

由波恩—梅逸势推导冲击波 关系式中的两个线性关系

章冠人

(1983年7月16日收到)

文中用对波恩—梅逸势展开的方法,推得了冲击波速度和粒子速度间以及格临爱森系数和压缩比倒数间的两个线性关系,并和实验值及其它作者发表的值进行了比较,估计了误差。

一、引言

冲击波关系式中有两个著名的线性关系:即冲击波速度 D 和粒子速度 u 间的线性关系和格临爱森系数 Γ 和压缩比倒数 $\chi = (V/V_0)$ 间的线性关系。已经有许多证明这两个关系的方法⁽¹⁻⁶⁾。本文将用另一种方法,即用波恩—梅逸势近似展开的方法来证明这两个关系,并算出这四个常数,我们知道波恩—梅逸势中的两个常数是在实验室里确定的,这样,只要知道这两个常数,就可以估计动力压缩的冲击绝热曲线,是十分方便的。

二 $D=C_0 + \lambda u$ 的推导

设冲击雨贡纽曲线是从零温开始的。它与冷压曲线有一个共同的起始点 $P=0, V=V_0$ 。对这两条曲线上任一 V 处应用格临爱森方程有:

$$P_H(V) - P_0(V) = [E_H(V) - E_0(V)] \frac{\Gamma(V)}{V} \quad (1)$$

式中 P 代表压力, V 代表比容, E 代表比内能, Γ 代表格临爱森系数,下标“ H ”代表雨贡纽曲线上的值,下标“ 0 ”代表冷压曲线上的值。

再应用雨贡纽关系

$$E_H(V) - E_H(V_0) = \frac{1}{2} P_H(V) (V_0 - V) \quad (2)$$

用(1)和(2)式消去 $E_H(V)$,并用 $\chi = V/V_0$ 代入可得

$$P_H(\chi) = \frac{-\frac{dE_0(\chi)}{d\chi} + [E_0(1) - E_0(\chi)] \frac{\Gamma(\chi)}{\chi}}{1 - \left(\frac{1-\chi}{2\chi}\right) \Gamma(\chi)} \quad (3)$$

式中应用了 $E_0(\chi) = \frac{E_0(V)}{V_0}$ 和 $E_H(V_0) = E_0(V_0)$

以及 $P_0(V) = -\frac{dE_0(\chi)}{d\chi}$ (4)

又从冲击波关系式 $P_H = \rho_0 D u$ ，应用波恩—梅逸势

$$E_0(\chi) = \frac{3a}{b} \exp[b(1 - \chi^{1/3})] - 3a^2 \chi^{-1/3} \quad (5)$$

其中常数部分对我们无用，故未写出。将(5)式代入(3)式，在 $\chi \approx 1$ 附近，由于分母中的第二项和1相比甚小故加以忽略；而在分子中由于 χ 存在于指数项内，不能略去。然后暂时用 $\Gamma(\chi) = c\chi + d$ 代入，并用 $\chi = (1 - y)^3$ 代入，展开到 y^2 项为止，可得

$$\begin{aligned} \rho_0 D u = & [a(2 + b) - 4a]y + [a(2b + 3 + \frac{b^2}{2}) \\ & - 10a + (c + d)(3a - \frac{3ab}{2})]y^2 \end{aligned} \quad (6)$$

又从冲击波压缩关系

$$\frac{u}{D} = 1 - \chi = y(3 - 3y + y^2) \quad (7)$$

用(6)乘(7)，忽略 y^2 以上的高阶项，可得

$$u = \sqrt{\frac{3[a(2 + b) - 4a]}{\rho_0}} y \quad (8)$$

用(8)代入(6)，展开取 y 的一阶项，然后用(8)消去 y ，可得

$$D = (b - 2) \sqrt{\frac{a}{(3b - 6)\rho_0} + \frac{b^2 + 4b - 14 + (c + d)(6 - 3b)}{2(3b - 6)}} u \quad (9)$$

因此

$$\begin{aligned} C_0 &= (b - 2) \sqrt{\frac{a}{(3b - 6)\rho_0}} \\ \lambda &= \frac{b^2 + 4b - 14 + (c + d)(6 - 3b)}{2(3b - 6)} \end{aligned} \quad (10)$$

实际上，如在推导过程中，不略去(3)式分母中的第二项，也可以得到 C_0 和 λ ，不过在 λ 中将不出现 c 和 d 。我们从(10)式的数值计算中也可以看出 λ 与 c 、 d 之值影响是不大的(可参看表1最后两行)。这也间接证明了两种近似方法是一致的。

三、 $\Gamma = c\chi + d$ 的推导

用普遍的 Γ 表示式

$$\Gamma(V) = \left(\frac{a}{2} - \frac{2}{3}\right) - \frac{V}{2} \frac{d^2(P_0 V^a)/dV^2}{d(P_0 V^a)/dV} \quad (11)$$

• 原式中此处为 k ，由于 k 值与 a 值近似，故用 a 代替 k 。

$$\text{式中 } \alpha = \begin{cases} 0, & \text{Slater 公式 } \Gamma \text{ 记为 } \Gamma; \\ 4/3, & \text{自由体积公式, } \Gamma \text{ 记为 } \Gamma_f; \\ 2/3, & \text{德—麦克唐奈公式, } \Gamma \text{ 记为 } \Gamma_{DM} \end{cases} \quad (12)$$

(11)式又可改写为

$$\Gamma(\chi) = -\frac{1}{6} - \frac{\chi^2 P'_0 + (\alpha + 1)\chi P'_0}{2(\chi P'_0 + \alpha P_0)} \quad (13)$$

式中“·”表示对 χ 的一次导数。如将 P'_0 和 P''_0 用压缩模量 K 表示之,则

$$P'_0 = -\frac{1}{\chi} K, \quad (14)$$

$$P''_0 = \frac{K}{\chi^2} - \frac{1}{\chi} K'$$

式中 $K' = \frac{dK}{d\chi}$ 。

根据安德逊的讨论⁽⁷⁾将 K 看成 P_0 的函数,展开至 P_0 的一阶项,可得

$$K = K_0 + K'_0 P_0 \quad (15)$$

其中 $K_0 = K(P_0 = 0)$, $K'_0 = \left. \frac{dK}{dP_0} \right|_{P_0 = 0}$

又根据在 $P_0 = 0$ 附近, K 的定义

$$K = \frac{P_0 \chi}{1 - \chi} \quad (16)$$

解(15)和(16),消去 P_0 ,得

$$K = K_0 + \frac{K_0 K'_0 (1 - \chi)}{\chi \left(1 - K'_0 \frac{1 - \chi}{\chi} \right)} \quad (17)$$

当 $\chi \rightarrow 1$ 时,(17)式用二项式展开,取到 $(1 - \chi)$ 的一次项,得

$$K = K_0 + K_0 K'_0 (1 - \chi) \quad (18)$$

因此

$$K' = -K_0 K'_0 \quad (19)$$

用式(19)和(18)代入式(14),然后代入式(13),用二项式展开,取到 $(1 - \chi)$ 的一阶项,得

$$\Gamma(\chi) = -\frac{1}{6} - \frac{\alpha + K'_0{}^2}{2} + \frac{K'_0(K'_0 + 1)}{2} \chi \rightarrow c\chi + d \quad (20)$$

式中由于 α, K'_0 为常数,上面证明了当压力小时, Γ 满足线性关系。当压力大于一定值时,我们发现也满足另一个线性关系。例如当 $\chi < 0.8 - 0.9$ 时, $\Gamma = c'\chi + d'$,这可证明如下:

例如用德—麦克唐奈公式

$$\Gamma_{DM} = \frac{b^2 \chi^{4/3} \exp[b(1 - \chi^{1/3})] - 6}{6\{b\chi \exp[b(1 - \chi^{1/3})] - 2\}} \quad (21)$$

当压力小时，即当 $\chi \rightarrow 0$ 时，上式分母可以用二项式定理展开，得

$$\Gamma_{DM} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}b(\exp b)\chi + \dots \quad (22)$$

所以可以近似为

$$\Gamma_{DM} = c'\chi + d' \quad (23)$$

实际上 c, d 和 c', d' 可以用 $\Gamma(\chi)$ 的泰勒级数展开式的一阶项来求，即

$$\Gamma(\chi) = \Gamma(\chi_0) + \Gamma'(\chi_0)(\chi - \chi_0) + \dots \approx \Gamma(\chi_0) - \Gamma'(\chi_0)\chi_0 + \Gamma'(\chi_0)\chi \quad (24)$$

因此
$$c' = \Gamma'(\chi_0); \quad d' = \Gamma(\chi_0) - \Gamma'(\chi_0)\chi_0 \quad (25)$$

四、计算结果

用上列公式计算了廿种金属元素的 c, d, C_0 和 λ ，波恩—梅逸势中的常数 a 和 b 取自文献[9]。其结果和其它文献[8,9]上公布的值一并列表1。

对于格临爱森系数，文献[9]只用一条直线近似，文献[1]只用一个常数代表。我们用德—麦克唐纳公式计算结果和用二条直线逼近的结果一并绘在图1上。从上面可以看出它们是十分符合的。在 $\chi = 0.85$ 附近用二条直线的值去逼近，误差均不大。

对于 C_0 和 λ 的计算结果， C_0 和文献[8]中实验拟合结果比较符合，一般可以准确到小数点后第一位。 λ 的计算结果则较差，一般有百分之十几的误差，个别可以达到百分之卅。从表1又可以看见，由 Γ 在高低压区线性系数的变化对 λ 的影响是不大的，这些理论计算结果，虽然还存在一定的误差，但和廿几种金属的实验结果的符合程度已经足够满意的了。

最后，对徐锡申和经福谦两同志的指正表示深切感谢。

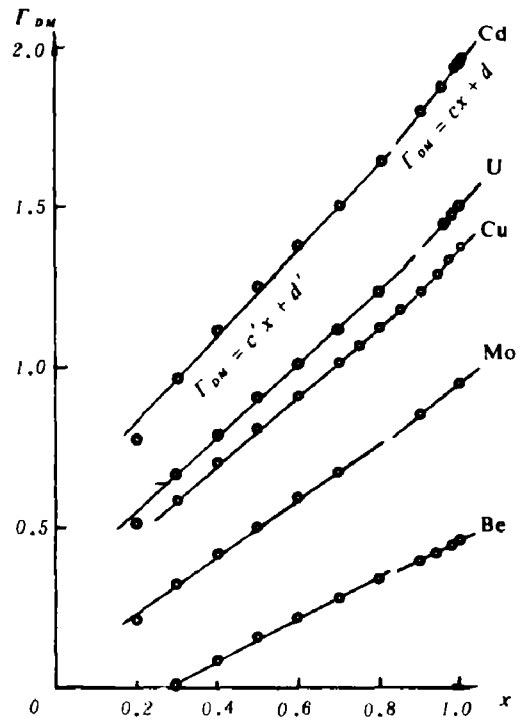


图1

表 1

金属元素	ρ_0 (克/厘米 ³)	a (兆巴)	b	c			d			C ₀			λ	
				文献(9)	本文计算		文献(9)	本文计算		文献(8)	本文计算	文献(8)	本文计算	
					$x > 0.85$	$x < 0.85$		$x > 0.85$	$x < 0.85$				$x > 0.85$	$x < 0.85$
Cu	8.9	0.55819	9.5021	1.225	1.462	1.053	0.905	0.412	0.776	3.96	3.96	1.50	1.60	1.62
Ag	10.49	0.31495	11.918	1.325	1.866	1.236	1.145	0.420	0.987	3.22	3.15	1.648	1.80	1.84
Au	19.30	0.59159	10.8552	1.300	1.688	1.156	1.752	0.417	0.893	3.12	3.00	1.521	1.72	1.75
Be	1.85	1.41815	4.5451	0.600	0.637	0.649	0.570	0.322	0.327	8.069	8.064	1.023	1.15	1.14
Mg	1.730	0.21448	6.9851	0.900	1.040	0.853	0.560	0.391	0.563	4.48	4.55	1.273	1.38	1.39
Cd	8.64	0.21554	13.0634	1.625	2.058	1.320	0.645	0.422	1.086	2.44	3.03	1.67	1.91	1.94
Al	2.71	0.31010	9.14160	1.225	1.401	1.026	0.905	0.409	0.745	5.38	5.23	1.337	1.572	1.591
In	7.27	0.49311	5.39580	0.725	0.775	0.701	1.515	0.359	0.429	2.783	2.77	1.218	1.23	1.24
Tl	4.51	0.50890	7.58470	1.000	1.140	0.936	0.180	0.396	0.592	4.59	4.58	1.259	1.44	1.44
Zr	6.49	1.84181	3.55020	0.522	0.501	0.819	0.249	0.209	0.007	3.812	3.82	0.9767	1.02	0.96
V	6.1	0.92284	7.12270	0.925	1.063	0.896	0.365	0.392	0.554	5.11	5.08	1.21	1.39	1.40
Nb	8.60	1.27746	6.05940	0.780	0.885	0.801	0.900	0.376	0.466	4.464	4.48	1.216	1.30	1.29
Ta	16.46	0.95038	7.59780	0.975	1.142	0.937	0.715	0.398	0.593	3.139	3.28	1.531	1.44	1.44
Mo	10.20	1.58570	7.09140	0.950	1.058	0.893	0.630	0.392	0.552	5.120	5.14	1.285	1.39	1.39
W	19.2	1.73243	7.32340	1.025	1.096	0.878	0.525	0.395	0.592	4.049	4.00	1.215	1.41	1.42
Co	8.82	0.80012	9.16032	1.102	0.917	0.919	0.891	0.533	0.544	4.740	4.65	1.392	1.76	1.76
Ni	8.86	0.81740	8.99051	1.100	1.376	1.060	0.812	0.408	0.704	4.65	4.64	1.45	1.56	1.57
Pt	21.50	1.36590	8.33460	1.112	1.266	1.001	1.512	0.403	0.653	3.646	3.67	1.535	1.50	1.51
Th	11.68	0.26096	8.12741	1.024	1.231	1.001	0.096	0.439	0.653	2.132	2.13	1.278	1.47	1.47
U	18.9	0.44319	10.2740	1.275	1.591	1.113	0.554	0.414	0.842	2.48	2.54	1.53	1.669	1.694

参 考 文 献

- [1] Puech, M. and Sakowitsch, M., Calcul des Polaires de Choc des Corps a Structure Isotrope Compacte a L'aide du Potential De Morse, *High Pressure Science and Technology*, Edited by B. Vodar and Ph. Manteau, Vol. 2, p. 946, Pergamon Press, Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt. (1979).
- [2] Pastine, D. J., Placesi, D., *J. Phys Chem. Solids*, **27** (1966), 1783.
- [3] Ruoff, A. L., *J. Appl. Phys.*, **38** (1967), 4976.
- [4] Berger, J. and Joigneau, S., *C. R. Acad. Sci.*, Paris, **249** (1965), 2506.
- [5] Swan, G. W., *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **4** (1971), 1077.
- [6] 经福谦, 爆炸与冲击, **3** (1982), 17.
- [7] Anderson, O. L., *Phys. Earth Planet Interiors*, **1**, 169, North Holland Publishing Co., Amsterdam (1968).
- [8] Thiel, M. van, *UCRL — 50108*, Vol. 1 (1966).
- [9] Меньшиков, Г. П., Ф. Г. В., **2** (1981), 114.

TWO LINEAR SHOCK WAVE RELATIONS DERIVED FROM BORN-MAYER POTENTIAL

Zhang Quanren

Abstract

In this paper, by means of series expansion of Born-Mayer potential, two linear relations respectively between shock wave velocity and particle velocity, Grüneisen coefficient and the ratio of compression density to initial density are derived. Comparisons between the results and experimental values and those delivered by other authors are made, errors are estimated.