

# 薄层复合材料的等效格临爱森状态方程

张若棋

(1984年9月19日收到)

本文导出了薄层复合材料的等效格临爱森状态方程, 并利用复合材料中一维波传播的数值模拟结果检验了它的适用性。

## 一、前言

薄层复合材料是由多个相同的单元相互压紧组成的密实体, 其中每一个单元是由不同的金属薄层交替重叠, 或由金属薄层与非金属薄膜交替重叠所组成。当每一个单元中的薄层材料的成份和厚度变化时, 薄层复合材料的动态力学性能也会随之变化。这对致力于解决某些工程问题的人们而言是很向往的。

在冲击载荷作用下, 材料的动态力学性能与应力波在材料中的传播规律密切相关。在实际工作中, 有时要用已知的薄层材料的动态力学参数来计算复合材料的应力波的参数, 有时为了调整复合材料中的应力波参数而去寻求合适的薄层材料的成份和厚度。但是, 由于在薄层复合材料中存在着复杂的波的相互作用, 要精细地解决上述两类问题是很不简便的。从七十年代以来, 国外从理论和实验上提出了复合材料的等效模型, 其基本思想是根据一定的混合法则, 将复合材料等效为一种均质材料<sup>[1,2]</sup>。他们的结果对描述复合材料在低冲击应力下的行为是很不错的。本文则着眼于在较高的冲击压力下材料的动载响应, 利用各薄层材料的格临爱森方程中的已知参数求其组合体——薄层复合材料的等效格临爱森方程。为了检验等效格临爱森方程的适用性, 我们进行了一维波传播规律的数值模拟, 并得出了相应的结论。

## 二、等效格临爱森状态方程

用冲击绝热曲线标定的格临爱森状态方程为

$$P = P_H(V) + [E - E_H(V)] \Gamma(V) / V \quad (1)$$

式中的  $P$  代表压强,  $V$  代表比容,  $E$  代表比内能,  $\Gamma$  代表格临爱森系数, 下标“H”代表雨贡纽曲线上的值。雨贡纽曲线  $P_H(V)$  可以从冲击波速度  $D$  和波后粒子速度  $u$  间的线性关系

$$D = C_0 + \lambda u \quad (2)$$

导出

$$P_H = \frac{C_0^2(V_0 - V)}{[V_0 - \lambda(V_0 - V)]^2} \quad (3)$$

而

$$E_H = \frac{1}{2} P_H (V_0 - V)$$

格临爱森系数  $\Gamma(V)$  可表示为

$$\frac{\Gamma(V)}{V} = \frac{\Gamma_0}{V_0} \quad (4)$$

上式中的下标“0”代表常态条件(室温零压)下的值。 $\Gamma_0$ 与 $\lambda$ 有关,

$$\Gamma_0 = 2\lambda - a \quad (5)$$

式中

$$a = \begin{cases} 2/3 & \text{斯莱特公式} \\ 1 & \text{德——麦克唐奈公式} \\ 4/3 & \text{自由体积公式} \end{cases} \quad (6)$$

由此可知, 只要求得薄层复合材料的  $C_0$ 、 $\lambda$  和  $a$ , 就不难确定它的等效格临爱森状态方程。

设  $i$  表示薄层组合体单元中第  $i$  种材料,  $h_i$  是它的厚度, 则对于有  $n$  个组元的组合体单元, 其等效初始密度  $\rho_0$  可由质量守恒导出

$$\rho_0 = \sum_{i=1}^n \beta_i \rho_{0i} \quad (7)$$

其中  $\beta_i$  是第  $i$  种组元的体积百分比

$$\beta_i = \frac{h_i}{\sum_{i=1}^n h_i} = \frac{h_i}{h} \quad (8)$$

根据文献[3]的假设, 将薄层复合材料看成一种均匀材料, 当压缩波的传播方向与层间的交界面垂直时, 波穿过复合材料所需的时间, 等于穿过每一层所需时间之和, 即

$$\frac{l}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{C_i} \quad (9)$$

在常态条件下, 此式为

$$\frac{l}{C_0} = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{C_{0i}} \quad (10)$$

$C_0$  代表常态下的体声速。文献[4]的实验表明, 某些金属薄层复合材料也存在着击波速度直线式  $D = C_0 + \lambda u$  (对于新的薄层复合材料尚待实验证明), 当将此结果外延到粒子速度为零时,  $C_0$  近似等于用(10)式算出的  $C_0$  (对于某些高分子材料和高压下相变的材料应具体分析), 所以一般地近似有

$$\frac{l}{C_0} = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{C_{0i}} \quad (11)$$

下面再估算薄层复合材料的  $\lambda$  值, 因

$$\left. \frac{dK}{dP} \right|_{\text{常态}} = 4\lambda - 1 \quad (12)$$

式中  $K$  是等熵压缩模量, 所以  $\lambda$  可以通过  $K$  对  $P$  的导数求出。而  $K = \rho C^2$ ,  $\rho = 1/V$ , 利用(9)式得到

$$\frac{1}{\sqrt{VK}} = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{\sqrt{V_i K_i}}$$

将上式对  $P$  求微商后解出

$$\frac{dK}{dP} = 1 + \sum_{i=1}^n \beta_i \left(\frac{V}{V_i}\right)^{1/2} \left(\frac{K}{K_i}\right)^{3/2} \left(\frac{dK_i}{dP} - 1\right) \quad (13)$$

将  $V$  在  $V_0$  处展开, 取一阶项后得到

$$\frac{V}{V_i} = \frac{V_0(1 - P/K_0)}{V_{0i}(1 - P/K_{0i})}$$

式中  $K_{0i}$  是  $K_i$  的常态值。等熵模量  $K$  随压强的变化可取

$$K = K_0 + K_0' P$$

式中  $K_0'$  是个常数。这个关系式就是大家熟悉的推导穆纳汉 (Murnaghan) 状态方程的出发点。由此有

$$\frac{K}{K_i} = \frac{K_0}{K_{0i}} \frac{1 + (K_0'/K_0) P}{1 + (K_{0i}'/K_{0i}) P}$$

一般金属的  $K_0 = 10^3 \sim 10^6$  巴,  $K_0' \approx 4$ , 因而在  $P \sim 10^3$  巴的范围内

$$\left(\frac{V}{V_i}\right)^{1/2} \left(\frac{K}{K_i}\right)^{3/2} \approx \left(\frac{V_0}{V_{0i}}\right)^{1/2} \left(\frac{K_0}{K_{0i}}\right)^{3/2}$$

再考虑到  $K_0 = \rho_0 C_0^2$ , (13)式可写成

$$\frac{dK}{dP} = 1 + \sum_{i=1}^n \beta_i \left(\frac{C_0}{C_{0i}}\right)^3 \frac{\rho_0}{\rho_{0i}} \left(\frac{dK_i}{dP} - 1\right) \quad (14)$$

同样取

$$\left. \frac{dK_i}{dP} \right|_{\text{常态}} = 4\lambda_i - 1$$

因而得到

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[ 1 + \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{\rho_0}{\rho_{0i}} \left(\frac{C_0}{C_{0i}}\right)^3 (2\lambda_i - 1) \right] \quad (15)$$

利用  $\lambda$  可得格临爱森系数的常态值  $\Gamma_0$ , 为此首先使

$$a_i = 2\lambda_i - \Gamma_{0i}$$

并设

$$a = \sum_{i=1}^n \beta_i a_i$$

则

$$a = \sum_{i=1}^n \beta_i (2\lambda_i - \Gamma_{0i}) \quad (16)$$

将(15)及(16)式求出的 $\lambda$ 和 $a$ 代入(5)式, 即得薄层复合材料的 $\Gamma_0$ 。

### 三、数值检验

从假设(9)出发, 并利用一些熟知的近似关系式导出的薄层复合材料的 $C_0$ 、 $\lambda$ 和 $\Gamma_0$ 与实际符合的程度尚须实验证实。本文用一维平面波的数值计算结果来检验(11)、(15)和(16)式的适用性。

数值计算用的一维平面流动的拉格朗日方程组为

$$V = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial R}{\partial X}$$

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X} (P + q) = 0$$

$$u = \frac{\partial R}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + (P + q) \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

$$P = P_H(V) + \frac{\Gamma_0}{V_0} (E - E_H)$$

$$q = \begin{cases} 4\rho(\Delta u)^2 + 0.8(P/\rho)^{1/2}\rho|\Delta u| & (\Delta u < 0) \\ 0 & (\Delta u \geq 0) \end{cases}$$

以上各式中 $R$ 为欧拉坐标,  $X$ 为拉格朗日坐标,  $t$ 为时间,  $q$ 为人工粘性力, 我们采用了Wilkins在1980年给出的形式<sup>[5]</sup>。爆轰波传到炸药—介质界面时的流场采用解析解, 数值检验用的薄层复合材料的样品是由0.174毫米厚的铝箔和0.026毫米厚的铜箔交替迭合组成, 其总厚度为1.6毫米。铝和铜二种材料的声阻抗差别很大, 利用这种薄层复合材料作数值检验用的样品, 容易说明等效格临爱森状态方程的适用性。首先, 我们用厚为1毫米的铝飞片以1500米/秒的速度正撞上述铜薄层复合材料, 考察由此产生的冲击波的传播规律。根据差分数值解得到的在撞击后0.2439微秒时刻的压强空间分布如图一所示。曲线1是按铝铜薄层的实际布局并相应地使用铝或铜的格临爱森状态方程计算得到的结果, 简称为分层模型的结果; 曲线2是将薄层复合材料看成为一种均质材料, 用本文的等效格临爱森状态方程计算得到的结果, 简称为等效模型的结果。图二是离撞击界面的初始位置为0.4725毫米处拉格朗日质点的压强变化史, 曲线1是分层模型的结果, 曲线2是等效模型的结果。众所周知, 由于波在分层材料的界面处会发生复杂的相互作用, 因而波形存在着振荡。图二中曲线1的振荡周期约为0.065微秒, 等于波通过一个铝铜单元的渡越时间的两倍, 一般称之为混响时间。

我们除考虑飞片正撞薄层复合材料产生的冲击波之外, 还计算梯恩梯/硝酸钡(22/78)炸药与薄层复合材料接触爆炸产生的冲击波的传播规律。差分数值解的结果如图三和图四所示。图三给出了炸药爆炸结束后0.1599微秒时刻的压强空间分布。图四给出了离炸药—薄层复合材料分界面的初始位置为0.46毫米处拉格朗日质点的压强变化史。图中的曲线1和曲

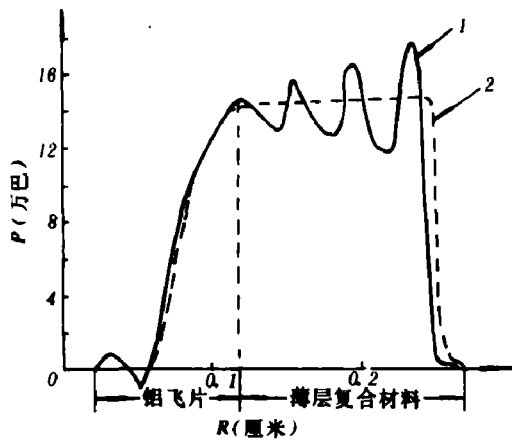


图1  $t = 0.2439$  微秒时铝飞片和铜薄层复合材料中的压强分布 (铝飞片厚 1 毫米,  $u = 1500$  米/秒)

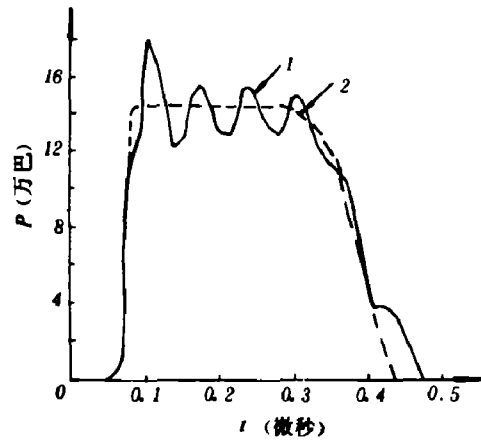


图2 铝铜薄层复合材料中 0.4725 毫米断面处的压强变化史 (铝飞片厚 1 毫米,  $u = 1500$  米/秒)

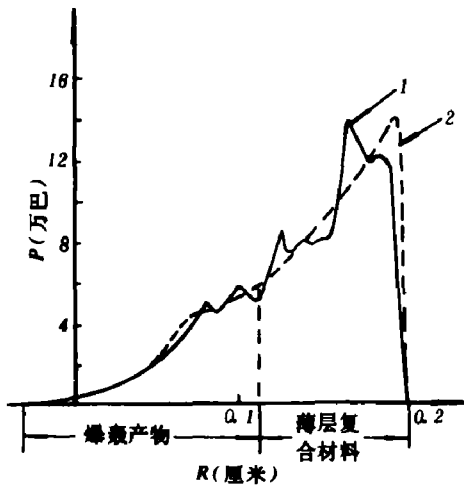


图3  $t = 0.1589$  微秒时炸药—铝铜薄层复合材料中的压强分布

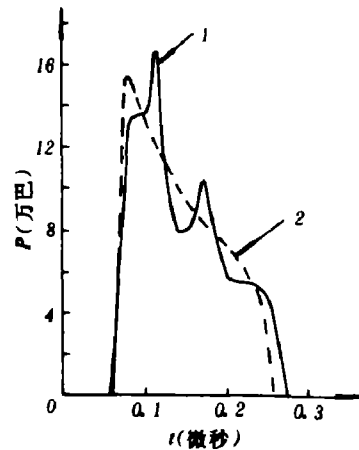


图4 铝铜薄层复合材料中 0.46 毫米断面处的压强变化史

线 2 仍分别代表分层模型和等效模型的结果。

图一到图四已经明显地指出了二种模型之间的差异。由图可见等效模型的波形接近于分层模型的平均波形,而且随着波的混响效应的延续,薄层复合材料中的波幅振荡迅速减少,二种模型之间的差别也随之减少。分层模型计算结果中的波形振荡原则上是由二个因素造成的。一个是波的混响效应,这是正常的因素;另一个是差分数值解方法带来的影响,这是反常的因素。通过合理地选取计算步长和人为粘性,可以减少反常振荡。这样做以后,等效模型与分层模型之间的差别还会减少。

综上所述, 我们可以得出这样的看法: 在一些实际问题中, 如果人们主要关心波的总体结构, 并不强调波的精细结构, 那么就可以用等效格临爱森状态方程来预言薄层复合材料在冲击载荷作用下的平均波形, 这种方法比处理分层模型的方法简便得多。

## 附 录

数值检验时采用的物性常数

铝

$$\rho_0 = 2.70 \text{ 克/厘米}^3 \quad \Gamma_0 = 2.0$$

$$C_0 = 0.5328 \text{ 厘米/微秒} \quad \lambda = 1.388$$

铜

$$\rho_0 = 8.93 \text{ 克/厘米}^3 \quad \Gamma_0 = 1.99$$

$$C_0 = 0.394 \text{ 厘米/微秒} \quad \lambda = 1.489$$

铝铜薄层复合材料(等效模型的计算值)

$$\rho_0 = 3.51 \text{ 克/厘米}^3 \quad \Gamma_0 = 2.17$$

$$C_0 = 0.5094 \text{ 厘米/微秒} \quad \lambda = 1.487$$

梯恩梯(22)/硝酸钡(78)

$$\rho_0 = 2.6 \text{ 克/厘米}^3 \quad \gamma = 3.0$$

$$\text{爆速 } D_f = 0.47 \text{ 厘米/微秒}$$

$$\text{炸药有效长度: } 0.1 \text{ 厘米}$$

## 参 考 文 献

- [1] Barker, L. M., *J. Composite Materials*, **5** (1971), 140.
- [2] Barker, L. M., Lundergan, C. D., Chem, P. J. and Gurtin, E. M., *J. Appl. Mech.* **41** (1974), 1025.
- [3] Kinslow, R., *High-Velocity Impact Phenomena*, Academic Press, New-York and London (1970).
- [4] Romain, J. P., Jacquesson, J., *Revue de Physique Appliquee*, **8** (1973), 157.
- [5] Wilkins, M. L., *J. Comp. Phys.*, **36** (1980), 281.

## AN EFFECTIVE GRÜNEISEN EQUATION OF STATE

### FOR LAMINATED COMPOSITE MATERIALS

Zhang Ruoqi

#### Abstract

An effective Grüneisen equation of state for laminated composite materials is derived in this paper. Its feasibility is examined by means of one-dimensional numerical simulation results in composite materials.