

冲击波起爆炸药的拉格朗日分析方法

沈石 薛鸿陆

(1984年7月31日收到)

本文用最小二乘三次B样条函数拟合各物理量的变化史,给出了一定条件下的拟合精度。用最小二乘二次多项式构造各物理量的径线,编制了拉格朗日(简称拉氏)分析计算程序RFLA。实验测得压装TNT在4.73万巴的持续起爆脉冲作用下,不同拉氏位置上的压强剖面,将其作为RFLA的输入量,解得了压装TNT的起爆流场。用李群相似解检验了计算流场的性态,并作了误差分析计算,证实该拉氏分析计算方法具有一定的可靠性和较好的误差传播特性。

一、引言

非均质凝聚炸药受冲击波起爆过程的动力学研究,近二十年来一直是爆轰领域中的一个重要研究方向,其重要性涉及到炸药的安全性和可靠性问题。随着各种爆炸系列的设计精密化,人们需要了解能量的传输规律和输出极限,需要控制各种压强波形,这就进一步促进了这项研究的发展。

目前,拉氏实验、拉氏分析方法和数值模拟计算三者构成了这样一个研究体系:由实验提供基本信息;用拉氏分析方法求解整个起爆流场;通过分析这些流场信息,来进一步深入理解冲击波起爆非均质凝聚炸药的动力学过程,从而提出合理的本构模型;用这种本构模型去进行流场的数值模拟计算;将模拟的结果与实验结果和拉氏分析计算的结果进行比较,经反复检验之后,可将较成熟的本构模型投入实际应用。可见,拉氏分析方法在实验与理论模拟之间起着重要的桥梁作用,它将流场中各物理量的变化及其相互间的关系更直观、更详细地展示出来。不论是对唯象的、半经验的、还是对从细观或微观机制得出的理论本构模型,拉氏分析方法的计算结果为检验和标定它们提供了重要的依据。

早期的拉氏分析方法是用作图法,即用图解微分法得到压强(或质速)等值线的斜率,再对基本方程组进行数值积分,求得其他物理量⁽¹⁾。这种方法引入的人为误差较大,而且不能充分利用传感器的记录信息。径线技术的引入克服了上述不足,但Seaman⁽²⁾和Vantine⁽³⁾的拉氏分析方法要求输入数据有较高的精度(比如: $<2\%$),这就对实验提出了较高的要求。本

文改进了各物理量的变化史和径线的拟合方法, 考察了拟合精度, 并编制出拉氏分析计算程序“PFLA”, 解得了压装TNT的冲击波起爆流场。本文的拉氏分析方法对于有较大误差(9%)的输入数据, 仍能给出在允许精度范围内的计算结果。

二、拉格朗日分析方法

拉氏分析方法是一种将拉氏量计测得的流动变量史与一维平面流动的微分方程组相结合, 从而确定其他流动变量史的普遍性方法。利用微分关系式

$$\left(\frac{\partial x}{\partial h}\right)_i = \left(\frac{\partial x}{\partial h}\right)_h - \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_h \left(\frac{\partial t}{\partial h}\right)_i \quad (1)$$

将基本微分方程沿迹线积分得:

$$U - U_h = -V_0 \int_i^h \left[\left(\frac{\partial p}{\partial h}\right)_i - \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_h \left(\frac{\partial t}{\partial h}\right)_i \right] dt \quad (2)$$

$$V - V_h = \int_i^h \left[\left(\frac{\partial U}{\partial h}\right)_i - \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_h \left(\frac{\partial t}{\partial h}\right)_i \right] dt \quad (3)$$

$$E - E_h = \int_i^h p(t) \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_h dt \quad (4)$$

下标表示该量为: H : 前导冲击波阵面上; h : 沿迹线; i : 沿径线; 0 : 未扰动炸药; 1 : 未反应炸药; 2 : 已反应产物。 P 、 U 、 V 、 E 、 F 分别表示压强、质速、相对比容、比内能、化学反应度。 V_0 和 t_0 分别表示初始比容和前导冲击波的到达时间。前导冲击波阵面上的量, 用实验数据和冲击波关系式求得。

1. 各物理量沿迹线的变化史

迹线是流体微团的运动轨迹线。由于微分的要求, 各物理量沿迹线的变化史必须拟合成光滑函数。用多项式作整体拟合, 若次数太低, 不能满足曲线变化的要求; 次数太高, 又将出现振荡, 更严重的是: 整体多项式的解析延拓性使小范围的扰动, 传播到整体大范围, 在运算中造成误差积累。样条拟合具有良好的灵活性, 而 B 样条是同阶样条函数空间中一组具有最小支柱的基底。本文用 B 样条作为基函数^[4], 用最小二乘法来拟合各物理量的变化史^[5]。结果将扰动的影晌控制在小范围, 而且减小了偶然误差, 使拟合函数能更好地反映各物理量沿迹线的变化性态。

de Boor指出^[4]分段多项式与样条函数实际上是同一概念, 因此作为它们基底的 B 样条应该象正弦函数那样在“初等函数”中占有重要地位。所以, 同富氏展开一样, B 样条的线性组合可构成样条函数:

$$S(x) = \sum_{i=1}^M c_i B_i(x) \quad (5)$$

c_i 为样条系数, $M = L + k - 1$, L 为样条分区数, B_i 为 k 阶($k-1$ 次) B 样条基函数。本文取 $k = 4$, 即有^[4,5]

$$B_i(x) = 4 \sum_{j=0}^3 \frac{(x - x_{i,j})_+^j}{W(x_{i,j})} \quad (6)$$

其中:

$$(x - x_{l+i})_+^3 = \begin{cases} (x - x_{l+i})^3, & x - x_{l+i} > 0 \\ 0, & x - x_{l+i} \leq 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$W'(x_{l+i}) = \prod_{j=0}^4 (x_{l+i} - x_{l+j}) \quad (8)$$

对于离散数据 $(x_j, y_j), j = 1, 2, \dots, N$, 用样条函数作最小二乘拟合, 取目标函数为:

$$\chi = \sum_{j=1}^N \left[y_j - \sum_{l=1}^M c_l B_l(x_j) \right]^2 \quad (9)$$

令:
$$\frac{\partial \chi}{\partial c_{l'}} = 2 \sum_{j=1}^N \left[y_j - \sum_{l=1}^M c_l B_l(x_j) \right] \cdot B_{l'}(x_j) = 0 \quad (10)$$

得:
$$\sum_{l=1}^M T_{ll'} c_l = K_{l'}, \quad l' = 1, 2, \dots, M \quad (11)$$

其中:
$$T_{ll'} = \sum_{j=1}^N B_l(x_j) \cdot B_{l'}(x_j) \quad (12)$$

$$K_{l'} = \sum_{j=1}^N B_{l'}(x_j) \cdot y_j \quad (13)$$

从(11)式求出 c_l , 从而得出离散数据的样条拟合函数 $S(x)$ 。

将区间 $[a, b]$ 分成 L 个子区间来进行三次样条拟合, 有 $4L$ 个待定系数: 在 $(L - 1)$ 个内节点上, 有函数值、一阶和二阶导数连续的条件, 即有 $3(L - 1)$ 个约束条件, 因此在 $[a, b]$ 上的样条函数具有 $M = L + 3$ 个自由度。如果是样条插值, 则有与节点对应的 $(L + 1)$ 个型值点。因此确定样条插值函数只需补充两个边界条件, 如周期边界条件、 m 和 M 关系式等, 也可采用附加节点的方法。对于样条函数的最小二乘拟合, 型值点数 $N > L + 1$, 而且不需要落在节点上。样条函数由 B 样条的线性组合来构成, 从(6)式可知, 三次 B 样条有五个节点, 因此 M 个线性无关的三次 B 样条, 需要 $L + 7$ 个节点, 所以必须在 $[a, b]$ 区间两端之外各附加三个节点。有定理证明: 样条函数 $s(x)$, 对于给定的一组节点和附加节点, 样条系数 $c_l (l = 1, 2, \dots, M)$ 是唯一的。

设三个附加子区间的长度与内子区间的长度之比分别为 A, B, C 。计算表明: 在 $L > 7, N > 2L, 1.0 < A, B, C < 6.0$ 的较宽范围内, 拟合函数的精度可控制在万分之四以下, 其微分和积分的精度可分别控制在千分之一和十万分之一左右。

2. 径线

径线(Path Line)是一族人为的曲线, 见图1。由于各拉氏位置上的记录时间的起点和长度不同, 沿等时线将不得不放弃一些记录信息。根据(1)式, 用径线和迹线来取代等时线。由径线的灵活性, 可更多地利用记录信息, 更好地反映流场中各物理量的整体变化性态。

若实验测得不同拉氏位置上一组(4条)压强史($i = 1, 2, 3, 4$), 投影在 (h, t) 平面上为等 h 线, 即为迹线。将

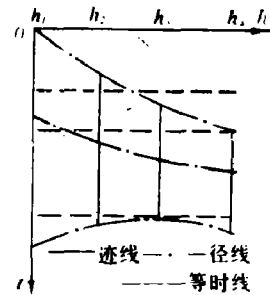


图1 h, t 平面

—迹线 —·—径线 - - -等时线

每条迹线离散成 $(N - 1)$ 份, 得到 $4 \times N$ 个离散点 ($j = 1, 2, \dots, N$)。对于每个固定的 j , 可得到四个离散点, 用最小二乘法拟合成一条曲线, 这条曲线就叫做第 j 条 (h, t) 径线。沿 (h, t) 径线, 各物理量一般是 h, t 的双变量函数, 将它们变为 (h, t) 径线弧长 l 的单变量函数, 从而得到各物理量的径线。比如, 用二次多项式来构造第 j 条压强径线

$$p_j = a_{1j}l^2 + a_{2j}l + a_{3j} \quad (14)$$

从实验曲线用最小二乘三次 B 样条拟合出压强史, 又用多项式构造出压强径线, 两者在 (p, h, j) 空间交织成了一个压强曲面, 见图 2。从这个压强曲面出发, 利用 (2) 式求得质速, 用同样的方法可作出质速曲面, 从而求得比容, 比内能曲面。对于给定的状态方程, 若采用某一混合法则, 如:

$$\left. \begin{aligned} V &= FV_2 + (1 - F) \cdot V_1 \\ p &= p_1 = p_2 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

还能求出化学反应度和其他物理量。这样, 整个流场就求解了。根据上述思路, 我们编制了拉氏分析计算程序“RFLA”。RFLA 要求一组压强史作为输入量。本文以压装 TNT 为研究对象, 解得它在特定加载条件的起爆流场。

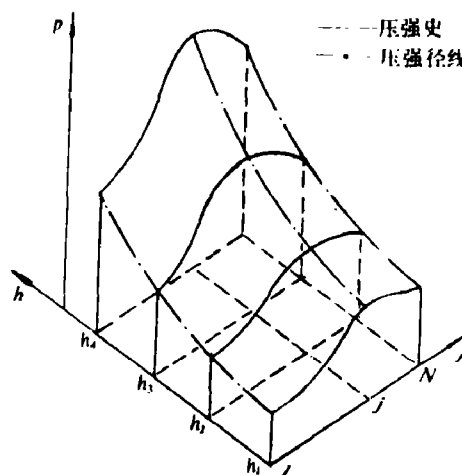


图 2 压强曲面

三、实 验

初始密度为 1.602 ± 0.006 克/厘米³ 的压装 TNT, 用初始幅度为 4.73 万巴的梯形长脉冲 (幅度下降速率为每微秒 0.4 万巴) 起爆。用工字型锰铜传感器⁽⁴⁾ 记录不同拉氏位置上的压强剖面。实验装置见图 3。每发实验用两个压阻计: 一个总是放在端面上监测输入压强剖面; 另一个则放于不同的拉氏位置, 记录对应的压强剖面。在被测炸药密度较一致的条件下, 认为输入压强剖面一致的实验是相容性较好的实验, 从而得到一族压强剖面。用最小二乘三次 B 样条拟合成压强史, 作为 RFLA 的输入量, 见图 4。它们的误差估计值见表 1。

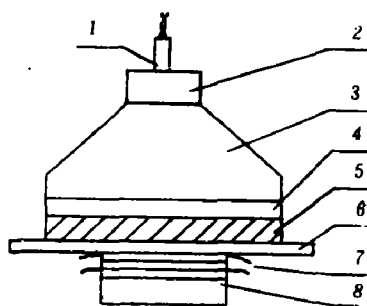


图 3 实验装置

1. 8° 雷管; 2. 传爆药柱; 3. 平面波发生器 ($\phi 99.8$); 4. 主药柱 (压装 TNT, $\rho_0 = 1.56$ 克/厘米³, $\phi 97.5 \times 12.5$); 5. 铜隔板 ($\rho_0 = 8.93$ 克/厘米³, $\phi 98.0 \times 51.0$); 6. 有机玻璃隔板 ($\rho_0 = 1.18$ 克/厘米³, $120 \times 120 \times 4.0$); 7. 锰铜压阻计; 8. 被测炸药 ($\phi 60$.)

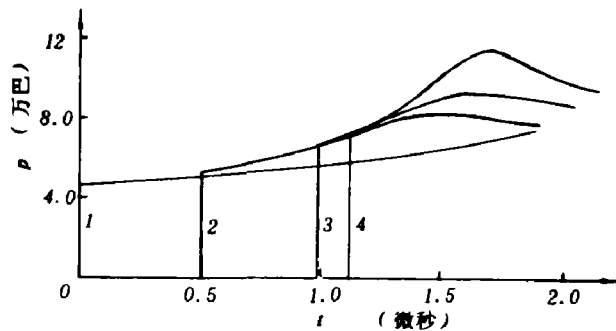


图4 压强史

表1. 实验压强史误差

| 压强史序号 | h (厘米) | P_h (万巴) | σ (%) |
|-------|----------|------------|--------------|
| 1 | 0.000 | 4.73 | 7.8 |
| 2 | 0.207 | 5.24 | 7.9 |
| 3 | 0.415 | 6.46 | 8.7 |
| 4 | 0.472 | 7.17 | 8.6 |

四、部分计算结果与误差分析

计算得到前导冲击波阵面的轨迹(见(16)式)和压阻计所跨流场中任意拉氏位置上各物理量的变化史。图5仅给出了 $h = 0.1$ 厘米和 $h = 0.415$ 厘米处的计算结果。

$$t = -0.25188h^2 + 2.4653h - 0.00058 \quad (16)$$

本文只讨论拉氏分析方法的可靠性以及输入量的误差分布对各计算量的影响程度。

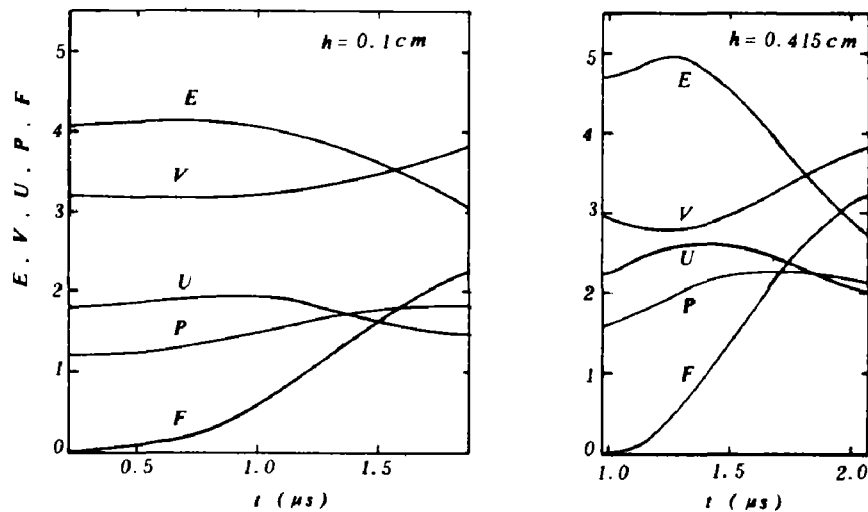


图5. 各物理量的变化史

纵坐标每一格表示: $E: 4 \times 10^2$ 焦耳/厘米³; $V: 0.1$ (原点从 0.5 起); $U: 0.04$ 厘米/微秒; $P: 4$ 万巴; $F: 0.2$

1. 用李群相似解检验计算流场的变化性态

李群相似解给出了这样的变化性态^[8]: 对于起爆流场, 在前导冲击波阵面后, 沿同一迹线, 比容和比内能最先到达极小值和极大值, 然后质速到达极大值, 最后压强到达极大值, 而化学反应度是单调增加的。本文检查了拉氏分析的计算流场, 在任意拉氏位置上都满足上述变化性态, 见图5。这说明该拉氏分析方法没使起爆流场发生性态上的畸变。

2. 拉氏分析方法的方法误差估计

拉氏分析方法要进行多次离散、拟合、微分和积分, 这些运算过程将引起多大的误差, 本文作了估计。方法是利用压强史求出速度史, 反过来再用速度史求出压强史, 从而估计出拉氏分析方法误差。对图4压强史相对误差的均方根误差 $|\epsilon|_2$: 1为2.20%; 2为0.531%; 3为0.062%; 4为0.520%。总体误差估计值约为0.81%。

3. 摄动计算

实验误差是难免的, 摄动计算(见表2)可帮助我们了解输入量的各种误差分布的传播规律, 为估计各计算量的误差提供了依据。对输入压强的摄动(序号1~12)

表2 摄动计算结果

| 序号 | h_1 | h_2 | h_3 | h_4 | U | V | E | F | 备注 |
|----|--------------|--------------|--------------|--------------|----------------|----------------|----------------|--------------|--------|
| | ϵ_1 | ϵ_2 | ϵ_3 | ϵ_4 | $ \epsilon _2$ | $ \epsilon _2$ | $ \epsilon _2$ | $ \delta _2$ | |
| 1 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.346 | 0.0690 | 0.218 | 0.466 | 数字为百分数 |
| 2 | 2.0 | 2.0 | 2.0 | 2.0 | 2.00 | 0.408 | 0.962 | 0.813 | |
| 3 | -8.0 | -8.0 | -8.0 | -8.0 | 7.99 | 1.63 | 3.66 | 3.28 | |
| 4 | 20.0 | 20.0 | 20.0 | 20.0 | 20.0 | 4.08 | 10.5 | 6.18 | |
| 5 | 2.0 | -2.0 | 2.0 | 2.0 | 0.593 | 0.264 | 1.83 | 1.78 | |
| 6 | 2.0 | 2.0 | 2.0 | 2.0 | 3.73 | 0.928 | 3.54 | 2.82 | |
| 7 | -2.0 | 2.0 | 2.0 | 2.0 | 3.72 | 0.929 | 3.47 | 2.77 | |
| 8 | 2.0 | 2.0 | 2.0 | -2.0 | 5.12 | 0.809 | 3.34 | 2.22 | |
| 9 | 5.0 | 2.0 | 2.0 | 2.0 | 2.24 | 0.831 | 6.66 | 5.49 | |
| 10 | 2.0 | 2.0 | 5.0 | 2.0 | 0.826 | 0.381 | 3.14 | 2.17 | |
| 11 | 9.0 | -9.0 | 9.0 | -9.0 | 2.66 | 1.19 | 7.47 | 7.35 | |
| 12 | 9.0 | 9.0 | 0.0 | 0.0 | 12.4 | 2.89 | 9.49 | 6.04 | |
| 13 | 0.0 | 5.0 | 5.0 | 5.0 | 6.91 | 2.20 | 3.26 | 6.70 | |
| 14 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | / | 8.18 | 1.21 | 4.80 | 3.95 | |
| 15 | 0.0 | 0.0 | / | 0.0 | 3.02 | 0.611 | 4.69 | 3.23 | |

$$p_{ij} = p_{0ij} (1 + \epsilon_i), \quad (i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, \dots, N)$$

p_{0ij} 为原始输入压强, p_{ij} 为摄动 ϵ_i 后的输入压强。对拉氏坐标的摄动(序号13)

$$h_i = h_{0i} (1 + \epsilon_i) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

h_{0i} 为原始拉氏坐标, h_i 为摄动 ϵ_i 后的拉氏坐标。序号14、15为输入压强史的条数减为三条。序号1的摄动量为零, 主要考察 L 和 N 对计算结果的影响。表3中的计算都采用 $L = 4$, $N = 11$, 将它与用 $L = 7$, $N = 31$ 的正式计算结果进行比较, 证明误差很小。 $|\delta|_2$ 表示绝对误差的均方根误差。

从表 3 可见, 输入量的各种误差分布在计算中是不发散的。根据 Vantine³⁾ 的建议, 将前一半输入压强史摄动 ε (ε 为实验数据的精度), 将产生的误差作为计算流场中各物理量的误差估计值。本文将 ε 取为 9%, 见表 3 中的序号 12。

通过上述三个方面的考察, 本文认为该拉氏分析方法已具有一定的实用性。在初步研究中我们已看到, 拉氏分析方法确实能提供起爆流场中的许多重要信息, 为我们进一步理解冲击波起爆的动力学过程提供了思路, 为标定和检验炸药的本构方程提供了数据, 同时还为我们指出了一些有意义的研究课题。毫无疑问, 拉氏分析方法将成为非均质凝聚炸药受冲击波起爆过程的动力学研究中的有力工具。

鲍武臣, 杨建明, 张振宇等同志在实验上给予了大力支持; 张寿齐高工对初稿提了一些指导性意见, 在此表示感谢。

参 考 文 献

- (1) Cowperthwaite, M., William, R. E., *J. Appl. Phys.*, **42** (1981), 456.
- (2) Seam an, L., (黄正平等译), 材料动力学, 北京工业学院, (1983).
- (3) Vantine, H. C., Curtis, W. D. et al, *Inte. 7th Symp. Detonation* U. S. Acad. Annapolis, (1981), 593.
- (4) 孙家昶, 样条函数与计算几何, 科学出版社, (1982), 141.
- (5) 莫俊水, 私人通信, (1980).
- (6) David, L. B. Jp, *SIAM J. Numer. Anal.*, **15** (2) (1978), 328.
- (7) 浣 石, 第二届全国爆轰学术讨论会论文集, 南京, (1983).
- (8) Cowperthwaite, M., Rosenberg, J. T., *UCRL—13760*, (1977).
- (9) 池家春, 吴国栋, 爆炸与冲击, **3**(3) (1983), 75.

METHOD OF LAGRANGE ANALYSIS FOR SHOCK INITIATION OF EXPLOSIVES

Huan Shi, Xue Honglu

Abstract

The variation histories of various physical quantities are fitted to a least square cubic B-spline function with a sufficient accuracy definite conditions. The path lines of these quantities are constructed in terms of a least square quadratic polynomial. A program for lagrange analysis RFLA is worked out. The pressure profiles at different lagrange positions are measured experimentally for the pressed TNT under the action of long-durated initiation pulse with the amplitude of 4.37 GPa Taking these as the input for the RFLA, the initiation flow field of pressed TNT is solved. The behavior of the field is checked by the Lie group similarity solution. The error analysis shows that such a method has a definite reliability and a satisfactory characteristic of the error propagation.