

# 波传播问题中有限元分析的频 散特性及离散化准则

宗福开

(1983年1月22日收到)

有限元法用于分析波的传播问题已日益广泛,它可能达到的程度已成为现在十分关心的课题。本文论述了有限元离散化后造成的频率特性的变化和散逸问题;给出了波动问题有限元离散化的准则;并以几个典型实例来说明有限元法所能达到的精确程度。

## 一、问题的提出

过去20多年,对地下抗爆结构的动力响应作了大量的工作,对一些简单的理想化的问题取得了解析解<sup>[1][2]</sup>。对一些实际问题求得了不同精度的近似数值解<sup>[3][4]</sup>。近十多年来已把注意力集中到数值计算,尤其是有限元分析方法,并已取得了大量可喜的成果<sup>[5][6]</sup>。因为有限元法对于复杂的地下结构和非均匀介质,考虑结构和介质的非弹性及任意荷载条件等各种实际问题都是适用的,充分显示出它的优越性。

但是,众所周知,有限元法用于分析椭圆型方程的问题是非常成功的。

对于波动方程,为双曲型方程

$$\Delta u - u_{tt} = f(x, y, t) \quad (1.1)$$

在  $R(x, y, t)$  区域内,具有初始条件

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= g(x, y) \\ u_t(x, y, 0) &= h(x, y) \end{aligned} \quad (1.2)$$

并在边界面  $S(x, y, t)$  上规定狄里赫莱条件。

如果象处理椭圆方程那样,可导出一个变分泛函,变分原理是使泛函

$$I = \int_R \left\{ \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2) - \frac{1}{2}u_t^2 \right\} dx dy dt + \int_R f u dx dy dt \quad (1.3)$$

取驻值。考察(1.3)式积分可以看到,第一部分为  $\int_R (1/2)(u_x^2 + u_y^2) dx dy dt$ , 是由拉氏算符引

出的, 是正定的。第二部分为  $-\int_R (1/2)u_t^2 dx dy dt$ , 体现了这一问题的时间特征, 是负定的。于是整个二次函数是不定的, 这就是变分概念推广到波动现象的困难之一, 从而使我们不能将有限元直接用于波动问题, 它既包含空间型的有限元近似, 又包含时间型的有限单元。

虽然有不少学者在探讨解决这一困难的各种途径<sup>[7]</sup>, 但至今未见到具体的计算实例。直到目前为止, 仍然把波动问题从物理上离散化为多质点体系, 按有限元求解振动问题的方法求得解的, 其离散化振动方程为

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{P_t\} \quad (1.4)$$

显然, 方程(1.4)与方程(1.1)及它们的解的形式都是不同的。这样, 当冲击波的波阵面很陡, 并具有尖峰时, 用离散化振动方程所求得解将会使波形变得比较圆滑, 波的尖峰的到时也会迟后。因此, 用有限元动力分析方法来解决波的传播及冲击波对土与结构相互作用所能达到的程度就成为十分关心的问题。本文将从理论上, 从物理机理上来回答这一问题, 给出有限元离散化的初步准则, 并用一些典型的计算实例来说明它所能达到的程度。

## 二、离散化后的低通效应和频散效应

当一个连续体离散成有限段时会造成两种后果。一种是从物理本质看, 会使波的传播性质发生一定的变异; 另一种是从数学的角度看, 离散会造成计算误差。这里着重讨论前一种。

从物理意义上说, 连续体离散化后将引起两种不利的效应, 一种称之为“低通效应”, 另一种称之为“频散效应”。它们都将使波的传播性质发生变化。我们以一维弹性体的纵波传播为例(见图1), 一根长为 $L$ 的均匀各向同性的连续杆, 介质弹性模量为 $E$ , 体密度为 $\rho$ , 横截面积为 $A$ , 把杆离散成长为 $l$ 的 $(n+1)$ 个矩形单元, 则任意两节点 $i, j$ 间任一点的位移取为

$$u_x = N \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

$$N = \left[ 1 - \frac{x}{l} \quad \frac{x}{l} \right]$$

式中 $u_i, u_j$ 分别为节点 $i, j$ 处的轴向位移。

单元刚度矩阵和单元质量矩阵分别为

$$k_i = E A \int_l B^T B dx = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$m_i = \rho A \int_l N^T N dx = \frac{\rho Al}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

本文采用集中质量矩阵 $\bar{m}_i$

$$\bar{m}_i = \frac{1}{2} \rho Al \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

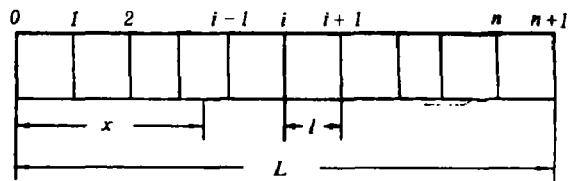


图1 一维离散化模型

式中 
$$B = \left[ -\frac{l}{l} \quad \frac{l}{l} \right]$$

这样, 杆中第  $i$  个节点的平衡方程为

$$m \frac{d^2 u_i}{dt^2} = \frac{EA}{l} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) \quad (2.5)$$

或

$$\frac{d^2 u_i}{dt^2} = \frac{EA}{m} \left[ \frac{u_{i+1} - u_i}{l} - \frac{u_i - u_{i-1}}{l} \right] \quad (2.6)$$

式中  $m = \rho A l$

从 (2.6) 式看出, 当划分的网格尺寸足够小, 即  $l \rightarrow 0$  时, 该式便变为一维波动方程,

即 
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.7)$$

式中  $C^2 = E/\rho$ , 为杆的纵波波速。

但当划分的单元具有一定长度  $l$  时, 则应取 (2.5) 式, 并由此求出该离散体系的固有频率。假定  $u_i = A_i \exp(j\omega t)$ , 代入 (2.5) 式, 可得

$$\frac{A_{i-1} + A_{i+1}}{A_i} = \frac{2\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} \quad (2.8)$$

式中  $\omega_0^2 = EA/ml$ 。

式 (2.8) 表明, 对于任何确定的固有频率  $\omega$  (如  $\omega_s$ ), 方程右端总是与  $i$  无关的常数, 这方程对  $i$  的一切值都成立。假定第  $i$  个节点在频率为  $\omega_s$  时的振幅表示为

$$A_i = C_s \sin i \theta_s \quad (2.9)$$

式中  $C_s$  为常数,  $\theta_s$  为依赖于  $\omega_s$  的固定角。这样方程 (2.6) 左边变为

$$\frac{A_{i-1} + A_{i+1}}{A_i} = \frac{C_s [\sin(i-1)\theta_s + \sin(i+1)\theta_s]}{C_s \sin i \theta_s} = 2 \cos \theta_s \quad (2.10)$$

显然, 上式右边是与  $i$  无关的常数。利用边界条件可求得  $\theta_s$ , 从而得到  $\omega_s$ 。

如边界条件为两端固定, 则由 (2.9) 式得出在  $i = 0$  的固定端是自动满足的, 因为

$$A_0 = C_s \sin 0 = 0$$

对于  $i = n+1$  的固定端, 有

$$A_{n+1} = C_s \sin(n+1)\theta_s = 0$$

故

$$\theta_s = s\pi/(n+1), \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

上式代入 (2.8)、(2.10), 则得

$$\omega_s^2 = 2\omega_0^2 \left( 1 - \cos \frac{s}{n+1} \pi \right), \quad (s = 1, 2, \dots, n) \quad (2.11)$$

对于一端固定, 一端自由的边界条件, 可用类似的方法得到

$$\omega_s^2 = 2\omega_0^2 \left( 1 - \cos \frac{2s-1}{2n+1} \pi \right), (s=1, 2, \dots, n) \quad (2.12)$$

式(2.12)给出了底部固定用一系列弹簧(刚度  $k = EA/l$ )串起来的质量为  $m$  的  $n$  个质点体系的各个固有频率值, 其最高固有频率为  $\omega_n$ 。

这样, 当外界扰动作用在体系上时, 体系各质点将以低于最高固有频率的一系列谐振动之迭加进行振动。对高于  $\omega_n$  的扰动分量将受到阻止而不能传播。这就是在物理意义上离散体系区别于连续体的本质的不同之处。我们把  $\omega_n$  称为离散体系的截止频率。这个体系就好像一个低通滤波器, 故把这种现象称之为“低通效应”。

连续体离散化后造成的另一种现象为“频散效应”。从波动力学带宽定理得到

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \approx 2\pi \quad (2.13)$$

或

$$\Delta K \cdot \Delta x \approx 2\pi$$

式中  $\omega$  为圆频率,  $K$  为波数,  $t$  为时间。式(2.13)表明, 能量所在空间或时间越集中, 其频谱就越宽。离散化体系的频谱比连续体系要窄, 能量所在区域就要变大, 也就是说能量因频带变窄而弥散了, 这种现象称为“频散效应”。

对于受地表冲击波作用的地下结构的动力响应问题, 结构上部介质中传播的不仅有纵波, 还有剪切波, 甚至更复杂的波群。如把结构视为弹性基础上的梁, 则对于这种复杂的波的传播, 不仅存在着“低通效应”和“频散效应”, 而且由于波的色散关系的变化, 使波群速度改变, 从而使传播的波形发生扭曲。我们把这种色散波的弥散现象也统称为“频散效应”。

### 三、离散化准则

上面的分析说明, 采用有限元离散化模型将带来“低通效应”和“频散效应”, 但当单元尺寸取得足够小时, 这些效应将大大减弱而不影响波的传播性质。因此, 选择合适大小的单元, 即建立离散化准则, 是一个很有实际意义的问题。国内外不少学者在这方面做过一些工作, 从不同角度提出离散化准则, 但大都是实际计算结果的综合, 如 Kuhlemeyer 和 Lysmer<sup>(10)</sup>, Kausel<sup>(11)</sup>, Costantino 和 Miller<sup>(12)</sup> 等分别给出

$$l \gg (1/4 \sim 1/8)\lambda_{min} \quad (3.1)$$

$$l \gg (1/6)\lambda_{min} \quad (3.2)$$

$$l < (1/4.4)\lambda_{min} \quad (3.3)$$

式中  $l$  为单元尺寸,  $\lambda_{min}$  是传播的最小波长。

我国熊建国<sup>(13)</sup>从动力修正项的相对误差小于 10% 推出

$$l < (1/5)\lambda_{min} \quad (3.4)$$

我们从物理机理上由“低通效应”的最低允许值直接推导出有限元离散化准则。由式(2.12), 在  $s = n$  时, 可以得到一端自由、一端固定杆的一维离散化体系的最高截止频率  $f_{max}$  为

$$f_{max} = \frac{\left(1 - \cos \frac{2n-1}{2n+1} \pi\right)^{1/2}}{\sqrt{2} \pi} \cdot \frac{C}{l} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{C}{l} \quad (3.5a)$$

$$\beta = \frac{\sqrt{2} \pi}{\left(1 - \cos \frac{2n-1}{2n+1} \pi\right)^{1/2}}$$

由  $\lambda_{min} = C/f_{max}$ , 上式变为

$$l = (1/\beta) \lambda_{min} \quad (3.5b)$$

当在波传播方向划分的网格数  $n$  大于 10 时,  $\beta \doteq \pi$ 。则得出有限元离散化准则为

$$l > (1/\pi) \lambda_{min} \quad (3.6)$$

准则 (3.6) 具有明确的物理意义, 它比式 (3.1) 至 (3.4) 的要求略低, 这在工程上具有实际意义。但应指出, 波的传播是几维的以及边界条件的性质, 对系数  $\beta$  的值有一定影响。通常取  $l$  不大于  $(1/\pi \sim 1/8) \lambda_{min}$ , 看来是合理的。

#### 四、有限元分析实例

通过几个具有理论解的典型实例的分析, 来判定离散化准则的适用性, 并估计有限元法用于波传播的较复杂问题所能达到的程度。

##### 1. 一维杆的情况<sup>(9)</sup>

如图 2 的一维杆, 杆端入射压力为有一定上升时间的平台荷载, 如图 3。按两组不同粗

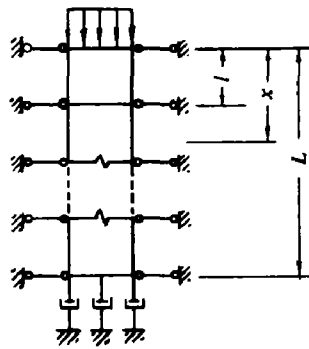


图 2 计算模型

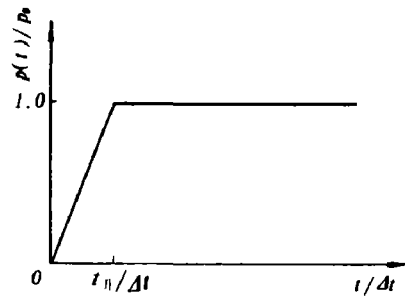


图 3 杆端荷载波形

细的网格划分杆件, 分别作有限元计算。模型底部采用 Lysmer<sup>(10)</sup> 人工粘性阻尼边界, 相当于取  $n \rightarrow \infty$ , 用逐步积分法计算的时间步长均取  $\Delta t = t_0/10$ , 得到如图 4 和图 5 两组计算波形。从图中看到, 网格尺寸  $l$  愈小, 计算波形中高频振荡的频率愈高, 假振荡的峰值愈小, 所得结果愈接近于理论解。

由公式 (3.5a) 计算图 5 模型 (其网格尺寸  $l = C t_0$ ) 的截止频率为

$$f_{max} = (1/\beta) \cdot C/l = 1/\pi t_0$$

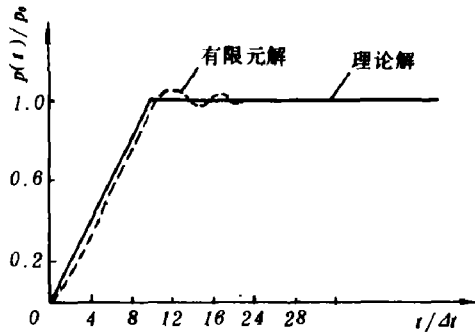


图4  $\frac{C t_{\pi}}{l} = 5, \frac{t_{\pi}}{\Delta t} = 10$ 时杆端应力

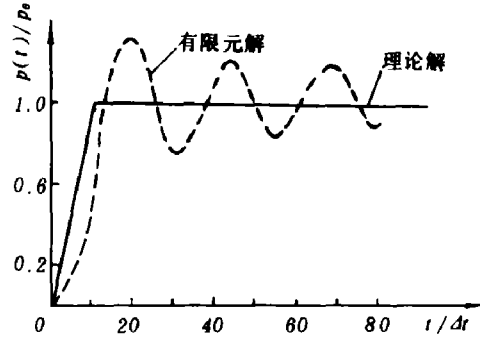


图5  $\frac{C t_{\pi}}{l} = 1, \frac{t_{\pi}}{\Delta t} = 10$ 时杆端应力

即

$$T_{min} = 1/f_{max} = \pi t_{\pi}$$

而从图5中看到的假振荡的周期  $T = 2.7t_{\pi}$ , 它与计算所得的截止周期是比较接近的。这说明离散化模型不能反映出干扰中超过截止频率的波, 因而计算曲线便不能正确地显示升压部分, 并在平台部分出现假振荡。

当采用较细的网格(如图4网格尺寸  $l = C t_{\pi} / 5$ )时, 计算波形有了很大的改善。因为这时由公式(3.5a)算得的截止周期  $T_{min} = 0.62t_{\pi}$  已足够小了。从图4中也看到假振荡周期接近于  $T_{min}$ , 假振荡峰值不大。这时的参数  $l$  已基本满足要求。

以上分析说明, 只有按公式(3.6)选取合适的网格尺寸, 使迭加在实际波形上的假振荡频率比波的反应的主要频率高得多时(约大于5倍), 才能取得较为满意的计算结果。

### 2. 二维平面应变情形<sup>(8)</sup>

一半无限弹性体, 表面受移动荷载作用, 计算其稳态波平面应变。Cole和Huth给出解析解<sup>(15)</sup>。这里用有限元矩形网格计算超地震情况(见图6), 具体参数如下:

$$\begin{aligned} p_m &= 70 \text{ kg/m}^2; & U &= 2590 \text{ m/sec}; \\ l &= 30.5 \text{ cm}; & E &= 1820 \text{ kg/cm}^2; \\ \nu &= 0.3; & \rho &= 178 \text{ kg} \cdot \text{sec}^2/\text{m}^4; \\ C &= (E/\rho)^{1/2} = 315 \text{ m/sec}. \end{aligned}$$

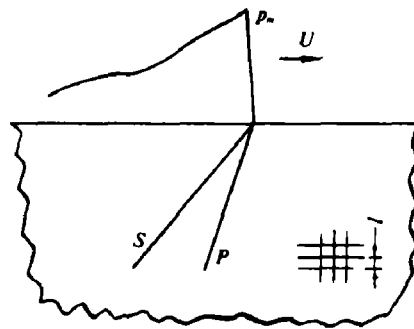


图6 半无限弹性体

对于图6的二维平面应变情形, 弹性体中出现体波和剪切波两种波。弹性体中任何一点的总反应是这两种反应的迭加。这两种波具有不同的截止频率和散逸效应。剪切波的截止频率低、散逸大, 剪切波阵面比体波波阵面更为扭曲, 如图7、8所示。

对于所用网格尺寸, 由(3.5a)式算出体波截止频率  $f_{max} = 328/\text{sec}^{-1}$ 。这一值虽高于反应的主要频率, 但看来至少要高出五倍才行。

### 3. 平面脉冲波对带有衬砌的圆形孔洞的绕射

如图9所取的物理常数为  $E = 7.03 \times 10^9 \text{ kg/m}^2, \rho = 272 \text{ kg} \cdot \text{sec}^2/\text{m}^4, \nu = 0.25$ 。

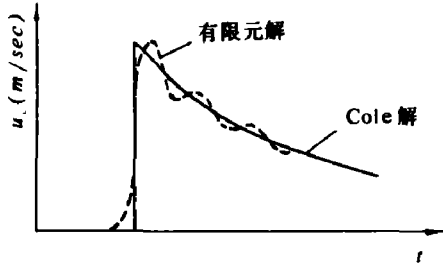


图7 垂直速度反应

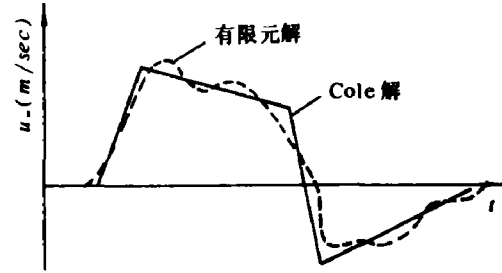


图8 水平速度反应

衬砌外径  $D = 2\text{ m}$ ，壁厚  $\delta = 0.2\text{ m}$ ，

衬砌的物理常数为  $E_s = 1.76 \times 10^9\text{ kg/m}^2$ ， $\rho_s = 236\text{ kg} \cdot \text{sec}^2/\text{m}^4$ ， $\gamma_s = 0.20$ 。

传入平面脉冲波，其荷载强度  $P_0 = 4.787 \times 10^3\text{ kg/m}^2$ ，周期  $T_0 = 6.25\text{ ms}$ 。

计算模型取  $L \times 2L$ ， $L/D = 10$ ，离散成三角形网格，最大单元尺寸为  $l/D = 0.45$ ，计算步长取  $dt/T_0 = 0.0016$ 。

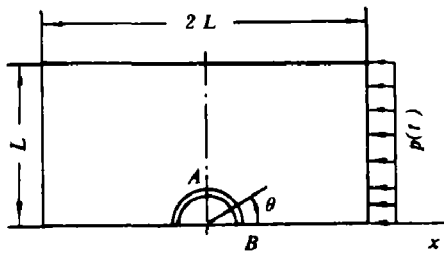
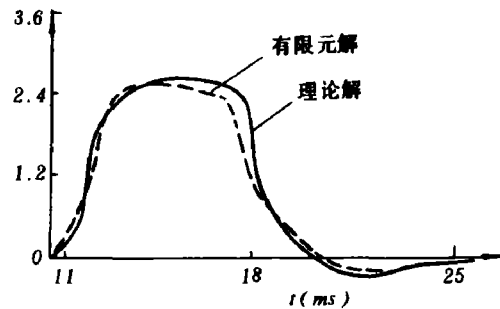


图9 计算模型

图10  $\sigma_\theta \sim t$  波形

计算结果如图10所示。 $A$ 点的环向应力 $\sigma_\theta$ 最大值与理论值误差为1.2%，而 $B$ 点的最大 $x$ 向加速度 $\ddot{u}_x$ 与理论值误差为5.1%。取得这个较好结果的原因是所取网格的截止频率（为 $1798\text{ sec}^{-1}$ ）远高于脉冲的主要频率（ $160\text{ sec}^{-1}$ ）。

从上述几个不同情况的有限元动力分析的实例说明，本文所提供的准则公式（3.6）是具有实际意义的。当有限元离散化模型中考虑阻尼时，网格尺寸的要求可略为降低。作者对地表冲击波作用下土中浅埋结构的动力反应所作的大量有限元分析表明，只要遵循（3.6）式准则，所得结果都是相当满意的。

## 参 考 文 献

- [1] Baron, M. L., Parnes, R., *Proc. 4th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, Vol. 1 (1962), 63.
- [2] Pao, Yin-Hsing, Mao, Chao-Chow, *Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations*, McGraw Hill Book Co., New York, (1972).
- [3] 钱七虎、陈震元, 爆炸与冲击, (1)(1982)-24.
- [4] Боданский, М. Д., Горшков, Л. М., и др., *Расчет Конструкций Убежищ*, М., Стройиздат, (1974).
- [5] Windham, J. E., *AEWES--S-76-4*, (1976).
- [6] 熊建国等, 地表空气冲击波作用下浅埋框架结构的动力反应, 私人通讯 (1979).
- [7] Carey, G. F., *Finite Element Method in Engineering*, The University of Adelaide, (1976).
- [8] Shipley, S. A. et al, *Proc. Int. Symp. Wave Propag. Dyn. Proper. Earth Mater.*, (Aug. 1968), 509-520.
- [9] 孙钧, 吴逸群, 爆炸冲击波在介质内传播问题的有限元数值分析, 私人通信, (1980).
- [10] Kuhlemeyer, R. L., Lysmer, J., *J. Struct. Mech. Div. ASCE*, **90** (SM5) (1973), 421.
- [11] Kausel, E., Roesset, J. M., *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, **101** (EM6) (1975), 771.
- [12] Canstoutino, C. J., Miller, C. A., et al, *Nucl. Eng. Design*, **38** (1976), 282.
- [13] 熊建国, 土壤结构相互作用分析中的几个问题, 私人通讯, (1980).
- [14] Lysmer, J. et al, *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, **95** (EM5) (1969), 859.
- [15] Cole, J., Huth, J., *J. Appl. Mech.*, **25** (4) (1958), 433.

## FREQUENCY-DISPERSION CHARACTERISTICS AND DISCRETIZATION OF THE FINITE ELEMENT ANALYSIS IN WAVE PROPAGATION PROBLEMS

Zong Fukai

### Abstract

The finite element method has been widely used in analysing wave propagation problems. Which degree of accuracy such an analysis can be obtained? This is a problem of interest today. This paper deals with the variation of frequency characteristics and dispersion problems after discretization; the element discretization principle; and, through some typical examples, gives the attainable accuracy of the finite element method.