

# 钢板混凝土梁的动力计算与抗爆分析

刘宗贤

(1983年9月14日收到)

本文是将沿厚度由钢板和混凝土组合而成的钢板混凝土梁化为一等效横观各向同性构件。应用弹性动力学理论和复合板件等效非经典理论,通过动力分析,给出了基本动力方程和构件的等效折合弹性常数。并求得了钢板混凝土梁的固有频率和在横向爆炸载荷作用下的动力反应的解析解。文中对这类构件的力学特性及计算特点作了分析,其结果可直接用于钢板混凝土梁的各种动力及抗爆计算。

## 一、前 言

随着近代科学技术的发展,各工程部门日益需要各种类型的组合结构。高抗力的钢板混凝土组合结构<sup>[1]</sup>广泛地应用于人防工程与国防工程的防护结构、地下结构、船舶、海洋工程、港湾工程结构等方面<sup>[2]</sup>。

钢板混凝土组合结构是近二十多年来发展起来的一种新型的结构形式,但目前对它的分析研究仅限于一般的静力分析计算<sup>[3]</sup>与静力强度研究<sup>[4]</sup>,很少进行动力分析研究。本文采用了较为合理的力学模型,应用计入剪切变形与转动惯量效应的等效非经典理论<sup>[5]</sup>对钢板混凝土梁进行了动力分析,这将能充分体现出钢板与混凝土组合结构的受力特点以得到满意的结果。

对于承受高载(尤其是高抗力防护)结构,由于存在钢筋混凝土结构配筋量过高,难于布筋和混凝土不能很好地发挥作用等问题,相比之下钢板混凝土构件能充分发挥钢板抗拉强度大和混凝土抗压性能好的特点,可减小混凝土厚度和构件自重,既安全又经济,并具有增加使用空间等优点,因此与钢结构、钢筋混凝土结构和预应力钢筋混凝土结构是不同的。

钢板混凝土梁的典型结构是由上下表板(钢板)与混凝土夹心及腹筋构成,如图1所示。为了确保钢板与混凝土的整体性,防止使用期间由于钢板挤压屈曲变形而脱离混凝土,在钢板上焊有分布钢筋毛茬。腹筋的配置主要是为了阻止混凝土斜裂缝的发生与发展,并起到承担剪力的作用。如果像文献<sup>[4]</sup>中所讲的那样采用腹板,将使混凝土被分割成块体,在动荷载作用下,不能保持混凝土的整体性,将对结构很不利,而采用腹钢筋则能克服这一缺点。

钢板混凝土梁属于组合构件,主要由上下表板(钢板)抗弯、混凝土夹心抗剪,与匀质构件相比,具有相对抗弯刚度较大,相对抗剪刚度较小的特点,因而剪变形与转动惯量效应十分显著<sup>[6]</sup>,如果采用经典(普通梁)理论、忽略剪变形、挤压变形和转动惯量效应,就不

能确切反映其受力特点，导致很大的误差。因此必须根据板件非经典理论的基本假定<sup>[7]</sup>和复合板件的非经典弯曲理论<sup>[5]</sup>，计入剪切变形，转动惯量、挤压变形影响，将钢板混凝土梁宏观上看成匀质构件，而将各层构造及材料上特性计入到等效组合弹性常数中去<sup>[8]</sup>，从而求得了钢板混凝土梁组合构件的解析解。文中给出了一组实用的解析表达式和有关数表，为工程设计部门的实际应用提供了方便条件。

## 二、基本动力方程

钢板混凝土梁由上下两等厚钢板与混凝土夹心及腹钢筋和钢筋毛茬所构成，如图 1 所示。

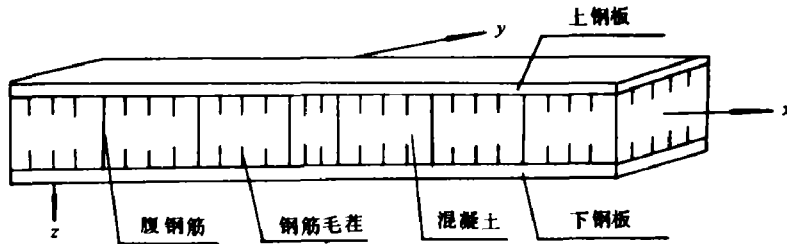


图 1

进行动力分析时，可考虑腹钢筋与钢筋毛茬只起构造作用<sup>[3]</sup>，因此进行构件分析时可取图 2。图中  $E_s (E_c)$ 、 $\mu_s (\mu_c)$ 、 $G_s (G_c)$ 、 $\rho_s (\rho_c)$  表示钢板(混凝土)的弹性模量、泊松比、剪切模量和质量密度，而  $h_s$ 、 $h_c$ 、 $h_c$  分别表示组合梁、钢板和混凝土的厚度， $b$  和  $l$  为组合梁的宽度和长度。

考虑钢板混凝土组合梁各层对称于中面  $xoy$  平行布层，下面基本方程中凡带有角标“s”、“c”者分别表示钢板和混凝土的力学量，无角标“s”、“c”者表示组合梁的力学量。梁在  $xoz$  平面内发生振动，如图 2 示，根据弹性力学理论，采取平面应力假设，对钢板及混凝土有

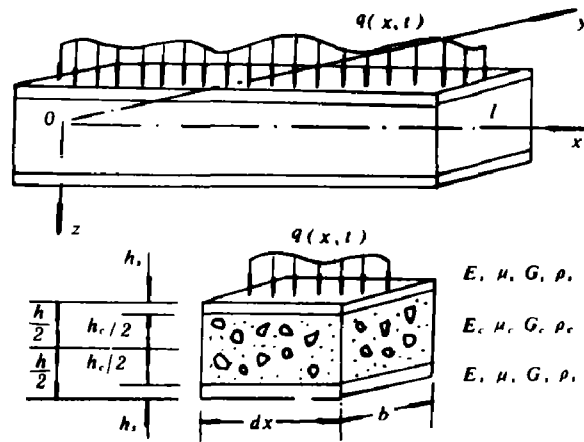


图 2 (图 2 a) (图 2 b)

### 1. 几何方程

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.1) \sim (1.3)$$

### 2. 物理方程

$$\varepsilon_x^i = \frac{1}{E_i} (\sigma_x^i - \mu_i \sigma_z^i) \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_z^i = \frac{1}{E_i} (\sigma_z^i - \mu_i \sigma_x^i) \quad (2.2)$$

$$\gamma_{zx}^i = \tau_{zx}^i / G_i \quad (i = s, c) \quad (2.3)$$

### 3. 平衡方程

$$\frac{\partial \sigma_x^i}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}^i}{\partial z} + K_x - \rho_i \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}^i}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z^i}{\partial z} + K_z - \rho_i \frac{\partial^2 w^i}{\partial t^2} = 0 \quad (i = s, c) \quad (3.2)$$

对基于上述方程的弹性构件,按板件非经典理论“水平位移偏离直线部分沿各截面是几何相似的”假定<sup>[7]</sup>,有水平位移分量

$$u(x, z, t) = -\frac{\partial w}{\partial x} z + \Psi(x, t) P(z) = -\frac{\partial w}{\partial x} z + \Psi(x, t) \frac{z}{h} \quad (4)$$

式中右边第二项为剪切变形引起的附加项,  $\Psi(x, t)$  为广义剪切角,而剪切变形分布函数按 Hencky 理论取  $P(z) = \frac{z}{h}$ <sup>[7]</sup>,即为直线假设。根据式(1)应变与位移的关系有应变分量

$$\varepsilon_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{z}{h} \quad (5.1)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (5.2)$$

$$\gamma_{zx} = \Psi(x, t) \frac{d p(z)}{d z} = \Psi(x, t) \frac{T(z)}{h} = \Psi(x, t) \frac{1}{h} \quad (5.3)$$

由式(5.3)代入式(2.3),对于小变形情况有

$$G_i \gamma_{zx}^i = G_i \Psi(x, t) \frac{d p(z)}{d z} = G_i \frac{\Psi(x, t)}{h} T(z) = \tau_{zx}^i(x, t) T(z) = Q f(z) \quad (i = s, c) \quad (6.1)$$

对式(6.1)沿横截面进行积分有

$$\begin{aligned} Q \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} f(z) d z d y &= G_i \frac{\Psi(x, t)}{h} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} T(z) d z d y \\ &= \tau_{zx}^i \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} T(z) d z \quad (i = s, c) \end{aligned}$$

剪力为

$$Q = \frac{b}{K_0} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx}^i(x, t) T(z) d z = \frac{F}{K_0} \tau_{zx}^i \quad (i = s, c) \quad (6.2)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} T(z) d z = h \quad (6.3)$$

式中  $F$  为梁的横截面积,而矩形截面梁的剪切形状系数为

$$K_0 = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} f(z) d z d y = \frac{6}{5} \quad (7.1)$$

其中被积函数为<sup>10</sup>

$$f(z) = \frac{9}{4bh^3} (h^2 - 4z^2)^2 \quad (7.2)$$

因此式(6.1)成为<sup>9,11</sup>

$$G_i \gamma'_{:x} = G_i \frac{\Psi(x,t)}{h} = \tau'_{:x}(x,t) = \frac{K_0}{F} Q \quad (i = s, c) \quad (8)$$

在上述式中, 由于考虑钢板混凝土梁横截面上剪应力分布的不均匀, 为了弥补直线假设的缺陷, 有必要引进  $K_0$  加以修正。若不加以修正则  $K_0 = 1$ 。将式(8)代入式(4)得

$$u'(x, z, t) = -\frac{\partial w}{\partial x} z + \frac{K_0 Q}{F G_i} z \quad (i = s, c) \quad (9)$$

将式(8)代入式(5)有

$$\varepsilon'_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z + \frac{K_0}{G_i F} \frac{\partial Q}{\partial x} z \quad (10.1)$$

$$\gamma'_{:x} = \frac{\Psi}{h} = \frac{K_0}{G_i F} Q \quad (i = s, c) \quad (10.2)$$

由于挤压变形很小, 可以略去不计, 即认为  $\varepsilon'_x = 0$ ; 按式(2.1)、(2.2)有

$$\sigma'_x = \frac{E_i}{1 - \mu_i^2} \varepsilon'_x \quad (i = s, c) \quad (11)$$

将式(10)代入式(11)有

$$\sigma'_x = \frac{E_i}{1 - \mu_i^2} \left[ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z + \frac{K_0}{G_i F} \frac{\partial Q}{\partial x} z \right] \quad (i = s, c) \quad (12)$$

与上面应力相应的弯矩为

$$M = \int_F \sigma_x z dF = 2 \int_{-b/2}^{b/2} \left[ \int_0^{h_{c,2}} \sigma'_x z dz + \int_{h_{c,2}}^{h/2} \sigma'_x z dz \right] dy = \bar{E} I \frac{\partial \beta}{\partial x} \quad (13)$$

式中各弹性常数为:

梁组合抗弯刚度

$$\bar{E} I = \bar{E} I^c + \lambda \bar{E} I^s$$

混凝土与钢板的抗弯刚度及折合系数

$$\bar{E} I^c = \frac{E_c}{(1 - \mu_c^2)} \frac{b h_c^3}{12}, \quad \bar{E} I^s = \frac{E_s}{(1 - \mu_s^2)} \frac{b h_s^3}{12}, \quad \lambda = \frac{h^3 - h_c^3}{h_s^3}$$

梁剪切变形系数

$$K_T = \frac{K_0}{\bar{E} I F} \left[ \frac{\bar{E} I^c}{G_c} + \lambda \frac{\bar{E} I^s}{G_s} \right]$$

混凝土与钢板的剪切模量

$$G_c = \frac{E_c}{2(1 + \mu_c)}, \quad G_s = \frac{E_s}{2(1 + \mu_s)}$$

而组合梁的广义转角为

(14)

$$\beta(x, t) = -\frac{\partial w}{\partial x} + K_T Q \quad (15)$$

对式(3)沿梁厚积分并注意式(8)、(14)、(15)(此时取体积力 $K_z = K_x = 0$ , 而只有惯性力项)得组合梁的动力平衡方程为<sup>(9)</sup>(对于上表面受载情况)

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + q - \overline{\rho F} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (16.1)$$

$$Q - \frac{\partial M}{\partial x} + \overline{\rho J} \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = 0 \quad (16.2)$$

式中 $\overline{\rho F}$ 、 $\overline{\rho J}$ 为组合梁之折合移动质量及折合转动惯量

$$\overline{\rho F} = b(\rho_c h_c + 2\rho_s h_s) \quad (14.2)$$

$$\overline{\rho J} = \frac{b}{12}(\rho_c h_c^3 + \lambda \rho_s h_s^3) \quad (14.3)$$

将式(13)、(15)代入式(16)有

$$\overline{\rho F} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1}{K_T} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) = q \quad (17.1)$$

$$\overline{\rho J} \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} - \overline{EI} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{1}{K_T} \left( \beta + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (17.2)$$

式(17)为钢板混凝土组合梁的基本动力方程, 由式(17)可推出组合梁横向振动的基本微分方程为<sup>(11)</sup>

$$\begin{aligned} \overline{EI} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \overline{\rho F} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (\overline{\rho J} + \overline{EI} K_T \overline{\rho F}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \overline{\rho J} K_T \overline{\rho F} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = \\ = q + K_T \overline{\rho J} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \overline{EI} K_T \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (18.1)$$

$$\beta + \overline{\rho J} K_T \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \overline{EI} K_T \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial w}{\partial x} - \overline{EI} K_T \overline{\rho F} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} = -K_T \overline{EI} \frac{\partial q}{\partial x} \quad (18.2)$$

### 三、自由振动解

对于钢板混凝土梁的自由振动解, 可设位移及广义转角函数为

$$w(x, t) = X(x) \sin(\omega t + \varphi), \quad \beta(x, t) = \Phi(x) \sin(\omega t + \varphi) \quad (19)$$

将式(19)代入式(18.1)、(18.2) 并取 $q = 0$ , 得振型方程为

$$X''''(x) + \left(\frac{r}{l}\right)^2 [R^2 + S^2] X''(x) - \left(\frac{r}{l^2}\right)^2 [1 - r^2 R^2 S^2] X(x) = 0 \quad (20.1)$$

$$[1 - r^2 R^2 S^2] \Phi(x) + (Rl)^2 X'' + [1 + r^2 R^4] X'(x) = 0 \quad (20.2)$$

其中

$$r^2 = \frac{\omega^2 \overline{\rho F}}{EI} l^2; \quad R^2 = \frac{K_T \overline{EI}}{l^2}; \quad S^2 = \frac{\overline{\rho J}}{\overline{\rho F} l^2} \quad (20.3)$$

对方程(20.1)的特征根分两种情形进行讨论

情形〈1〉,当  $[R^2 + S^2] \leq \left[ (R^2 - S^2)^2 + \frac{4}{r^2} \right]^{1/2}$  时

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm \frac{r}{\sqrt{2}l} \left\{ -[R^2 + S^2] + \left[ (R^2 - S^2)^2 + \frac{4}{r^2} \right]^{1/2} \right\}^{1/2} = \pm \frac{r}{l} \alpha \\ \lambda_{3,4} &= \pm i \frac{r}{\sqrt{2}l} \left\{ [R^2 + S^2] + \left[ (R^2 - S^2)^2 + \frac{4}{r^2} \right]^{1/2} \right\}^{1/2} = \pm i \frac{r}{l} k \end{aligned} \right\} \quad (21.1)$$

得振型解为

$$X(x) = c_1 \operatorname{ch} ar\xi + c_2 \operatorname{sh} ar\xi + c_3 \cos kr\xi + c_4 \sin kr\xi \quad (22.1)$$

$$\Phi(x) = a_0(c_1 \operatorname{sh} ar\xi + c_2 \operatorname{ch} ar\xi) + b_0(c_3 \sin kr\xi - c_4 \cos kr\xi) \quad (22.2)$$

式中梁之无量纲长度为

$$\xi = \frac{x}{l} \quad (22.3)$$

而

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{ar(a^2 r^2 R^2 + r^2 R^4 + 1)}{l(r^2 R^2 S^2 - 1)} \\ b_0 &= \frac{kr(k^2 r^2 R^2 - r^2 R^4 - 1)}{l(r^2 R^2 S^2 - 1)} \end{aligned} \right\} \quad (22.4)$$

情形〈2〉,当  $[R^2 + S^2] > \left[ (R^2 - S^2)^2 + \frac{4}{r^2} \right]^{1/2}$  时

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm i \frac{r}{\sqrt{2}l} \left\{ [R^2 + S^2] - \left[ (R^2 - S^2)^2 + \frac{4}{r^2} \right]^{1/2} \right\}^{1/2} = \pm i \frac{r}{l} v \\ \lambda_{3,4} &= \pm i \frac{r}{\sqrt{2}l} \left\{ [R^2 + S^2] + \left[ (R^2 - S^2)^2 + \frac{4}{r^2} \right]^{1/2} \right\}^{1/2} = \pm i \frac{r}{l} k \end{aligned} \right\} \quad (21.2)$$

得振型解为

$$X(x) = d_1 \cos vr\xi + d_2 \sin vr\xi + d_3 \cos kr\xi + d_4 \sin kr\xi \quad (23.1)$$

$$\Phi(x) = a_r(d_1 \sin vr\xi - d_2 \cos vr\xi) + b_r(d_3 \sin kr\xi - d_4 \cos kr\xi) \quad (23.2)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a_r &= \frac{vr(v^2 r^2 R^2 - r^2 R^4 - 1)}{l(r^2 R^2 S^2 - 1)} \\ b_r &= \frac{kr(k^2 r^2 R^2 - r^2 R^4 - 1)}{l(r^2 R^2 S^2 - 1)} \end{aligned} \right\} \quad (23.3)$$

#### 四、各种边界条件下振型及频率解

##### 1. 几种常用边界条件

$$\text{简支: } w = 0, \quad M = 0; \quad (24.1)$$

$$\text{自由: } Q = 0, \quad M = 0; \quad (24.2)$$

$$\text{固定: } w = 0, \quad \beta = 0; \quad (24.3)$$

## 2. 频率方程及振型解

式 (22)、(23) 中的各项系数可由边界条件 (24) 确定, 如取两端为固定—简支时的边界条件为

$$X(x) \Big|_{x=0} = \Phi(x) \Big|_{x=0} = 0; \quad X(x) \Big|_{x=l} = X''(x) \Big|_{x=l} = 0 \quad (25)$$

当式 (22)、(23) 满足式 (24) 后, 考虑到在动荷载作用下, 各种振型都将激发, 因而有:

对于情形 (1)

频率方程

$$\text{th} a_n r_n + C_0 \text{tg} k_n r_n = 0 \quad (26.1)$$

振型解

$$X_n(x) = \text{ch} a_n r_n \xi + \delta_0 \text{sh} a_n r_n \xi - \text{cos} k_n r_n \xi + \delta_0 C_0 \text{sin} k_n r_n \xi \quad (26.2)$$

$$\Phi_n(x) = H \left[ \text{ch} a_n r_n \xi + \frac{1}{\delta_0} \text{sh} a_n r_n \xi - \text{cos} k_n r_n \xi - \frac{1}{\delta_0 C_0} \text{sin} k_n r_n \xi \right] \quad (26.3)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \delta_0 &= \frac{-\text{ch} a_n r_n + \text{cos} k_n r_n}{\text{sh} a_n r_n + C_0 \text{sin} k_n r_n} \\ a_n &= \frac{a_n r_n [1 + a_n^2 r_n^2 R^2 + r_n^2 R^4]}{l [r_n^2 R^2 S^2 - 1]} \\ b_n &= \frac{k_n r_n [k_n^2 r_n^2 R^2 - r_n^2 R^4 - 1]}{l [r_n^2 R^2 S^2 - 1]} \\ c_n &= \frac{a_n}{b_n}, \quad H = a_n \delta_0 \end{aligned} \right\} \quad (26.4)$$

对于情形 (2)

频率方程

$$\text{tg} v_n r_n - C_T \text{tg} k_n r_n = 0 \quad (27.1)$$

振型解

$$X_n(x) = \text{cos} v_n r_n \xi + \delta_T \text{sin} v_n r_n \xi - \text{cos} k_n r_n \xi - \delta_T C_T \text{sin} k_n r_n \xi \quad (27.2)$$

$$\Phi_n(x) = H \left[ \text{cos} v_n r_n \xi - \frac{1}{\delta_T} \text{sin} v_n r_n \xi - \text{cos} k_n r_n \xi + \frac{1}{\delta_T C_T} \text{sin} k_n r_n \xi \right] \quad (27.3)$$

式中

$$\begin{aligned}
 \delta_T &= \frac{-\cos v_m r_m + \cos k_m r_m}{\sin v_m r_m - C_T \sin k_m r_m} \\
 a_T &= \frac{v_m r_m (v_m^2 r_m^2 R^2 - r_m^2 R^4 - 1)}{I (r_m^2 R^2 S^2 - 1)} \\
 b_T &= \frac{k_m r_m (k_m^2 r_m^2 R^2 - r_m^2 R^4 - 1)}{I (r_m^2 R^2 S^2 - 1)} \\
 C_T &= a_T / b_T \\
 H &= -a_T \delta_T
 \end{aligned} \tag{27.4}$$

对于其它边界条件下的频率方程及振型解见表1.2。

由式(21.1)、(21.2)知 $a_m$ 、 $k_m$  (或 $v_m$ 、 $k_m$ )随 $r_m$ 、

$R$ 、 $S$ 变化,当 $\mu_s$ 、 $\mu_c$ 、 $\rho_s$ 、 $\rho_c$ 、 $\frac{h_s}{h_c}$ 、 $\frac{h}{l}$ 给定后(本文取 $\frac{\mu_s}{\mu_c}$

$= 1.8$ ,  $\frac{\rho_s}{\rho_c} = 3.25$ ,  $\frac{h}{l} = 0.1 \sim 0.5$ ;常用 $\frac{h_s}{h_c} \approx 0.01$ ),

就可在厚跨比 $\frac{h}{l} = 0.1 \sim 0.5$ 内确定不同 $\frac{h}{l}$ 的 $R$ 、 $S$ 值,

由 $R$ 、 $S$ 、 $r_m$ 值可求出 $a_m$ 、 $k_m$ (或 $v_m$ 、 $k_m$ ),由于频率方程

(26.1)(27.1)属于超越函数,当取一确定 $\frac{h}{l}$ 时,只有将

$a_m$ 、 $k_m$ (或 $v_m$ 、 $k_m$ )、 $r_m$ 反复代入才能求出满足方程的 $r_m$ 值,

运算中除已给定的参数外, $a_m$ 、 $k_m$ (或 $v_m$ 、 $k_m$ )随 $r_m$ 的不同而不同。

为了求出不同厚跨比的频率系数 $r_m$ 值又取决于 $\frac{h}{l}$ 。

因此按不同厚跨比并考虑含钢率,由式(26.1)、(27.1)算出了头三阶频率系数 $r_m$ ( $m=1, 2, 3$ )

随 $\frac{h_s}{h_c}$ 、 $\frac{h}{l}$ 变化的曲线图,如图3所示。

那么这种钢板混凝土梁的头三阶圆频率就可由图3查取 $r_m$ 值后按式(20.3)计算为。

$$\omega_m = \frac{r_m}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}} \quad (m = 1, 2, 3) \tag{28}$$

其它各种边界条件下梁的头三阶频率由表3(可制成 $r_m - (h_s/h_c)(h/l)$ 图)查取 $r_m$ 值后代入式(28)计算。固有频率为

$$f_m = \frac{r_m}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}} \quad (m = 1, 2, 3) \tag{29}$$

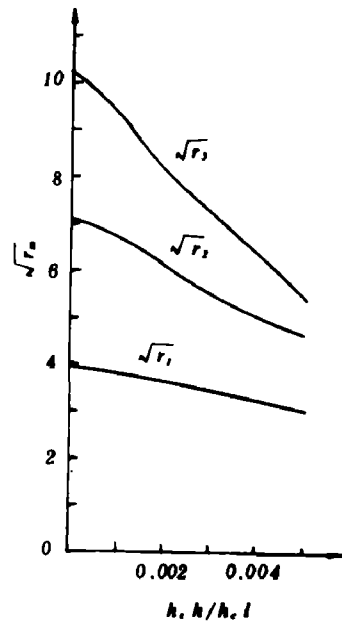


图 3



表 1 情形〈1〉之频率方程及振型函数

边界条件	$(R^2 + S^2) < [(R^2 - S^2)^2 + \frac{4}{r_2^2}]^{1/2}$	$r_2^2 = \frac{\omega_0^2 \rho F}{EI} l^2; \quad R^2 = \frac{K_1 EI}{l^2}$
简支—简支	$\sin k_m r_m = 0$	$S^2 = \frac{\rho J}{\rho F l^2}; \quad \zeta = \frac{x}{l}$
自由—自由	$2 - 2\text{ch}_m r_m \cos k_m r_m - (\frac{e_0}{c_0 \sqrt{d_0}} - \frac{c_0 \sqrt{d_0}}{e_0}) \text{sh} a_m r_m \text{sink}_m r_m = 0$	$a_m = \frac{a_0 r_m (a_0^2 r_m^2 R^2 + r_2^2 R^4 + l)}{l (r_2^2 R^2 S^2 - l)}$
固定—固定	$2 - 2\text{cha}_m r_m \cos k_m r_m - ((a_0/b_0) - (b_0/a_0)) \text{sha}_m r_m \text{sink}_m r_m = 0$	$b_0 = \frac{k_m r_m (k_m^2 r_m^2 R^2 - r_2^2 R^4 - l)}{l (r_2^2 R^2 S^2 - l)}$
固定—自由	$(e_0 \sqrt{d_0} + l) - (\frac{e_0}{c_0} + c_0 \sqrt{d_0}) \text{cha}_m r_m \cos k_m r_m - (e_0 - \sqrt{d_0}) \text{sha}_m r_m \text{sink}_m r_m = 0$	$c_0 = a_0/b_0; \quad d_0 = a_0^2/k_m^2$
固定—简支	$\text{th} a_m r_m + c_0 \text{tg} k_m r_m = 0$	$e_0 = \frac{a_0 l + a_m r_m}{b_0 l - k_m r_m} = \frac{a_m (a_m^2 + (R^2 + S^2))}{k_m (k_m^2 - (R^2 + S^2))}$
简支—自由	$\text{th} a_m r_m + e_0 / c_0 \sqrt{d_0} \text{tg} k_m r_m = 0$	$H = -b_0$
	$a_m = \frac{l}{\sqrt{2}} \{ \mp [(R^2 + S^2)^2 + (\frac{4}{r_2^2})]^{1/2} \}^{1/2}$	$H = a_0 \delta_0$
简支—简支	$X_m(x) = \sin k_m r_m \zeta \quad \Phi_m(x) = H \cos k_m r_m \zeta$	
自由—自由	$X_m(x) = \text{cha}_m r_m \zeta + \delta_0 \text{sha}_m r_m \zeta - c_0 \sqrt{d_0} \cos k_m r_m \zeta + e_0 \delta_0 \sin k_m r_m \zeta$ $\Phi_m(x) = H (\text{cha}_m r_m \zeta + (1/\delta_0) \text{sha}_m r_m \zeta - (e_0/c_0) \cos k_m r_m \zeta - (\sqrt{d_0}/\delta_0) \text{sink}_m r_m \zeta)$	$\delta_0 = \frac{\cos k_m r_m - \text{cha}_m r_m}{\text{sha}_m r_m - (e_0/(c_0 \sqrt{d_0})) \text{sink}_m r_m}$
固定—固定	$X_m(x) = \text{cha}_m r_m \zeta + \delta_0 \text{sha}_m r_m \zeta - \cos k_m r_m \zeta + c_0 \delta_0 \sin k_m r_m \zeta$ $\Phi_m(x) = H (\text{cha}_m r_m \zeta + (1/\delta_0) \text{sha}_m r_m \zeta - \cos k_m r_m \zeta - (1/(c_0 \delta_0)) \text{sink}_m r_m \zeta)$	$\delta_0 = \frac{\cos k_m r_m - \text{cha}_m r_m}{\text{sha}_m r_m + c_0 \sin k_m r_m}$
固定—自由	$X_m(x) = \text{cha}_m r_m \zeta + \delta_0 \text{sha}_m r_m \zeta - (1/\delta_0) \cos k_m r_m \zeta + c_0 \delta_0 \sin k_m r_m \zeta$ $\Phi_m(x) = H (\text{cha}_m r_m \zeta + (1/\delta_0) \text{sha}_m r_m \zeta - \cos k_m r_m \zeta - (1/(c_0 \delta_0)) \text{sink}_m r_m \zeta)$	$\delta_0 = \frac{(1/c_0) \cos k_m r_m - \sqrt{d_0} \text{cha}_m r_m}{\sqrt{d_0} \text{sha}_m r_m + \text{sink}_m r_m}$
固定—简支	$X_m(x) = \text{cha}_m r_m \zeta + \delta_0 \text{sha}_m r_m \zeta - \cos k_m r_m \zeta + c_0 \delta_0 \text{sink}_m r_m \zeta$ $\Phi_m(x) = H (\text{cha}_m r_m \zeta + (1/\delta_0) \text{sha}_m r_m \zeta - \cos k_m r_m \zeta - (1/(c_0 \delta_0)) \text{sink}_m r_m \zeta)$	$\delta_0 = \frac{\cos k_m r_m - \text{cha}_m r_m}{\text{sha}_m r_m + c_0 \text{sink}_m r_m}$
简支—自由	$X_m(x) = \text{sha}_m r_m \zeta + \delta_0 \text{sink}_m r_m \zeta$ $\Phi_m(x) = H (\text{cha}_m r_m \zeta - (\delta_0/c_0) \cos k_m r_m \zeta)$	$\delta_0 = \frac{-c_0 \sqrt{d_0} \text{sha}_m r_m}{\text{sink}_m r_m}$

频率方程

振型函数

表 2 情形(2)之频率方程及振型函数

边界条件	$(R^2 + S^2) - [(R^2 - S^2)^2 + (4/r_0^2)]^{1/2}$	$a_r = \frac{v_m r_m (v_m^2 r_m^2 R^2 - r_m^2 R^2 - I)}{I (r_m^2 R^2 S^2 - I)}$
简支—简支	$\sin k_m r_m = 0 \quad [k_m r_m = m\pi (m = 1, 2, \dots)]$	$b_r = b_0, \quad c_r = a_r/b_r$
自由—自由	$2 - 2 \cos v_m r_m \cos k_m r_m + \left( \frac{c_r \sqrt{d_r}}{e_r} + \frac{e_r}{c_r \sqrt{d_r}} \right) \sin v_m r_m \sin k_m r_m = 0$	$d_r = v_m^2/k_m^2$
固定—固定	$2 - 2 \cos v_m r_m \cos k_m r_m - \left( \frac{a_r}{b_r} + \frac{b_r}{a_r} \right) \sin v_m r_m \sin k_m r_m = 0$	$e_r = \frac{-a_r I + v_m r_m}{b_r I - k_m r_m}$
固定—自由	$\left( e_r \sqrt{d_r} - 1 \right) + \left( c_r d_r - \frac{e_r}{c_r} \right) \cos v_m r_m \cos k_m r_m + \left( \sqrt{d_r} - e_r \right) \sin v_m r_m \sin k_m r_m = 0$	$= \frac{v_m [-v_m^2 + (R^2 + S^2)]}{k_m [k_m^2 - (R^2 + S^2)]}$
固定—简支	$\operatorname{tg} v_m r_m - c_r \operatorname{tg} k_m r_m = 0$	
简支—自由	$\operatorname{tg} v_m r_m + \left( e_r/c_r \sqrt{d_r} \operatorname{tg} k_m r_m = 0 \right)$	
	$v_m = \frac{I}{k_m \sqrt{2}} \{ (R^2 + S^2) \mp [(R^2 - S^2)^2 + \frac{4}{r_0^2}]^{1/2} \}^{1/2}$	
简支—简支	$X_m(x) = \sin k_m r_m \delta \quad \Phi_m(x) = H \cos k_m r_m \delta$	$H = -b_r$
自由—自由	$X_m(x) = \cos v_m r_m \delta + \delta_r \sin v_m r_m \delta - c_r \sqrt{d_r} \cos k_m r_m \delta + e_r \delta_r \sin k_m r_m \delta$ $\Phi_m(x) = H \left( \cos v_m r_m \delta - \frac{1}{\delta_r} \sin v_m r_m \delta + \frac{e_r}{c_r} \cos k_m r_m \delta + \left( \sqrt{d_r}/\delta_r \right) \sin k_m r_m \delta \right)$	$H = -a_r \delta_r$
固定—固定	$X_m(x) = \cos v_m r_m \delta + \delta_r \sin v_m r_m \delta - \cos k_m r_m \delta - c_r \delta_r \sin k_m r_m \delta$ $\Phi_m(x) = H \left( \cos v_m r_m \delta - (1/\delta_r) \sin v_m r_m \delta - \cos k_m r_m \delta + (1/c_r \delta_r) \sin k_m r_m \delta \right)$	$H = -a_r \delta_r$
固定—自由	$X_m(x) = \cos v_m r_m \delta + \delta_r \sin v_m r_m \delta - \cos k_m r_m \delta - c_r \delta_r \sin k_m r_m \delta$ $\Phi_m(x) = H \left( \cos v_m r_m \delta - (1/\delta_r) \sin v_m r_m \delta - \cos k_m r_m \delta + (1/c_r \delta_r) \sin k_m r_m \delta \right)$	$H = -a_r \delta_r$
固定—简支	$X_m(x) = \cos v_m r_m \delta + \delta_r \sin v_m r_m \delta - \cos k_m r_m \delta - c_r \delta_r \sin k_m r_m \delta$ $\Phi_m(x) = H \left( \cos v_m r_m \delta - (1/\delta_r) \sin v_m r_m \delta - \cos k_m r_m \delta + (1/c_r \delta_r) \sin k_m r_m \delta \right)$	$H = -a_r \delta_r$
简支—自由	$X_m(x) = \sin v_m r_m \delta + \delta_r \sin k_m r_m \delta$ $\Phi_m(x) = H \left( \cos v_m r_m \delta + (\delta_r/c_r) \cos k_m r_m \delta \right)$	$H = -a_r$

表 3 频率系数表

边界 条件	$\frac{h_1 h_2}{h_1 l}$ $\sqrt{r_m}$	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005
		简支—简支	$\sqrt{r_1}$	$\pi$	3.116322	3.047351	2.950909
	$\sqrt{r_2}$	$2\pi$	6.094703	5.684259	5.247875	4.857321	4.523014
	$\sqrt{r_3}$	$3\pi$	8.852735	7.871816	7.025075	6.358153	5.831029
自由—自由	$\sqrt{r_0}$	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	$\sqrt{r_1}$	4.730039	4.634459	4.437934	4.191981	3.951658	3.732744
	$\sqrt{r_2}$	7.853203	7.489318	6.790915	6.100811	5.460913	4.836753
	$\sqrt{r_3}$	10.995792	10.046907	8.773489	7.644571	6.843821	5.877731
固定—固定	$\sqrt{r_1}$	4.730039	4.587050	4.263383	3.908816	3.589362	3.317995
	$\sqrt{r_2}$	7.853203	7.351924	6.462764	5.689951	5.088834	4.620746
	$\sqrt{r_3}$	10.995792	9.894167	8.350524	7.223949	6.427075	5.839182
固定—自由	$\sqrt{r_1}$	1.875085	1.867827	1.847141	1.814822	1.776253	1.732468
	$\sqrt{r_2}$	4.694089	4.572325	4.290148	3.946051	3.648835	3.369437
	$\sqrt{r_3}$	7.854756	7.416588	6.629595	5.863603	5.344529	4.874590
固定—简支	$\sqrt{r_1}$	3.926579	3.854933	3.675946	3.453764	3.231334	3.026806
	$\sqrt{r_2}$	7.068517	6.742039	6.101542	5.492953	4.992936	4.588376
	$\sqrt{r_3}$	10.210176	9.390535	8.124041	7.126030	6.369527	5.386095
简支—自由	$\sqrt{r_0}$	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	$\sqrt{r_1}$	3.926579	3.875529	3.747430	3.576011	3.394237	3.220097
	$\sqrt{r_2}$	7.068517	6.797063	6.264992	5.704001	5.212252	4.766787
	$\sqrt{r_3}$	10.210176	9.474858	8.355431	7.340554	6.402445	5.352336

## 五、强迫振动解

对于钢板混凝土组合梁的强迫振动方程(17)可设解

$$w(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} X_m(x) T_m(t); \quad \beta(x, \bar{t}) = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(x) T_m(t) \quad (30)$$

其中  $X_m(x)$ 、 $\Phi_m(x)$  为组合梁的各阶振型函数, 如表1、2已知, 将式(30.1)、(30.2)代入方程(17)有

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} [\rho \bar{F} \ddot{T}(t) X_n(x) - \frac{1}{k_T} (X_n''(x) + \Phi_n'(x) T_n(t))] &= q(x, t) \\ \sum_{n=1}^{\infty} [\rho \bar{J} \ddot{T}(t) \Phi_n(x) - \bar{E} I \Phi_n''(x) T_n(t) + \frac{1}{k_T} (\Phi_n(x) + X_n'(x)) T_n(t)] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

利用各阶振型所满足的振型方程

$$\left. \begin{aligned} -\omega_n^2 \rho \bar{F} X_n(x) - \frac{1}{k_T} (X_n''(x) + \Phi_n'(x)) &= 0 \\ -\omega_n^2 \rho \bar{J} \Phi_n(x) - \bar{E} I \Phi_n''(x) + \frac{1}{k_T} (\Phi_n(x) + X_n'(x)) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

式(31)可以写成为

$$f_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t)] \rho \bar{F} X_n(x) - q(x, t) = 0 \quad (33.1)$$

$$f_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t)] \rho \bar{J} \Phi_n(x) = 0 \quad (33.2)$$

其中 $\omega_n$ 为梁的各阶圆频率, 已由上节式(28)求得, 进一步取

$$\int_0^l [f_1(x, t) X_n(x) + f_2(x, t) \Phi_n(x)] dx = 0 \quad (34)$$

并利用振型正交条件<sup>[2]</sup>

$$\int_0^l [\rho \bar{F} X_m(x) X_n(x) + \rho \bar{J} \Phi_m(x) \Phi_n(x)] dx \begin{cases} = 0 & \text{当 } m \neq n \\ \neq 0 & \text{当 } m = n \end{cases} \quad (35)$$

便得

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = \frac{P_n(t)}{M_n} \quad (36)$$

其中梁之各阶广义力及广义质量为:

$$P_n(t) = \int_0^l q(x, t) X_n(x) dx \quad (37.1)$$

$$M_n = \int_0^l [\rho \bar{F} X_n^2(x) + \rho \bar{J} \Phi_n^2(x)] dx \quad (37.2)$$

而式(36)的解为(应用杜哈梅积分)

$$T_n(t) = a_n \sin \omega_n t + b_n \cos \omega_n t + \frac{1}{\omega_n M_n} \int_0^t P_n(\tau) \sin \omega_n (t - \tau) d\tau \quad (38)$$

## 六、抗爆分析

### 1. 钢板混凝土梁在随时间变化的爆炸荷载

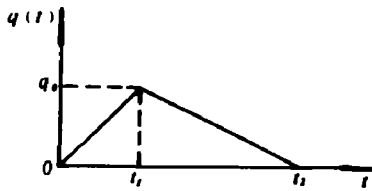


图 4

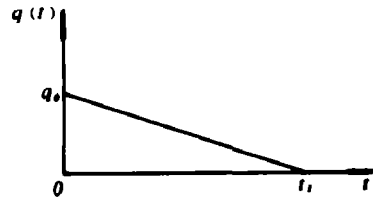


图 5

$$q(t) = \begin{cases} q_0(t/t_1) & 0 < t < t_1 \\ q_0(\frac{t_2}{t_2-t_1})(1-\frac{t}{t_2}) & t_1 < t < t_2 \end{cases}$$

作用下 (如图 4) 的动力反应, 按式(38)有

$$T_m(t) = a_m \sin \omega_m t + b_m \cos \omega_m t + \frac{c_m q_0}{\omega_m M_m} K_m(t) \quad (39.1)$$

其中

$$K_m(t) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_m} \left[ \frac{t}{t_1} - \frac{\sin \omega_m t}{\omega_m t_1} \right] & 0 < t < t_1 \\ \frac{1}{\omega_m} \left[ \frac{t}{t_1} - \frac{\sin \omega_m t}{\omega_m t_1} - \frac{t_2(t-t_1)}{t_1(t_2-t_1)} + \frac{t_2 \sin \omega_m(t-t_1)}{\omega_m t_1(t_2-t_1)} \right] & t_1 < t < t_2 \\ \frac{1}{\omega_m} \left[ -\frac{\sin \omega_m t}{\omega_m t_1} + \frac{t_2 \sin \omega_m(t-t_1)}{\omega_m t_1(t_2-t_1)} - \frac{\sin \omega_m(t-t_2)}{\omega_m(t_2-t_1)} \right] & t_2 < t \end{cases} \quad (39.2)$$

## 2. 钢筋混凝土梁在按时间衰减的均布爆炸荷载

$$q(t) = \begin{cases} q_0(1-t/t_1), & t \leq t_1 \\ 0, & t > t_1 \end{cases}$$

作用下的动力反应按式(38)可得式(39.1), 而其中

$$K_m(t) \begin{cases} \frac{1}{\omega_m} \left[ 1 - \cos \omega_m t - (t/t_1) + \frac{\sin \omega_m t}{\omega_m t_1} \right] & 0 < t < t_1 \\ \frac{1}{\omega_m} \left[ -\cos \omega_m t + \frac{1}{\omega_m t_1} (\sin \omega_m t - \sin \omega_m(t-t_1)) \right] & t \geq t_1 \end{cases} \quad (39.3)$$

而式(39.1)中广义质量为

$$M_m = \int_l [\bar{\rho} F X_m^2(x) + \bar{\rho} J \Phi_m^2(x)] dx = \bar{\rho} F d_m + \bar{\rho} J e_m \quad (40)$$

式(39.1)与(40)中

$$\left. \begin{aligned} c_n &= \int_l X_n(x) dx \\ d_n &= \int_l X_n^2(x) dx \\ e_n &= \int_l \Phi_n^2(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

而 $a_n$ 、 $b_n$ 由初始条件确定。将式(39.1)代入式(30),当时间 $t$ 确定后就可在爆炸载荷作用下梁的位移 $w$ 和广义转角 $\beta$ ,进而可由式(6)、(12)、(13)、(15)计算梁剪应力 $\tau$ ,正应力 $\sigma$ ,弯矩 $M$ 和剪力 $Q$ 。

## 七、讨 论

1.对于振动微分方程(18)略去剪变形与转动惯量的有关项,并注意式(16)、(17)便得普通梁的振动方程为

$$\bar{E}I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho \bar{F} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (42.1)$$

或

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + q = \rho \bar{F} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (42.2)$$

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x} = -\bar{E}I \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (42.3)$$

2.若将式(42.1)、(42.2)去掉含时间 $t$ 的项,就成为梁的静力方程,即

$$\bar{E}I \frac{d^4 w}{dx^4} = q \quad (43.1)$$

或

$$\frac{dQ}{dx} = -q \quad (43.2)$$

$$Q = \frac{dM}{dx} = -\bar{E}I \frac{d^3 w}{dx^3} \quad (43.3)$$

3.由图3或表3查出频率系数 $r_n$ 后代入式(28)求出圆频率 $\omega_n$ ,再由式(22)、(23)求出(或由表1、2查出)振型函数 $X_n(x)$ 、 $\Phi_n(x)$ ,各种边界条件下梁的位移 $w_n(x, t)$ 和广义转角 $\beta_n(x, t)$ 就可由 $\omega_n$ 、 $X_n(x)$ 、 $\Phi_n(x)$ 代入式(19)求出,进而可由式(13)、(15)、(6)、(12)计算弯矩 $M$ 、剪力 $Q$ 、剪应力 $\tau$ 和拉压应力 $\sigma$ 等值。

## 八、结 束 语

1.从图3(或表3)可以看出曲线在纵座标轴上(表3中 $(h, h/h_c l) = 0$ 之列)各交点为普通梁频率系数解。钢筋混凝土梁含钢率较低,在一般厚跨比范围内(相应 $(h, h/h_c l)$ 在 $0 \sim 0.0008$ 范围内), $\sqrt{r_n}$ 值与普通梁理论解(即曲线与纵轴交点)相接近,可应用普通梁理论来求解。

2. 从图3(或表3)也可看出,当给定厚跨比( $h/l$ )时,随着含钢率 $h_s/h_c$ 的增大,频率系数曲线变化非常明显。一般钢板混凝土构件含钢率较高(这正是由钢筋改为钢板的主要原因)( $h_s h/h_c l$ )在 $0.001 \sim 0.005$ 之内,这时曲线变化显著(高频尤甚),取经典理论解差别就很大。因此钢板混凝土构件应该应用本文所讨论的方程与解,即必须计入剪切变形和转动惯量效应。而目前钢板混凝土结构分析理论,大部分仍采用一般结构力学的经典理论方法,只计入组合弹性常数及各向异性影响,这是不合适的。本文研究将为确立钢板混凝土组合结构合理力学模型与分析方法提供可能。

3. 对于承受高抗力的防护工程抗爆结构而言,一般设计厚跨比 $h/l$ 较大,同时又含钢率 $h_s/h_c$ 较高,相应的 $h_s h/h_c l$ 就很大,在这种情况下,根据上述分析,其剪切效应与转动惯量效应更趋严重,不容忽略,正如前言中所提到的,应用非经典理论的基本假定是十分必要与重要的。

4. 由于本文采取了平面应力、剪变形按直线分布和忽略挤压变形对弯曲应力影响的这三个假设,计入剪切变形效应和转动惯量效应,对钢板混凝土组合梁在小变形情况下进行了弹性动力分析。在工程实际应用中,对于动力问题人们通常所关心的是基本频率和振型的计算,而对于较低阶的头三阶基频系数 $r_n$ ,文中已经给出了各种边界条件下相应的图表,可供查用,进行工程实际设计及应用时,实际使用频率只要不低于按本文所算的头三阶基本频率,就能满足工程实际使用要求。为偏安全计,可适当提高实际使用频率。

本文所给出的频率及振型方程(表1,2),频率系数表3,频率公式(28)、(29)以及动力反应公式(30)、(38)可以用于钢板混凝土梁的各种动力及抗爆计算。

### 参 考 文 献

- (1) Knowles, P. R., *Composite Steel and Concrete Construction*, London Butterworths (1973).
- (2) Johnson, R. P., *Composite Structures of Steel and Concrete*, Vol. 1, Beams, Columns, Frames and Applications in Building (1975).
- (3) 王震鸣, 固体力学学报, 8 (1981), 409.
- (4) 栖原寿郎等, 日本造船学会论文集, 第141号 (1977), 205.
- (5) 曹志远, 固体力学学报, 4 (1981), 477.
- (6) 曹志远, 力学与实践, 3, 4 (1981), 2.
- (7) 曹志远, 杨昇田, 厚板动力学及其应用, 科学出版社 (1983).
- (8) C. Г. 列赫尼茨基, (胡海昌译), 各向异性板, 科学出版社 (1963).
- (9) A. Л. 菲利波夫, (俞恩等译), 弹性系统的振动, 建筑工业出版社 (1959).
- (10) S. 铁摩辛柯, (胡人礼译), 材料力学, 科学出版社 (1978), 163, 469.
- (11) S. 铁摩辛柯, (胡人礼译), 工程中的振动问题, 人民铁道出版社 (1973).
- (12) Hung T. C., *Development in Mechanics*, 1 (1961), 61.

# THE DYNAMIC CALCULATION AND THE ANTI-BLAST ANALYSIS FOR THE COMPOSITE STEEL-CONCRETE BEAMS

Liu Zongxian

## Abstract

In this paper, the author transforms a steel-concrete beam into an equivalent transverse isotropic member in the thickness direction. Using the elasto-dynamical theory as well as the equivalent non-classical theory of composite plates and by means of dynamical analysis, the governing dynamical equations and the equivalent combined coefficients of elasticity of the member are given. The analytical solutions for the natural frequencies and the dynamic responses of the beam under the action of lateral blast loading are obtained. The mechanical properties and computing characteristics of this type of member are analysed. These results can be directly applied to the various dynamical and anti-blasting calculations for steel-concrete beams.