



## 爆炸冲击研究中的数值模拟

李德元 李维新

(1983年4月20日收到)

### 一、基本方程组

在对爆炸和冲击问题进行数值模拟时,使用的基本方程是理想流体力学方程组。

爆炸和冲击是一种十分复杂的现象,它包括化学的、物理的和力学的过程。这些过程在时间发展上可能是定常的或不定常的,在空间上可以是一维、二维或三维的,不论哪种情况,都应遵循基本的质量、动量和能量守恒定律。流体力学方程组就是这些守恒定律的一种数学表达形式。

众所周知,象TNT这样的固体炸药,爆炸之后在金属中将产生十几万到几十万巴的压力;两物体的高速碰撞和冲击,也将产生类似的结果;核爆炸产生的压力则可达千万巴以上。这些压力都远远超过固体物质的屈服强度。在这样的高压下,物质发生高速变形和出现不能忽略的热效应,呈现为流体状态,或者说,物质的行为非常接近所谓的热弹性流体。这时,物质抗剪切的强度的影响及粒子间的热传导效应都可忽略不计。当物质可以忽略其粘性和热传导时就称为理想流体。如果再增高压力和温度,则分子间的相互作用势能也可忽略不计,这就是所谓的完全气体。实践表明,用理想流体力学方程组描述高压下固体物质的运动是成功的。这里,重要的是要正确选取物质的状态方程。

物质作流体处理时,是将它视为所谓的连续介质,即认为物质是由无数流体微团连续组成的。每个微团的尺度与整个流场相比非常之小,而与分子和晶格结构相比又非常之大,其中包含着无穷多的分子。这些微团就是流体的最小单元,通常称之为流体质点。各质点的性质由密度、速度、内能、压力等特征量来表征。这些量体现的是质点内部无穷多分子的统计平均性质,因而都是宏观量。不定常理想流体力学方程组就是这些量作为时间和空间函数的下列微分方程组:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{u} \vec{u} + \operatorname{grad} p = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div} \rho E \vec{u} + \operatorname{div} p \vec{u} = 0 \quad (3)$$

其中 $\rho, \vec{u}, E, p$ 分别表示密度、速度、单位质量的总能量和压力。它们都是空间坐标 $\vec{x}$ 和时间 $t$ 的函数。总能 $E$ 是内能 $e$ 与动能 $1/2 |\vec{u}|^2$ 之和,即

$$E = e + \frac{1}{2} |\vec{u}|^2$$

方程(1)、(2)、(3)与物质的状态方程

$$p = p(\rho, e) \quad (4)$$

构成一个封闭的方程组。在给定了适当的初始条件和边界条件后就可以进行求解。

不定常流体力学方程组是一组拟线性双曲型方程，只在个别极简单的情况下才能求得解析解，一般情况下只能近似求解。在出现了高速电子计算机以后，就可以用数值方法对它求解。人们针对各种实际问题求出这组方程的数值解，描述运动的局部图象或全过程，这就是所谓的数值模拟。我们知道，许多爆炸和冲击问题的实验耗资巨万，时间周期长，安全性差，还有些由于受测试手段的限制，无法测量现象的内部细微过程，这些都可以通过数值模拟在一定程度上得以弥补。当然，数值模拟不能代替实验，因为，首先是数值模拟采用的方程（包括状态方程）不可能完整地、确切无误地反映实际的物理力学运动过程；其次，数值模拟采用的计算方法，总是不同程度的近似方法，因而数值模拟本身在定性定量上的正确性和精确度，归根到底也有待实验结果加以验证。所以，数值模拟只能是爆炸与冲击研究工作的各种有用的手段之一。

本文只就不定常理想流体力学方程组的数值方法作一简要的介绍。这里要说明的是，方程组(1) — (4)所给出的理想流体力学的数学模型并非对所有爆炸与冲击的问题都是完全合适的。在研究不同的具体问题时，有时还要根据不同的性质和需要，对上述基本方程组增减某些项，甚至某个方程。例如，当作用在固体上的压力不太大时（例如物体碰撞、冲击波在自由面上反射、子弹或射流的穿甲问题等等），介质就应作为弹塑性介质处理。这时使用的是上述流体力学方程组加上弹塑性考虑，也就是在动量方程中要加进应力偏量项；有时还要加进物质粘性应力项，引进表征应力应变关系的所谓弹性本构方程等。又如爆炸作用下的水介质、自由飞行过程中的金属飞片等等，在运动过程中密度变化很小，就可作为不可压缩流体处理。一般说来，当物体运动速度远小于声速时，物质就可视为不可压缩流体。这时，方程形式又有新的变化，求解时又有新的问题。再例如，在研究不定常爆轰的问题时，还要在能量方程中加进化学能源项，要增加反应率方程等等。这里限于篇幅就不一一叙述了。

## 二、一维问题

流体力学方程组可以建立在空间固定的欧拉坐标系中，如同方程(1) — (3)就是，也可以建立在跟踪流体质团的拉格朗日（以后简称拉氏）坐标系中。习惯上将解欧拉坐标系中流体力学方程的方法称为欧拉方法，而将跟踪质团解出固定质团上各量变化的方法称为拉氏方法。

由于在一维（包括平面对称、柱对称、球对称）运动过程中流体质团是有序的，即如果初始时质团 $M_1$ 位于质团 $M_2$ 的左边，则在整个运动过程中 $M_1$ 始终都在 $M_2$ 的左边，所以在数值模拟中，拉氏方法是十分有效的。拉氏坐标系中的一维流体力学方程组可以写成

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\rho_0}{\rho} \left( \frac{r}{R} \right)^{\alpha-1} \quad (5)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = u \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{R}{r} \right)^{\alpha-1} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (7)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = - p \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \right) \quad (8)$$

其中方程(5)是从欧拉坐标 $R$ 变到拉氏坐标 $r$ 的坐标变换关系式， $\rho_0$ 是任意选择的具有密度量纲的参数， $\alpha=1, 2, 3$ 对应于平面、柱面、球面对称的情况。这个变换关系式是按质量守恒原则建立的，所以方程(5)在这里同时也代表质量守恒方程。若再利用它去变换方程(1)，则可得质量守恒方程的

另一表达形式

$$\frac{1}{dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho_0 r^{a-1}} (R^{a-1} u) = 0 \quad (9)$$

拉氏方法有许多优点。由于方程形式比较简单, 所以容易建立精确度较高而又稳定的格式。对描述局部图象, 可以将网格分细而得到较为精确的结果。特别是, 由于拉氏方法是跟踪质团的, 所以适宜于计算多种介质的系统, 能使不同介质之间的界面保持清晰, 自由面的处理也比较容易。最早的流体力学数值方法, 著名的 von Neumann - Richtmyer 格式就是解方程(5)——(8)的拉氏方法。这种方法对很多一维流体模型的计算都是合适的。

解一维流体力学方程的欧拉方法中较有特色的是苏联的 Годунов (1959) 方法。以一维平面对称的情况为例, Годунов 方法从积分形式的流体力学方程出发:

$$\oint_{\partial\Omega} \rho dx - \rho u dt = 0 \quad (10)$$

$$\oint_{\partial\Omega} \rho u dx - (\rho u^2 - p) dt = 0 \quad (11)$$

$$\oint_{\partial\Omega} \rho e dx - (\rho eu + pu) dt = 0 \quad (12)$$

这里  $\Omega$  取作  $(x, t)$  平面上的任一矩形网格,  $\partial\Omega$  是它的边界。如果将力学量离散化以后的值取在网格上下底的中心处, 则从(10)——(12)可以看出, 离散化以后的差分格式中, 将出现网格左右边界处的力学量。Годунов 格式和一般格式不同之点就在于, 它不是把网格边界两侧中心处的量带上某种权重进行数学平均以近似网格边界上的值, 而是根据网格中心的力学状态, 作严格的间断分解 (黎曼问题), 求出分解的精确值来作为网格边界上的量。Годунов 格式后来发展为二维方法, 曾用来计算许多爆炸和冲击的问题, 例如冲击波对障碍物的二维绕射、点爆球面波与平面的相互作用、非球装药的爆炸等等。

特别值得一提的是 Glimm (1965) 曾经利用 Годунов 格式, 引入一个随机变量后构造了拟线性双曲型守恒律组初值问题的解, 从而证明了大范围弱解的存在性。只是 Glimm 的证明对初始条件有很严格的限制, 他假定了初值要近似地等于一个常数。从那时起有不少作者企图将 Glimm 构造解的方法变成一种实际可用的计算方法。后来 Chorin (1976) 将这种方法应用到包含化学反应的流体力学 (例如燃烧问题) 的计算中取得了成功, 特别是算出来的冲击波 (间断) 波面是陡峭的, 只占一个网格, 不象 von Neumann - Richtmyer 加人工粘性的方法, 将间断解变成在几个网格上急剧变化的光滑解。现在一般称这种方法为 Glimm 方法或随机选取法 (RCM 方法)。

### 三、二维问题

二维流体力学计算方法的研究开始于五十年代中期。到了六十年代, 二维流体力学计算方法的研究进入了一个鼎盛时期, 发表了大量的计算格式, 并编制了许多程序/软件。在六十年代末期, Harlow (1969) 曾经编写了一个二维流体力学计算方法评述性的目录, 列出了一百多篇文献和几十种程序的名称。二维流体力学计算方法之所以出现这种百花齐放的局面, 主要是由于二维流体力学运动的图象极其复杂, 很难找到一种普适的格式能定量地 (至少是定性) 计算出所有各种图象来。事实上, 对于不同的模型往往需要采用不同的格式进行计算, 有时, 甚至对同一模型在运动的不同阶段, 还要采用不同的格式, 才能把整个运动过程计算出来。

由于作为拉氏方法的 von Neumann - Richtmyer 格式在一维流体力学计算中十分有效, 所以在二维方法研究的初期也尝试用拉氏方法来解二维流体力学问题。五十年代中期 Kolsky (1955)

构造的第一个二维格式就是跟踪质团的拉氏方法。二维拉氏方法离散化格式的建立基本上有两种办法。一是将方程(1)——(3)在固定的随流体运动的网格(在柱面情况下有的也取成网格的旋转体体积)上积分,然后写出这些积分的离散化近似表达式,从而得到差分格式。另一种是将方程(1)——(3)变换到拉氏坐标系中,再用差商去逼近微商。Kolsky格式是用前一种方法建立起来的。

二维拉氏方法当然保持了一维拉氏方法的优点,但是二维流体运动中可能出现严重的扭曲现象,因而会造成拉氏网格相交,致使计算不能继续下去。尽管如此,对于一些变形不太严重的力学模型,拉氏方法仍不失为一种有效的方法。因此,在Kolsky之后还有不少作者,例如Browne(1966), Good(1960), Schulz(1964), Wilkins(1964), Fritts, Boris(1979)等人都对拉氏方法作了进一步的研究,建立了一些格式,并编制了一些程序(例如MAGEE, TENSOR, HEMP, TOODY等)。

克服拉氏方法网格相交的一个有效措施是Browne提出来的重分网格的方法。这就是每一步(指时间步长)或经过若干步,将拉氏网格重新划分一次,把由于扭曲而显得畸形的网格换成尽可能规整的新网格。新网格的各力学量是用旧网格上的相应量按照质量、动量、能量守恒原则重新计算得到的。当然,这样的拉氏方法严格说已经不再是跟踪流体质团的拉氏方法,而是一种下面要提到的任意拉格朗日—欧拉方法了。

在拉氏方法中速度离散化以后的值往往取在网格的角点处,这就意味着假定了在网格角点(包括位于接触间断面上的网格角点)处速度是连续的。这个假定是不符合物理实际的,因为对于接触间断,除了一类所谓的特殊间断是具有速度连续的性质外,还有一类所谓的切向间断,对于它只有法向速度是连续的,而切向速度是间断的。例如熟知的园筒实验,爆轰产物在园筒内壁处的运动就是滑移运动,即切向速度是间断的。如果不加特殊处理,这样构造的格式是不能计算接触间断面处的滑移现象的。解决这个问题的办法是在间断面(滑移面)两侧分别计算不同的切向速度。但是在数值计算中,要把微分化为差分,曲线用折线近似,如果真的在滑移面两侧分别计算切向速度,随之定出网格角点的位置,那末,就有可能使两侧物质合不拢,产生界面分离或渗透的现象。因而,Grandey(1961)和Wilkins(1964)都曾建议采用“主从界面”的方法,即假定滑移面某一侧的物质为“主”,另一侧的为“从”。(一般以密度大的物质为“主”,密度小的为“从”。)界面的运动由“主”介质区的压力分布决定,“从”介质则被看成是在沿着一个固定边界运动。现在,有不少拉氏方法的程序,例如HEMP, TOODY, TENSOR,都加进了滑移面的计算,但其处理方法不完全相同。

关于欧拉方法,早期的有Pusanov(1961)的格式和Rich(1963)的格式,后者以后发展为Gentry, Martin, Daly(1966)的流体网格法(FLIC方法),成为二维欧拉方法中比较典型的一种方法。欧拉方法当然没有网格相交的困难,适合于计算变形严重的问题。但是当系统中包含多种介质从而存在着界面(包括自由面)的时候,欧拉方法就碰到了困难。这是因为这时一定会出现所谓的混合网格,即在该网格中同时含有两种或几种物质。如何计算混合网格中的各力学量以及它们向周围网格(可能是混合网格,也可能不是)的输运量,都需作特别处理。

早期发表的在欧拉矩形网格上计算多种介质的方法是质点网格法(PIC方法)。它的思想和做法对以后许多二维流体力学计算方法有较深的影响。PIC方法中流体具有两重性,即一方面把流体看成是连续介质,从而计算网格间没有物质运输的情况下流场的变化;另一方面又把流体看成是若干个具有一定质量的质点,然后在固定的欧拉矩形网格上研究这些质点的运动,以及质量、动量和能量的输运。PIC方法具有一般欧拉方法所具备的优点,能够计算变形比较严重的二维流动问题。同时,由于引入了相当于拉格朗日质量团的质点,又避免了一般欧拉方法的缺点,具有计算多种介质和处理自由面运动的能力,因而是一种比较成功的方法。用此方法计算冲击波过障碍物的绕流、两个大小不同的物体之间的高速碰撞等,都得到较好的结果。但是,由于引进了质点,除了要计算和

存贮各网格上的诸力学量外,又增加了要计算和存贮大量质点的有关参量。因而,质点网格法对计算机的速度和存贮量的要求都比较高。

到了六十年代中期,最初由 Harlow, Welch (1965) 发表的计算不可压缩粘性流体力学的标志网格法 (MAC 方法) 中,把质点换成了无质量的标志,对计算多种介质的系统很有成效。这种做法后来发展为,只在物质界面两侧的两三个网格内置放一批分别代表两侧物质的不同标志,跟踪它们并利用它们来计算混合网格的力学量及其向周围网格的输运量。Harlow, Amsden (1974) 在 GILA 方法中就采用了这种技巧。

为了在欧拉网格上计算含多种介质的问题,除上述用质点和标志的办法外,还有两种完全不同的做法。一种是在欧拉网格上跟踪界面的位置,例如 Noh (1964) 的 CEL 方法和 Hageman, Walsh (1971) 发表的 HELP 程序就是采用这种做法。这样,从原则上来说,在出现界面的网格中,各种物质各占据什么位置是清楚的,于是就可以着手计算混合网格中的各力学量和它们在边界上的输运量。但是,在程序中实现这样的计算是一项十分复杂的工作。另一种作法则不要求定出界面的位置,而只需知道:哪些网格是混合网格,则界面就位于这些网格之中;或者哪两个相邻网格中是不同的物质,则这一对网格的共同边界就是物质界面。然后按相邻网格中各物质的体积份额或质量份额来确定通过网格边界的输运量中该物质占的份额。Kershner, Mader (1972) 发表的 2DE 方法和徐国荣等人 (1980) 的做法都是这样处理多种物质的计算的。Noh, Woodward (1976) 的 SLIC 方法,在计算混合网格向周围网格输运时,把混合网格中不同流体的位置图式化,可以处理在一个混合网格中含有任意多种物质的情形。他们用这种方法计算了高能炸药袭击一个放在钨架上的铜质半球壳的模型。

在欧拉方法中须要特别注意的是在网格边界上输运项差分格式的写法。以一维动量方程为例,该方程是

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

其输运项  $\partial \rho u^2 / \partial x$  的差分近似\* 可写为

$$\frac{1}{\Delta x} [(\rho u^2)_{j+1/2} - (\rho u^2)_{j-1/2}]$$

一般对于  $(\rho u^2)_{j+1/2}$  可以有四种近似

1) 算术平均:

$$\rho_{j+1/2} [(u_j + u_{j+1}) / 2]^2$$

2) 交错型:

$$\rho_{j+1/2} u_j u_{j+1}$$

3) 贡献网格近似:

$$\rho_{j+1/2} u_j^2 \quad \text{当 } u_j + u_{j+1} > 0$$

$$\rho_{j+1/2} u_{j+1}^2 \quad \text{当 } u_j + u_{j+1} < 0$$

4) 部分贡献网格近似:

$$\rho_{j+1/2} u_j \frac{1}{2} (u_j + u_{j+1}) \quad \text{当 } u_j + u_{j+1} > 0$$

$$\rho_{j+1/2} u_{j+1} \frac{1}{2} (u_j + u_{j+1}) \quad \text{当 } u_j + u_{j+1} < 0$$

容易看出,算术平均和交错型近似都是二阶精确度的,而贡献网格近似(包括部分贡献网格近似)的

\* 在很多欧拉方法中,差分离散化以后各量是这样取值的:密度  $\rho$  取在网格中心  $x_{j+1/2}$  处,速度  $u$  取在网格边上。以下的格式是按这种取法建立的。

精确度却是一阶的。但是,前两种差分格式是不稳定的,而后两种格式是稳定的。

六十年代以来,对于欧拉坐标系中的二维流体力学方程,建立了大量的高阶精确度的显式格式。这里所谓的高阶精确度是指差分格式的截断误差对时间和空间步长至少都是二阶的。这方面工作的开展,是由于只用分细网格的办法来提高二维流体力学数值解的精确度,势必导致对电子计算机的容量和速度提出很高的要求;因此人们设想,能否用比较精确的差分格式,在比较粗的网格上计算出满意的结果来,Lax, Wendroff(1960)就一维流体力学欧拉守恒形式的方程建立了一个二阶精确度的显式格式。Richtmyer(1963)用两步法得到一个二阶精确度的格式。随后,Lax, Wendroff(1964)又把高阶精确度的格式推广到二维情况,但是这个格式在实际运算过程中包含有矩阵的乘积,运算量过大。Burstein(1967)改进了他们的算法,并把它发展成为“两步法”。其后Strang(1968), Gourley, Morris(1970), MacCormack(1970)等许多作者又先后发表了一些关于解双曲型方程组的二步法和多步法。以上的这些格式的截断误差都是二阶的。Rusanov(1970)和Burstein, Mirin(1970)还建立了三阶精确度的格式。Zwas, Abarbanel(1971)则建立了四阶精确度的格式。这些高阶精确度的格式,由于是纯粹的欧拉方法,因而只适合于计算单种介质的问题。

由于拉氏方法和欧拉方法各有其优点,从而各有其适应的对象和范围,因此逐渐发展了一些欧拉和拉氏相结合的方法,企图发挥各种方法的长处而避免其弱点。前面提到的PIC方法和GILA方法就属于这一类型。Frank, Lazarus(1964)提出了一种混合欧拉拉格朗日方法,把一个空间坐标取作固定的欧拉坐标,而另一个空间坐标取作拉氏坐标;Noh(1964)的耦合欧拉拉格朗日方法(CEL方法)则是将求解区域划分为若干子区域,在一些子区域上用欧拉方法,而在另一些子区域上用拉氏方法。Hirt, Amsden, Cook(1974)发表的任意拉格朗日欧拉方法(ALE方法),解方程

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{D(t)} \rho dV &= - \oint_{\partial D(t)} \rho (\vec{u} - \vec{D}) \cdot \vec{n} ds \\ \frac{d}{dt} \int_{D(t)} \rho \vec{u} dV &= - \oint_{\partial D(t)} \rho \vec{u} (\vec{u} - \vec{D}) \cdot \vec{n} ds - \int_{D(t)} \text{grad } p dV \\ \frac{d}{dt} \int_{D(t)} \rho E dV &= - \oint_{\partial D(t)} \rho E (\vec{u} - \vec{D}) \cdot \vec{n} dS - \oint_{\partial D(t)} p \vec{u} \cdot \vec{n} dS \end{aligned}$$

其中 $D(t)$ 是空间的一个活动的区域, $\partial D(t)$ 是它的边界, $\vec{D}$ 是 $\partial D(t)$ 的速度。如果 $D(t)$ 是一个网格,则 $\vec{D} = 0$ 时就是欧拉方法; $\vec{D} = \vec{u}$ 时是拉氏方法; $\vec{D}$ 既不等于零又不等于 $\vec{u}$ 时,就是任意拉格朗日欧拉方法。一般的拉氏方法,在加上重分网格的措施以后,也是一种任意拉格朗日欧拉方法。所有这些任意拉格朗日欧拉方法都有一个在给定边界的区域上如何构造合适的网格的问题。七十年代以来有不少作者,如Barfield(1970),Amsden, Hirt(1973),Белинский, Годунов, Иванов, Яненко(1975)等,都研究了如何在给定的区域上按照一定的要求来构造网格的问题。

#### 四、粘性和稳定性分析

众所周知,在爆炸和冲击的过程中经常出现冲击波、接触间断等现象。这对应着流体力学方程组(1)——(3)存在着间断解。这正是数值模拟的难点所在。

对于强间断(即冲击波)的计算历来有两种方法。一种是激波装配法,将间断面看成是块块连续解的边界,在连续解区域内用差分方法求解,而在间断面上给出兰金-雨贡纽条件作为内边界条件。另一种是激波捕捉法,在差分格式中引入人为粘性将间断解光滑化。这种方法对于处理可压缩流体非定常运动中可能出现多个激波、接触间断和一系列波的相互作用的复杂图象,是比较有效的。

这种加入人为粘性的方法,最早是在四十年代中期,由von Neumann和Richtmyer在计算炸

药爆炸后冲击波在金属中传播的问题时提出的。他们的思想和做法可归纳为三点：(1)在动量方程和能量方程的压力项中加上人为粘性，这就是流体运动中引进了某种人为耗散机制，使得冲击波间断解变成一个在相当狭窄的过渡区域内急剧变化的，但却是连续的解；(2)要求所加的人为粘性项只起到使冲击波间断光滑化的作用，而基本上不会影响冲击波过渡区域以外的连续解的计算结果，可以近似地满足冲击波间断条件；(3)冲击波过渡区的范围应限制在几个空间步长以内，并且这个过渡区在计算过程中不会扩大，而过渡区的速度应逼近真实的冲击波速度。

von Neumann, Richtmyer(1950)首先在一维拉氏坐标系的方程(5)——(8)中引入人为粘性  $q$ ，他们在动量方程(7)和能量方程(8)中将压力  $p$  换成

$$P = p + q$$

$$q = \begin{cases} l^2 \rho \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 & \text{当 } \frac{\partial u}{\partial r} < 0 \\ 0 & \text{当 } \frac{\partial u}{\partial r} \geq 0 \end{cases} \quad (13)$$

其中  $l$  是一个具有长度量纲的数，一般写成  $a\Delta r$  的形式， $\Delta r$  是步长， $a$  是按照计算要求事先选定的大约等于 2 的常数。这是一个非线性粘性。Landshoff(1955)则建议用线性粘性

$$q = \begin{cases} l_0 \rho C \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| & \text{当 } \frac{\partial u}{\partial r} < 0 \\ 0 & \text{当 } \frac{\partial u}{\partial r} \geq 0 \end{cases} \quad (14)$$

其中  $C$  是声速。或者用线性粘性与非线性粘性的迭加：

$$q = \begin{cases} l^2 \rho \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + l_0 \rho C \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| & \text{当 } \frac{\partial u}{\partial r} < 0 \\ 0 & \text{当 } \frac{\partial u}{\partial r} \geq 0 \end{cases}$$

最近 Wilkins(1980)将 von Neumann - Richtmyer 粘性推广到了多维计算中。

在加入人为粘性项的做法的启发下，人们自然会想到在方程组中再分别加上适当的质量、动量和能量的扩散项，也可以使间断解光滑化。这种做法中比较典型的可以举出 Русанов(1961)格式。有的格式尽管没有明显地加上人为扩散项，但实际上在格式中已隐含了这样的项。比如，一维双曲型方程组

$$\partial \vec{U} / \partial t + \partial \vec{F}(\vec{U}) / \partial x = 0 \quad (15)$$

的著名的 Lax 格式

$$\frac{\vec{U}_j^{n+1} - (\vec{U}_{j+1}^n + \vec{U}_{j-1}^n) / 2}{\tau} + \frac{\vec{F}_{j+1}^n - \vec{F}_{j-1}^n}{h} = 0 \quad (16)$$

就是一例。格式(16)可以化为

$$\frac{\vec{U}_j^{n+1} + \vec{U}_j^n}{\tau} + \frac{\vec{F}_{j+1}^n - \vec{F}_{j-1}^n}{h} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{\tau} \frac{\vec{U}_{j+1}^n - 2\vec{U}_j^n + \vec{U}_{j-1}^n}{h^2} \quad (17)$$

因此, 格式 (16) 相当于在解方程组 (15) 时, 在它右端加上了人为扩散项

$$\frac{1}{2} \frac{h^2}{\tau} \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial x^2}$$

的新方程组。这种隐含在格式内的附加扩散项, 就称为格式粘性。按照 Hirt (1968) 的稳定性理论, 任何稳定的流体力学方程组的差分格式, 或者都外加了人为粘性项, 或者格式本身都隐含着格式粘性项。

Hirt 的稳定性理论实际上是判定差分格式稳定性必要条件的一种方法。他的做法是把差分格式在某确定点上作 Taylor 级数近似展开, 略去高阶项, 只留下最低阶的截断误差项, 就得到差分格式的微分近似。如果差分格式和原微分方程是相容的, 那么, 上述的微分近似与原微分方程相比, 只增加了一些含有小参数的较高阶导数的附加项。Hirt 认为: 原来方程的差分格式与其微分近似同样相容, 因而格式稳定的必要条件是, 微分近似的定解问题是适定的。这样来分析一些复杂的非线性微分方程差分格式的稳定性, 尽管不是严格的, 但在实践中是有用的。

讨论流体力学方程组的差分格式稳定性的另一种简单的同样不严格的方法是线性化的方法, 即先将差分方程组线性化, 并把系数看作常数。然后用 Lax-Richtmyer (1956) 的常系数差分格式的稳定性理论对它进行分析, 最后把所得到的稳定性条件中所包含的系数仍然恢复到原来的非线性形式。但是, 在实际使用这些稳定性条件来作计算过程中选择步长的依据时, 须要增加一些安全系数, 一般可用试算的办法来确定其取值的范围。

## NUMERICAL MODELING ON THE STUDIES OF EXPLOSIVE AND SHOCK WAVES

Li Deyuan Li Weixin

会议消息

### 梅特博士等来华讲学

梅特博士 (Dr. Charles L. Mader) 是研究炸药爆轰理论的专家, 应北京工业学院丁懋付院长的邀请于 83 年 10 月来北京讲学。讲授内容为:

(1) 洛斯·阿拉莫斯实验室概况——实验和数值模拟; (2) 爆轰反应区变化——反应区的稳定与熄爆的物理过程; (3) 炸药性能与印痕实验——理想炸药和非理想炸药的机理及模拟; (4) 热点流体力学理论——热点的形成和增长, 以及扩展和熄灭的模拟; (5) Forest Fire 模型及非均质炸药的冲击起爆及予冲击钝化; (6) 爆轰波相互作用模拟——两个、三个和五个爆轰波相互作用高压区模拟; (7) 射流侵彻金属和炸药的实验和计算模拟; (8) 平面波发生器的计算。

另外, 在 83 年 9 月, 美国专家威尔金斯 (Mark L. Wilkins) 和加拿大专家陈锡焜等也在北京工业学院与有关人员进行了短期学术交流。

参加听讲和座谈的人员普遍反映, 今年秋季的学术交流活动, 对活跃学术气氛, 了解国际先进水平, 加强科技合作, 起了很好的促进作用。

(巴山)