第4卷 第3期
1984年7月

爆 炸 与 冲 击
EXPLOSION AND SHOCK WAVES

Vol.4, No.3
Jnly., 1984

研究简报

爆轰波与惰性介质相互作用的迭代收敛计算

薛铁辕

(1983年12月30日收到)

爆轰波与惰性介质相互作用的计算，可以用解析解和作图法求解，但在解析解求解中会遇到迭代发散问题。本文利用解反函数的办法进行计算，使迭代过程收敛。文中分别给出反射冲击波和反射稀疏波两种情况的迭代收敛计算公式。公式是按强爆轰的形式给出的，其中包括了C－J爆轰的特殊情况

爆轰波与惰性介质相互作用，向惰性介质传入一冲击波，反射一冲击波或稀疏波。如图1所示。其中(z)表示相互作用前爆轰产物中的状态，(x)表示相互作用后的状态。

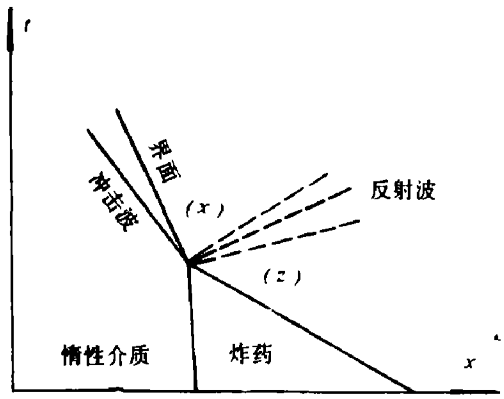

图1

引进

$$z=\sqrt{1-(D_J/D_z)^2} \qquad (1)$$

其中D_z为强爆轰波速度。D_J为C－J爆轰波速度。设爆轰波沿x减小的方向传播$D_J<0$，$D_z<0$。

一、反射冲击波

我们先来求出反射波波后爆轰产物中压力与粒子速度的关系。设反射波前后的多方指数K值不变，则有

$$\frac{V_{x,zy}}{V_z}=\frac{(K+1)P_z+(K-1)P_{x,zy}}{(K+1)P_{x,zy}+(K-1)P_z}=\frac{(K-1)\pi+(K+1)}{(K+1)\pi+(K-1)} \qquad (2)$$

$$u_{x,zy}-u_z=\sqrt{P_z u_z(\pi-1)\left(1-\frac{V_{x,zy}}{V_z}\right)} \qquad (3)$$

其中P——压力，V——比容，u——粒子速度，zy——爆轰产物，

$$\pi=(P_{x,zy}/P_z) \qquad (4)$$

将(2)式代入(3)式并加以整理得

$$u_{x,zy}-u_z=\sqrt{2P_zV_z}\frac{\pi-1}{\sqrt{(K+1)\pi+(K-1)}} \tag{5}$$

对强爆轰有

$$u_z=\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}u_J=\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\frac{D_J}{K+1} \tag{6}$$

$$P_z=\frac{P_J}{1-z}=\frac{1}{1-z}\frac{\rho_0D_J^2}{K+1} \tag{7}$$

$$V_z=\frac{1}{\rho_z}=\frac{1-z/K}{\rho_J}=\frac{K-z}{K+1}\frac{1}{\rho_0} \tag{8}$$

其中ρ_0为炸药初始密度；J表示C－J爆轰。

将(6)、(7)、(8)式代入(5)式，得

$$u_{x,zy}=\frac{D_J}{K+1}\left(\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}-\sqrt{\frac{2(K-z)}{1-z}}\frac{\pi-1}{\sqrt{(K+1)\pi+(K-1)}}\right) \tag{9}$$

这便是我们所要求的反射波波后爆轰产物中压力与粒子速度之间的关系。

另一方面，在惰性介质中，冲击波波后有

$$P_{xM}=\rho_{0M}D_{xM}u_{xM}=\rho_{0M}(-c_{0M}+\lambda_Mu_{xM})u_{xM} \tag{10}$$

其中M代表惰性介质。

在介面上，相互作用后有

$$u_{xM}=u_{x,zy}\quad,\qquad P_{xM}=P_{x,zy}$$

因此，本文下面只简单地使用u_x，P_x的符号。

原则上，(9)和(10)联立求解。即可定出u_x，P_x，随之其它各物理量即可求出。但(9)、(10)二式联立求解迭代是发散的。通常用凑解或作图求解，这显然是不方便的。

如果解出(9)、(10)的反函数，则可得到迭代收敛的表达式。由(9)式和(6)式，

$$(u_x-u_z)^2=\frac{2(K-z)}{1-z}\frac{D_J^2}{(K+1)^2}\frac{(\pi-1)^2}{(K+1)\pi+(K-1)}$$

令

$$g(u_x)=\frac{1-z}{4(K-z)}\frac{(K+1)^3}{D_J^2}(u_x-u_z)^2 \tag{11}$$

则

$$\frac{2}{(K+1)}g(u_x)[(K+1)\pi+(K-1)]=\pi^2-2\pi+1$$

$$\pi^2-2[1+g(u_x)]\pi+[1-\frac{2(K-1)}{(K+1)}g(u_x)]=0$$

$$\pi=[1+g(u_x)]\pm g(u_x)\sqrt{1+\frac{4K}{K+1}\frac{1}{g(u_x)}} \tag{12}$$

因$g(u_x)>0$，故

$$g(u_x)\sqrt{1+\frac{4K}{K+1}\frac{1}{g(u_x)}}>g(u_x)$$

而$\pi > 1$，故只能取“+”号，得

$$P_x = P_z\left[1 + g(u_x)\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4K}{K+1}\frac{1}{g(u_x)}}\right)\right] \tag{13}$$

(10)式的反函数为

$$u_x = \frac{c_{0M}}{2\lambda_M}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\lambda_M}{\rho_{0M}c_{0M}^2}P_x}\right] \tag{14}$$

$c_{0M} > 0$，$\lambda_M > 0$，$u_x < 0$，故只能取“−”号

$$u_x = \frac{c_{0M}}{2\lambda_M}\left[1 - \sqrt{1 + \frac{4\lambda_M}{\rho_{0M}c_{0M}^2}P_x}\right] \tag{15}$$

我们把(13)、(15)、(11)集中写在一起：

$$P_x = P_z\left[1 + g(u_x)\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4K}{K+1}\frac{1}{g(u_x)}}\right)\right] \tag{16}$$

$$u_x = \frac{c_{0M}}{2\lambda_M}\left[1 - \sqrt{1 + \frac{4\lambda_M}{\rho_{0M}c_{0M}^2}P_x}\right] \tag{17}$$

$$g(u_x) = \frac{(K+1)^3}{4D_J^2}\frac{1-z}{K-z}(u_x - u_z)^2 \tag{18}$$

用(16)－(18)迭代求解即可收敛。先给出某个u_x，例如取$u_x = u_J$，由(18)求出$g(u_x)$，代入(16)求出P_x再代入(17)求出新的u_x。如此继续下去，直至达到所要求的精确度为止。实际计算表明，收敛速度是很快的。

二、反射稀疏波

反射波两边黎曼不变量相等

$$\beta_{x,zy} = u_x - \frac{2}{K-1}C_{x,zy} = \beta_z \tag{19}$$

$$u_x = \beta_z + \frac{2C_J}{K-1}\left(\frac{P_x}{P_J}\right)^{(K-1)/2K} \tag{20}$$

惰性介质中仍有

$$P_x = \rho_{0M}(-c_{0M} + \lambda_M u_x)u_x \tag{21}$$

(20)(21)联立求解，迭代也是发散的，通常用凑解或作图法求解。

解出(20)、(21)的反函数，得

$$P_x = P_J\left[\frac{K-1}{2C_J}(u_x - \beta_z)\right]^{2K/(K-1)} \tag{22}$$

$$u_x = \frac{c_{0M}}{2\lambda_M}\left[1 - \sqrt{1 + \frac{4\lambda_M}{\rho_{0M}c_{0M}^2}P_x}\right] \tag{23}$$

其中

$$\beta_z = u_z - \frac{2}{K-1}C_z \tag{24}$$

$$c_z = -\frac{K}{K+1}\sqrt{\frac{K-z}{K(1-z)}}D_J \tag{25}$$

注意$D_J<0$。

用(22)、(23)迭代求解是收敛的。收敛过程也很快。

三、讨　论

1. 上面各公式是在强爆轰情况下(例如马赫爆轰波，球面或柱面聚心爆轰波。其不同点在于z值不同）进行推导的，其中包括了C－J 爆轰作为特殊情况。这时只要取$z=0$就行了。

a）反射冲击波

$$P_x=P_J\left[1+g(u_x)\left(1+\sqrt{1+\frac{4K}{K+1}\frac{1}{g(u_x)}}\right)\right] \tag{26}$$

$$u_x=\frac{c_{OM}}{2\lambda_M}\left[1-\sqrt{1+\frac{4\lambda_M}{\rho_{OM}c_{OM}^2}P_x}\right] \tag{27}$$

$$g(u_x)=\frac{(K+1)^3}{4D_J^2}\frac{1}{K}(u_x-u_J)^2 \tag{28}$$

b）反射稀疏波

$$P_x=P_J\left[\frac{K-1}{2C_J}(u_x-\beta_J)\right]^{2K/(K-1)} \tag{29}$$

$$u_x=\frac{c_{OM}}{2\lambda_M}\left[1-\sqrt{1+\frac{4\lambda_M}{\rho_{OM}c_{OM}^2}P_x}\right] \tag{30}$$

$$\beta_J=u_J-\frac{2}{K-1}C_J \tag{31}$$

$$C_J=-\frac{K}{K+1}D_J \tag{32}$$

2. 反射波类型取决于波阻抗

$$\frac{\rho_{OM}(-c_{OM}+\lambda_M u_z)}{\rho_0 D_z}\begin{cases}>1 & \text{反射冲击波}\\ =1 & \text{什么波也不反射}\\ <1 & \text{反射稀疏波}\end{cases} \tag{33}$$

3. (12)式中取“－”号代表反射稀疏波，即用冲击波关系式向下延伸近似代替了等熵关系式。如果实际情况是反射稀疏波而取了“＋”号，则迭代发散，这时立即取“－”号作为近似解，则迭代收敛。

4. 若实际情况是反射冲击波，而用（22)、(23）求解，则得到近似解，即用等熵关系近似代替了冲击波关系式。这时迭代过程仍然是收敛的。

5. 顺便提一下，不论反射冲击波还是稀疏波，若反射波不强时，在声波近似下有

$$u_x-u_z=\frac{P_x-P_z}{\rho_z c_z} \tag{34}$$

将（10）代入，得

$$u_x=\frac{\rho_z c_z+\rho_{OM}c_{OM}}{2\rho_{OM}\lambda_M}\left[1-\sqrt{1-\frac{4\rho_{OM}\lambda_M(\rho_z c_z u_z-P_z)}{(\rho_z c_z+\rho_{OM}c_{OM})^2}}\right] \tag{35}$$

(因$u_x < 0$,故二次方程的根取"－"号)。不用凑解，也不用迭代，一次求出结果，但误差略有增加。它可作为一个简单的粗估公式使用。同样地，$z=0$对应于C－J爆轰。这时

$$u_x = \frac{\rho_J c_J + \rho_{OM} c_{OM}}{2\rho_{OM}\lambda_M}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\rho_{OM}\lambda_M(\rho_J c_J - P_J)}{(\rho_J c_J + \rho_{OM} c_{OM})^2}}\right]$$

而

$$\rho_J c_J = -\rho_0 D_J$$

$$\rho_J c_J u_J = -\rho_0 D_J u_J = -P_J$$

故

$$u_x = \frac{(\rho_{OM} c_{OM} - \rho_0 D_J)}{2\rho_{OM}\lambda_M}\left[1 - \sqrt{1 + \frac{8\rho_{OM}\lambda_M P_J}{(\rho_{OM} c_{OM} - \rho_0 D_J)^2}}\right] \tag{36}$$

(注意$D_J < 0$)

代入(10)式即可求出P_x。随之可求出其余各物理量。

AN INTERATIVE CONVERGENT METHOD OF CALCULATING THE INTERACTION OF DETONATION WAVES WITH A NON-REACTIVE MEDIUM

Xue Tieyuan

Abstract

There are two methods, analytical and graphical, in calculating the interaction of detonation waves with a non-reactive medium. In the analytical case sometimes the iterative proceedure may be divergent. In order to avoid this difficulty. we use the method of solving inverse function in this paper. The formulas of both reflection shock waves and rarefaction waves are given. These formulas are presented for the strong detonation, but the C-J detonation is also given as a special case.