]
\end{aligned} \tag{2.5}$$

假定上标“+”的一侧为“主面”，上标“-”的一侧为“从面”，于是，滑移面两侧在 $t = t^{n+1/2}$ 时刻的速度为

$$\begin{aligned} \vec{u}_{o,+}^{n+1/2} &= \left[\frac{1}{2}(\vec{u}'_{o,+} + \vec{u}'_{o,-}) \cdot \vec{n} \right] \vec{n} + (\vec{u}'_{o,+} \cdot \vec{\tau}) \vec{\tau} \\ \vec{u}_{o,-}^{n+1/2} &= \left[\frac{1}{2}(\vec{u}'_{o,+} + \vec{u}'_{o,-}) \cdot \vec{n} \right] \vec{n} + (\vec{u}'_{o,-} \cdot \vec{\tau}) \vec{\tau} \end{aligned} \quad (2.6)$$

由此可以用 $\vec{R}'^{n+1} = \vec{R}^n + \vec{u}^{n+1/2} \cdot \Delta t$ 计算出 $t = t^{n+1}$ 时刻的过渡空间位置 $\vec{R}'^{n+1} = (x^{n+1}, r^{n+1})$ ，然后将从面点投影到“主面”上去，得到 $t = t^{n+1}$ 时刻的空间位置 \vec{R}^{n+1} 。

这里提出的滑移计算公式是从滑移运动方程 (1.14)、(1.15) 出发写出的一种差分格式。Cherry 等人⁽¹⁾ 提出了另一种计算公式，他们在计算滑移线上的法应力 \bar{P} 时，忽略了包含瞬时曲率半径 \bar{R} 的一项。显然当滑移线接近于一条直线时，这一项是可以忽略不计的。Wilkins⁽²⁾ 提出了另一种计算公式。他直接用线性插值的办法计算滑移线上的压力，“主面”速度按给定压力的边界公式计算，“从面”只计算沿“主面”滑动的切向速度，然后同“主面”的法向速度合成作为“从面”的速度。这些计算公式都在一定程度上描述了滑移现象，并且在一些实际问题的计算中是有效的。对于 Lagrange 方法，如果不对滑移面进行特殊处理，其结果往往会使滑移面附近的网格畸变，甚至出现网格相交而中断计算。因此，滑移处理是 Lagrange 方法中的一个重要问题。但是由于滑移计算的逻辑过程和计算公式复杂，一般程序只能考虑预先给定的少数几条滑移线。为了更有效地数值模拟滑移运动，还有待于对滑移现象及其计算方法作进一步的研究。

三、“标准园筒实验”的数值模拟

为了检验包含上述滑移处理的二维拉格朗日方法的精确性，我们计算了所谓“标准园筒实验”模型。实验的详细数据发表在文献(4)中。

所谓“标准园筒实验”，就是在一根内径为 2.54cm、厚度为 0.26cm、长度为 30cm 的金属铜管内装填满某种型号的炸药，使其一端点火。铜管炸药的一端起爆后，在铜管内逐渐形成一个向另一端传播的稳定爆轰波。在距离点火端 20cm 处，实验测量了铜壁外表面的半径随时间的变化。

(1) 计算模型。如图 3.1 所示，x 轴是铜管的旋转对称轴。轴向网格数和步长 Δx 在图上

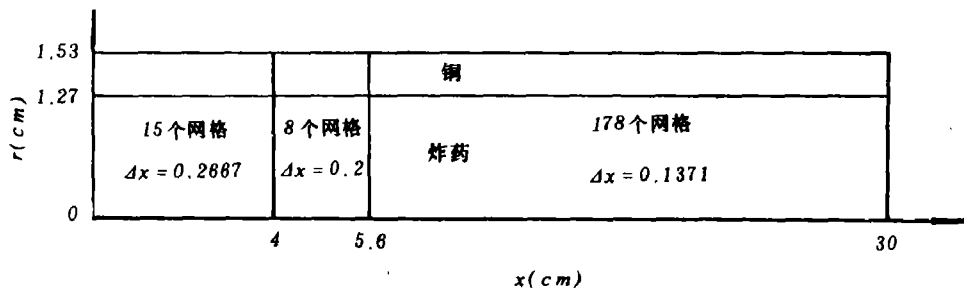


图 3.1

已分段标出，径向网格数在炸药内分 10 个网格，步长 $\Delta r = 0.127\text{cm}$ ，铜壁分 3 个网格，步长

$\Delta r = 0.08667 \text{ cm}$ 。铜壁和炸药的交界面处理作为滑移面。

(2) 状态方程。炸药爆炸产物用JWL状态方程⁽⁴⁾

$$P = A \left(1 - \frac{\omega \eta}{R_1} \right) \exp \left(-\frac{R_1}{\eta} \right) + B \left(1 - \frac{\omega \eta}{R_2} \right) \exp \left(-\frac{R_2}{\eta} \right) + \rho_0 e \omega \eta \quad (3.1)$$

其中 η 是压缩比 (ρ/ρ_0), ρ 是密度, e 是单位质量的内能, A 、 B 、 R_1 、 R_2 、 ω 、 ρ_0 、 e_0 都是参数, 可以在文献[4]中找到。

铜的状态方程为

$$P = P_H(\eta) + \rho_0 \gamma_0 [e - e_H(\eta)] \quad (3.2)$$

其中

$$P_H(\eta) = \frac{\rho_0 c_0^2 \eta (\eta - 1)}{[\eta - \lambda (\eta - 1)]^2}$$

$$e_H(\eta) = e_0 + \frac{c_0^2 (\eta - 1)^2}{2 [\eta - \lambda (\eta - 1)]^2}$$

这里 ρ_0 、 c_0 、 λ 、 γ_0 、 e_0 均为参数。

(3) 燃烧函数。连结反应前和反应后的过渡区里的炸药状态方程为

$$P = P(\eta, e) \cdot F \quad (3.3)$$

其中 $P(\eta, e)$ 是(3.1)式右端, F 是燃烧函数 ($0 < F < 1$)。

我们取燃烧函数的形式为

$$F = [\text{Max}(F_1, F_2)]^2 \quad (3.4)$$

其中 $F_1 = (t - t_b) \cdot D_{CJ} / 2 \Delta R$, $F_2 = (1 - V) / (1 - V_{CJ})$, t_b 是炸药网格点火的时间, 它由网络的四个角点速度 \vec{u}_i 确定, 即当满足条件

$$\sum_{i=1}^4 (|u_i| + |v_i|) > \varepsilon_b$$

时, 炸药网格点火。

D_{CJ} 是炸药的爆速。 ΔR 是在爆轰波传播方向上的网格尺度, $V = 1/\rho$ 是比容, V_{CJ} 是炸药的 Chapman - Jouguet 比容。

ε_b 对不同炸药取不同值, 对 TNT 取 $\varepsilon_b^{\text{TNT}} = 0.04 \text{ cm}/\mu\text{s}$, 对 PBX - 9404 取 $\varepsilon_b^{\text{9404}} = 0.05 \text{ cm}/\mu\text{s}$ 。对于任意一种炸药 HE, ε_b 近似满足 $\varepsilon_b^{\text{HE}} = 0.04 D_{CJ}^{\text{HE}} / D_{CJ}^{\text{TNT}} (\text{cm}/\mu\text{s})$ 。

(3.4) 式当 $F \geq 0.96$ 时, 令 $F = 1$ 。

(4) 计算结果。我们对 TNT 和 PBX - 9404 两种炸药进行了计算。图 3.2 - 3.5 显示了计算结果的图象。当炸药柱左端起爆以后, 爆炸产物与铜壁之间出现很大滑移 (如图 3.4, 3.5 所示)。管口附近滑移很明显。就是在铜管的中段, 铜壁的切向 (即轴向) 速度接近于零, 而炸药的切向速度可达 $0.4 \text{ cm}/\mu\text{s}$ 以上。用上述公式计算出的滑移过程清楚, 界面光滑。管壁局部位置出现的微小跳动, 是由于管口附近网格分点不均匀引起的。我们试验过, 把不同步长 ΔX 的交界位置从 4 cm 和 5.6 cm 处 (参看图 3.1) 分别移动到 9 cm 和 13 cm 处, 计算出

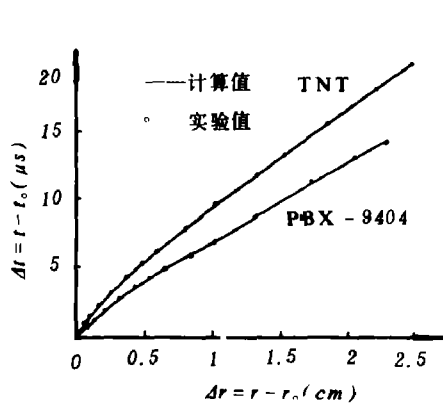


图3.2 铜管外壁 $t-r$ 图

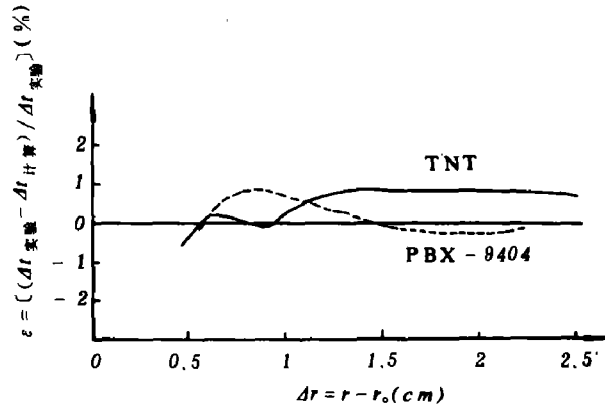


图3.3 铜管外壁运动计算值与实验值的相对误差曲线

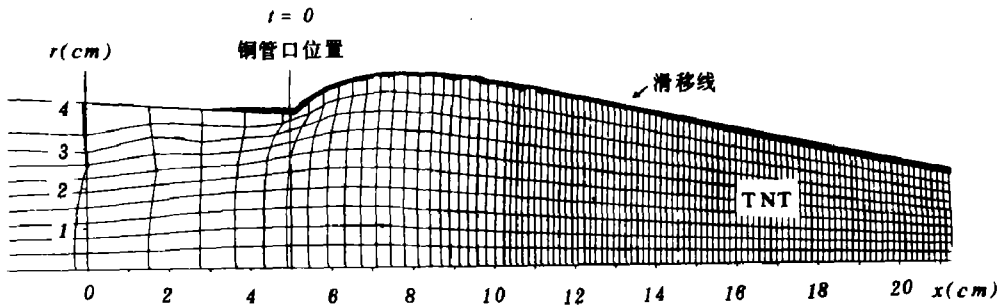


图3.4 TNT 炸药柱起爆后 $t = 32 \mu s$ 时网格图

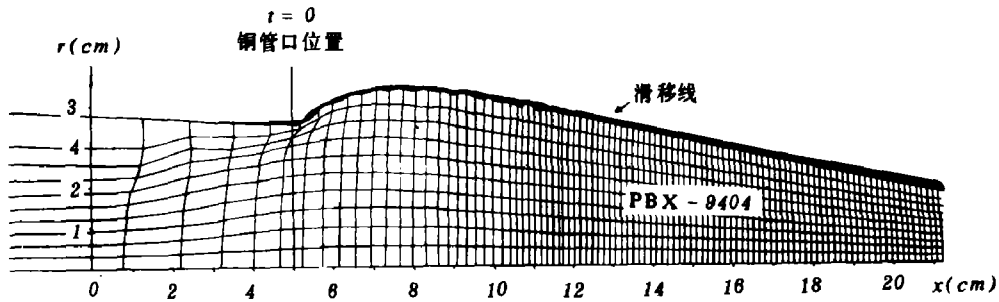


图3.5 PBX-9404 炸药柱起爆后 $t = 22 \mu s$ 时网格图

的管壁跳动位置也相应地移动了。因此，图上的管壁跳动同滑移处理无关。由于我们感兴趣的管壁运动位置 X 是在 10cm 处(在图3.4, 3.5上是在 15cm 处)以后，因此管口附近的跳动对计算结果没有影响。

图3.2显示了铜管外壁运动的 $t-R$ 图,其中 t_0 是铜管外壁开始向外运动的时间, $r_0 = 1.53\text{cm}$ 。图上的实验曲线取自文献(4),可以看出计算值和实验值符合得很好。图3.3显示了计算值同实验值的相对误差曲线,可以看出对TNT和PBX-9404两种炸药的计算误差都在1%以内。

在本文写作过程中,水鸿寿同志提出了宝贵的意见,李银成同志提供了部分文献资料和状态方程参数;特此表示感谢。

参 考 文 献

- (1) Cherry, J. T., et al., *UCRL-50987* (1970) .
- (2) Grandey, R., *AD-256328* (1961) .
- (3) Wilkins, M. L., *UCRL-7322 (Rev. 1)* (1969) .
- (4) Lee, E. L., et al., *UCRL-50422* (1968) .

CALCULATION OF SLIDING INTERFACES FOR TWO-DIMENSIONAL UNSTEADY FLOW

He Gaoyu Zhou Guangyi

Abstract

A new technique is described for the numerical investigation of the time-dependent elastic-plastic flow with sliding interfaces. The Lagrangian equations of sliding motion are derived analytically detailed results for sliding interfaces are described. Numerical simulation results of standard cylinder test are in good agreement with experimental data.