

# 空气冲击波遇运动 刚壁反射时壁面超压的计算

陈志林

(1984年11月16日收到)

本文分析了空气冲击波与运动刚壁的相互作用,给出了运动刚壁正反射或斜反射时壁面峰值反射超压的计算公式。当刚壁速度为零时,这些公式退化成空气冲击波遇固壁相互作用的计算公式

## 一、前 言

空气冲击波遇固定刚壁正反射或斜反射时壁面超压的计算问题早已解决。本文根据防护工程实验研究中观察到的现象和提出的问题,研究空气冲击波遇运动刚壁正反射或斜反射时壁面超压的计算问题。

在空气冲击波与典型地形相互作用的室内外模型试验过程中,在爆后进行观察记录时,常常发现小尺寸钢筋混凝土模型产生很大的整体位移,在10至20毫秒正压作用时间内产生几厘米至几十厘米的宏观位移;钢板制作的模型其迎爆面发生明显的下凹残余变形;用野外现场自然土构筑的地形模型,由于表面松软,固定测压传感器的水泥墩子发生明显的下沉现象。在这些情况下,发生壁面峰值超压实测值多数低于按固壁反射理论而得到的计算值(见表1)。

表1 正反射超压系数实验值与计算值比较\*

入射超压 $\Delta P_i$ (公斤/厘米 <sup>2</sup> )	壁面超压系数 $\Delta P_r / \Delta P_i$				
	实验值	固壁计算值	相对偏差(%)	动壁计算值	相对偏差(%)
0.91	2.488	2.671	-6.9	2.419	-2.9
1.03	2.562	2.748	-6.8	2.504	-2.3
2.20	3.059	3.399	10.0	3.184	-3.9
4.00	3.791	4.137	8.4	3.930	-3.5
5.83	4.182	4.678	-10.6	4.477	6.6

\* 根据观察记录,刚壁运动速度约为  $U = 20$ 米/秒

说明在这些情况下把模型体的反射面看成固定不动的刚壁是一种近似假设,它不能反映冲击波与运动刚壁相互作用的实际过程。此外,高速飞行器、运动中的坦克、装甲车、航行中的军舰、轮船及其他运动中的物体与空气冲击波相互作用时壁面超压的计算问题,均要求把反射面如实地看成运动刚壁来加以研究。由此可见,研究空气冲击波遇运动刚壁正反射或斜反射时壁面超压的计算问题,不仅具有一定的理论意义,而且具有重要的实际意义。

根据爆炸流体动力学的基本理论,本文导出空气冲击波遇运动刚壁正反射或斜反射时壁面超压的计算公式。当壁面运动速度为零时,这些公式就退化成冲击波遇固壁反射时的计算公式。对某些给定的条件(入射波阵面超压  $\Delta P_i$ , 入射角  $\omega_i$ , 壁面运动速度  $U$ ),运用文中给出的公式进行了检验性计算,得到预期的结果。经某些实验数据检验,证明计算结果是合理的,比固壁反射计算公式更符合实际(详见表 1、表 2)。

表2 斜反射壁面超压系数计算值与实验值比较\*

入射角 $\omega_i$ (度)	入射超压 $\Delta P_i$ (公斤/厘米 <sup>2</sup> )	壁面超压系数 $\Delta P_r / \Delta P_i$				
		实验值	固壁计算值	相对偏差(%)	动壁计算值	相对偏差(%)
30	0.854	2.389	2.554	-6.5	2.489	4.0
30	1.36	2.559	2.815	-9.1	2.700	5.2
15	1.01	2.379	2.699	-11.9	2.635	-9.7
15	2.02	3.211	3.241	-1.0	3.188	+0.7
15	4.14	3.740	4.063	-7.9	4.012	-6.8

\* 根据观察记录刚壁运动速度取  $U = 20$ 米/秒

文中计算公式推导过程与固壁反射计算公式推导过程类似。本文仅讨论理想气体中空气冲击波遇动壁反射问题。

## 二、冲击波遇运动刚壁正反射时壁面超压的计算

如图 1 所示,  $P$ 、 $\rho$ 、 $V$ 、 $a$ 、 $T$  分别表示气体的压力、密度、速度、局部声速和绝对温度。足标“0”表示入射波前静止大气状态;“i”表示入射波后流场状态;“r”表示反射波后流场状态。 $\gamma$  为气体绝热指数,  $D_i$ 、 $D_r$  分别表示入射波和反射波的移动速度。用  $U$  代表刚壁运动速度, 设  $U > 0$  表示刚壁背向爆心运动;  $U < 0$  表示刚壁面向爆心运动;  $U = 0$  表示刚壁静止不动。

根据质量、动量、能量守恒定律可以导出如下激波关系式

$$\left(\frac{a_i}{a_0}\right)^2 = \frac{[(\gamma+1)/(\gamma-1) + P_i/P_0]P_i/P_0}{1 + [(\gamma+1)/(\gamma-1)](P_i/P_0)} \quad (1)$$

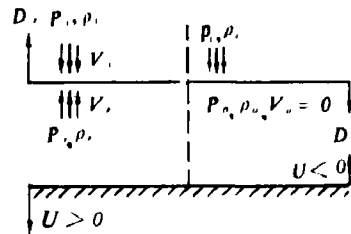


图 1 冲击波遇运动刚壁正反射示意图

$$\left(\frac{V_r}{a_0}\right)^2 = \frac{(2/\gamma)\{(P_r/P_0) - 1\}^2}{(\gamma + 1)(P_r/P_0) + (\gamma - 1)} \quad (2)$$

$$\left(\frac{V_r}{a_1}\right)^2 = \frac{(2/\gamma)\{(P_r/P_1) - 1\}^2}{(\gamma + 1)(P_r/P_1) + (\gamma - 1)} \quad (3)$$

冲击波遇运动刚壁正反射条件  $V_r + V_l = U$  (4)

由此可得  $V_r^2 = U^2 - 2UV_l + V_l^2$

$$\left(\frac{V_r}{a_1}\right)^2 = \left(\frac{V_r}{a_0}\right)^2 \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^2 = \left[ \left(\frac{U}{a_0}\right)^2 - 2\left(\frac{U}{a_0}\right)\left(\frac{V_l}{a_0}\right) + \left(\frac{V_l}{a_0}\right)^2 \right] \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^2$$

$$\left(\frac{V_r}{a_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 = \left(\frac{U}{a_0}\right)^2 - 2\left(\frac{U}{a_0}\right)\left(\frac{V_l}{a_0}\right) + \left(\frac{V_l}{a_0}\right)^2 \quad (5)$$

将(1)、(2)、(3)式代入上式, 得到

$$\frac{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{P_l}{P_0}\right) \frac{P_l}{P_0}}{1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{P_l}{P_0}} \cdot \frac{\frac{2}{\gamma} \left(\frac{P_r}{P_1} - 1\right)^2}{(\gamma+1) \frac{P_r}{P_1} + (\gamma-1)} = \frac{\frac{2}{\gamma} \left(\frac{P_l}{P_0} - 1\right)^2}{(\gamma+1) \frac{P_l}{P_0} + (\gamma-1)} - 2 \frac{U}{a_0} \frac{\left(\frac{P_l}{P_0} - 1\right)}{\gamma \sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{P_l}{P_0} + \frac{\gamma-1}{2\gamma}}} + \left(\frac{U}{a_0}\right)^2 \quad (6)$$

记 
$$A = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{P_l}{P_0}\right) \frac{P_l}{P_0}}{1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{P_l}{P_0}} = \frac{\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} + \frac{\Delta P_l}{P_0}\right) \left(1 + \frac{\Delta P_l}{P_0}\right)}{\frac{2\gamma}{\gamma-1} + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\Delta P_l}{P_0}} \quad (7)$$

$$B = \frac{\frac{2}{\gamma} \left(\frac{P_l}{P_0} - 1\right)^2}{(\gamma+1) \frac{P_l}{P_0} + (\gamma-1)} = \frac{\left(\frac{\Delta P_l}{P_0}\right)^2}{\gamma^2 \left(1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\Delta P_l}{P_0}\right)} \quad (8)$$

$$C = -2 \frac{U}{a_0} \frac{\left(\frac{P_l}{P_0} - 1\right)}{\gamma \sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{P_l}{P_0} + \frac{\gamma-1}{2\gamma}}} = -2 \frac{U}{a_0} \frac{\left(\frac{\Delta P_l}{P_0}\right)}{\gamma \sqrt{1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{\Delta P_l}{P_0}}} \quad (9)$$

$$D = \left(\frac{U}{a_0}\right)^2 \quad (10)$$

将(7)–(10)诸式代入(6)式, 得到

$$\frac{2A}{\gamma} \left(\frac{P_r}{P_1}\right)^2 - \left[ \frac{4A}{\gamma} + (\gamma+1)(B+C+D) \right] \left(\frac{P_r}{P_1}\right) + \left[ \frac{2A}{\gamma} - (\gamma-1)(B+C+D) \right] = 0 \quad (11)$$

令

$$\begin{cases} a_l = 2A/\gamma \\ b_l = \{(4A/\gamma) + (\gamma+1)(B+C+D)\} \\ c_l = \{(2A/\gamma) - (\gamma-1)(B+C+D)\} \end{cases}$$

(11)式就化为一元二次方程

$$a_1 \left( \frac{P_r}{P_i} \right)^2 + b_1 \left( \frac{P_r}{P_i} \right) + c_1 = 0 \quad (12)$$

求得物理解

$$\frac{P_r}{P_i} = \frac{\sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1} - b_1}{2a_1} \quad (13)$$

写成超压形式

$$\frac{\Delta P_r}{\Delta P_i} = \frac{\sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1} - b_1}{2a_1} \left( 1 + \frac{P_0}{\Delta P_i} \right) - \frac{P_0}{\Delta P_i} \quad (14)$$

这就是冲击波遇运动刚壁正反射时壁面超压计算公式。容易证明，当  $U = 0$  时，(14)式就退化成固壁正反射时壁面超压计算公式

$$\frac{\Delta P_r}{\Delta P_i} = 2 + \frac{[(\gamma + 1)/(\gamma - 1)]\Delta P_i}{\Delta P_i + (2\gamma/(\gamma - 1))P_0} \quad (15)$$

### 三、冲击波遇运动刚壁斜反射时壁面超压的计算

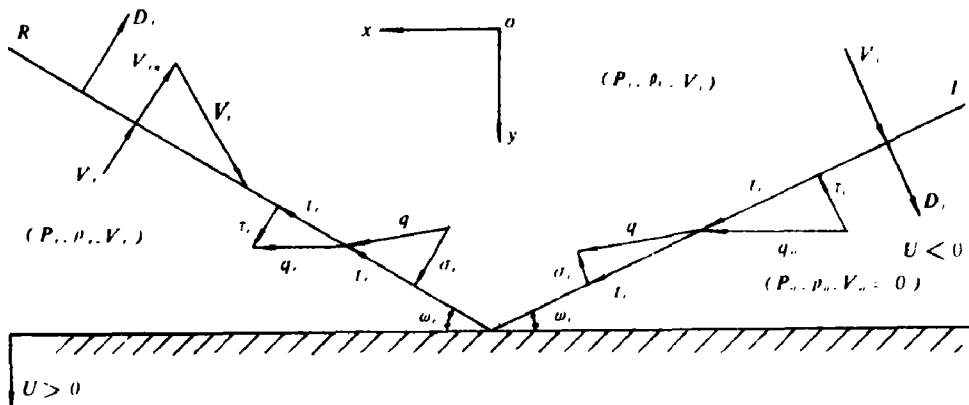


图 2 冲击波遇运动刚壁斜反射示意图

如图 2 所示， $\omega_i$ ， $\omega_r$  分别表示入射角和反射角， $\tau_i$ ， $\sigma_i$  分别表示入射波前后质点法向速度（无量纲化）， $t_i$  表示入射波阵面气体无量纲切向速度； $\sigma_r$ ， $\tau_r$  分别表示反射波前后气体无量纲速度， $t_r$  表示反射波阵面气体无量纲切向速度。设刚壁沿其法线方向运动速度为  $U$ ， $U > 0$  表示沿其内法线方向运动； $U < 0$  表示沿其外法线方向运动。记  $F_1 = U \cos \omega_i / a_i$ ， $F_2 = U \cos \omega_r / a_i$  ( $a$  为局部声速其它符号和足标意义同前)，表示刚壁运动对反射超压的影响作用。根据质量、动量、能量守恒定律可以推导如下关系式

$$s_i = \frac{P_0}{P_i} = \frac{2\gamma\sigma_i^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \quad (16)$$

$$\tau_i = \frac{D_i}{a_i} = \frac{(\gamma - 1)\sigma_i^2 + 2}{(\gamma + 1)\sigma_i} + F_1 \quad (17)$$

$$\sigma_i = \frac{D_i - V_i}{a_i} = \left[ \frac{(\gamma + 1)\xi_i + (\gamma - 1)}{2\gamma} \right]^{1/2} \quad (18)$$

$$\tau_i - \sigma_i = \frac{2(1 - \sigma_i^2)}{(\gamma + 1)\sigma_i} + F_1 \quad (19)$$

$$\xi_i = \frac{P_r}{P_i} = \frac{2\gamma\sigma_i^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \quad (20)$$

$$\tau_i = \frac{(\gamma - 1)\sigma_i^2 + 2}{(\gamma + 1)\sigma_i} - F_2 \quad (21)$$

$$\tau_i - \sigma_i = \frac{2(1 - \sigma_i^2)}{(\gamma + 1)\sigma_i} - F_2 \quad (22)$$

设  $u_i$ 、 $w_i$  分别表示入射波后气体无量纲水平速度和垂直速度;  $u_r$ 、 $w_r$  分别表示反射波前气体无量纲水平速度和垂直速度。由图 2 得知, 对于入射波有关系式

$$\begin{cases} \cot \omega_i = \frac{t_i}{\tau_i} \\ u_i = t_i \cos \omega_i + \sigma_i \sin \omega_i \\ w_i = t_i \sin \omega_i - \sigma_i \cos \omega_i \end{cases} \quad (23)$$

对于反射波有关系式

$$\begin{cases} \cot \omega_r = \frac{t_r}{\tau_r} \\ u_r = t_r \cos \omega_r + \sigma_r \sin \omega_r \\ w_r = \sigma_r \cos \omega_r - t_r \sin \omega_r \end{cases} \quad (24)$$

因为界于入射波和反射波之间为均匀流场区, 所以处处成立

$$\begin{cases} u_i = u_r \\ w_i = w_r \end{cases} \quad (25)$$

由此可得

$$\begin{aligned} t_r^2 &= t_i^2 + \sigma_i^2 - \sigma_r^2 \\ \frac{1}{\cos^2 \omega_r} &= \frac{\tau_i^2 + \tau_i^2 \cot^2 \omega_i + \sigma_i^2 - \sigma_r^2}{\tau_i^2 \cot^2 \omega_i + \sigma_i^2 - \sigma_r^2} \end{aligned} \quad (26)$$

联立(23)、(24)、(25)三式得到

$$\frac{1}{\cos^2 \omega_r} = \left( \frac{\tau_i - \sigma_r}{\tau_i - \sigma_i} \right)^2 \frac{1}{\cos^2 \omega_i} \quad (27)$$

联立(26)、(27) 两式得到:

$$\left(\frac{\tau_r - \sigma_r}{\tau_l - \sigma_l}\right)^2 \frac{1}{\cos^2 \omega_l} = \frac{\tau_r^2 + \tau_l^2 \cot^2 \omega_l + \sigma_l^2 - \sigma_r^2}{\tau_l^2 \cot^2 \omega_l + \sigma_l^2 - \sigma_r^2} \quad (28)$$

将(17)、(19)、(21)、(22)诸式代入上式, 整理化简, 得到关于 $\sigma_r$  六次代数方程

$$A_6 \sigma_r^6 + A_5 \sigma_r^5 + A_4 \sigma_r^4 + A_3 \sigma_r^3 + A_2 \sigma_r^2 + A_1 \sigma_r + A_0 = 0 \quad (29)$$

式中

$$A_6 = 4$$

$$A_5 = 4(\gamma + 1)F_2$$

$$A_4 = (\gamma + 1)^2 F_2^2 + (\gamma - 1)^2 a_2 - 8 - (\gamma + 1)^2 a_2 - 4a_1$$

$$A_3 = -4(\gamma + 1)a_1 F_2 - 4(\gamma + 1)F_2 - 2(\gamma^2 - 1)a_2 F_2$$

$$A_2 = 8a_1 + (\gamma + 1)^2 F_2^2 (a_2 - a_1) + 4 + 4(\gamma - 1)a_2 + a_1 a_2 (\gamma + 1)^2$$

$$A_1 = 4(\gamma + 1)F_2(a_1 - a_2)$$

$$A_0 = 4(a_2 - a_1)$$

$$F_1 = \frac{U \cos \omega_l}{a_0} \left( \frac{\xi_l [(\gamma + 1) + (\gamma - 1)\xi_l]}{(\gamma + 1)\xi_l + (\gamma - 1)} \right)^{1/2}$$

$$F_2 = \frac{U \cos \omega_r}{a_0} \left( \frac{\xi_l [(\gamma + 1) + (\gamma - 1)\xi_l]}{(\gamma + 1)\xi_l + (\gamma - 1)} \right)^{1/2}$$

$$a_1 = \left[ \frac{(\gamma - 1)\sigma_l^2 + 2}{(\gamma + 1)\sigma_l} + F_1 \right]^2 \cot^2 \omega_l + \sigma_l^2$$

$$a_2 = \left[ \frac{2(1 - \sigma_l^2)}{(\gamma + 1)\sigma_l} + F_1 \right]^2 \cos^2 \omega_l$$

不难证明, 当 $U = 0$ 时, 方程(29)就退化成冲击波遇固壁斜反射壁面超压计算公式

$$\frac{\Delta P_r}{\Delta P_l} = \left[ \frac{\gamma(B - \sqrt{B^2 - 4AC})}{(\gamma + 1)A} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right] \left( 1 + \frac{P_0}{\Delta P_l} \right) - \frac{P_0}{\Delta P_l} \quad (30)$$

式中

$$A = (\gamma + 1)^2 \sigma_l^2$$

$$B = 2(\gamma + 1)^2 \sigma_l^2 + 4\gamma(\sigma_l^2 - 1)^2 \sigma_l^2 \cos^2 \omega_l + [(\gamma - 1)\sigma_l^2 + 2]^2 \sigma_l^2 \cot^2 \omega_l$$

$$C = (\gamma + 1)^2 \sigma_l^2 - 4(\sigma_l^2 - 1)^2 \cos^2 \omega_l + [(\gamma - 1)\sigma_l^2 + 2]^2 \cot \omega_l$$

#### 四、计算结果简析

##### 1. 冲击波遇运动刚壁正反射时壁面超压计算结果

计算表明, 刚壁运动速度大小和方向对壁面反射超压有明显的影响。当刚壁背向爆心运动时 ( $U > 0$ ), 动壁反射系数小于固壁反射系数; 反之, 当刚壁面向爆心运动时 ( $U < 0$ ), 动壁反射系数大于固壁反射系数,  $U$  值越大影响越大 (见表 3)。

表 3 刚壁运动速度对壁面超压正反射系数影响

壁面运动速度 $U$ (米/秒)	反射系数 $\Delta P_r / \Delta P_i$	增减率 (%)	壁面运动速度 $U$ (米/秒)	反射系数 $\Delta P_r / \Delta P_i$	增减率 (%)
0	5.480		0	5.482	
10	5.387	-2.0	-10	5.577	+1.7
20	5.294	-3.4	-20	5.674	+3.5
30	5.201	-5.1	-30	5.772	+5.3
40	5.110	-6.8	-40	5.871	+7.1
50	5.020	-9.4	-50	5.971	+8.9
100	4.584	-16.4	-100	6.486	+18.3

## 2. 正反射壁面超压系数实验值与计算值比较

从表 1 所列数据可以看出, 考虑到刚壁运动速度对超压系数的影响之后, 其计算值更符合实验值, 其相对偏差在  $\pm 6.6\%$  以内。

表 4 冲击波遇运动刚壁斜反射时壁面超压系数计算值

计算条件	$\Delta P_i = 10$ 公斤/厘米 <sup>2</sup> , $\omega_i = 20$ (度), $(\delta_r)_0 = 4.7484$ , $(\sigma_r)_0 = 2.0525$			
$U$ (米/秒)	10	100	-10	-100
$a_1$	26.3278	30.7196	25.3982	21.4235
$a_2$	1.6994	2.08769	1.61851	1.27898
$F_1$	0.016706	0.16706	-0.016706	-0.16706
$F_2$	0.017552	0.17552	-0.017552	-0.17552
$A_0$	-98.5137	-114.528	-95.1188	-80.5782
$A_1$	4.14997	48.2456	-4.00695	-33.9442
$A_2$	475.005	617.423	446.510	331.686
$A_3$	-4.66209	-54.1520	4.50272	38.2154
$A_4$	-122.826	-142.392	-118.655	-100.679
$A_5$	0.16850	1.68503	-0.168503	-1.68503
$A_6$	4	4	4	4
$(\Delta P_r / \Delta P_i)$ 动壁	5.085	4.981	5.191	5.298
$(\Delta P_r / \Delta P_i)$ 固壁	5.136	5.136	5.135	5.135

### 3. 冲击波遇运动刚壁斜反射时壁面超压计算结果

按方程 (29) 计算壁面超压是个迭代求解过程, 对于不同的入射角 $\omega_i$ 和入射波超压 $\Delta P_i$ , 按公式 (30) 求出固壁斜反射解 $(\sigma_r)_0, (\xi_r)_0$ , 以其为初值, 对不同的刚壁运动速度 $U$  求解方程 (29) 得到满足给定精度要求的物理解。计算表明, 对于给定的入射超压 $\Delta P_i$ 和入射角 $\omega_i$ , 刚壁运动速度大小和方向对壁面反射超压有一定的影响, 当刚壁运动沿其内法线进行时 ( $U > 0$ ), 其反射超压小于按固壁反射理论计算值, 反之亦然 (详见表 4)。对于给定的刚壁运动速度 $U$ , 入射波超压 $\Delta P_i$ 和入射角 $\omega_i$ 对于反射超压也有一定的影响作用 (详见表 5)。

表 5 入射波超压和入射角对动壁反射超压系数的影响

计算条件	$\Delta P_i = 1$ (公斤/厘米 <sup>2</sup> ), $U = 20$ (米/秒)						
$\omega_i$ (度)	5	10	15	20	25	30	35
$(\xi_r)_0$	1.8484	1.8420	1.8327	1.8214	1.8101	1.8032	1.8101
$(\sigma_r)_0$	1.3142	1.3121	1.3091	1.3054	1.3017	1.2994	1.3017
$(\Delta P_r / \Delta P_i)_{\text{动}}$	2.719	2.699	2.674	2.639	2.604	2.572	2.567
$(\Delta P_r / \Delta P_i)_{\text{固}}$	2.725	2.712	2.693	2.670	2.647	2.633	2.647
计算条件	$\Delta P_i = 5$ (公斤/厘米 <sup>2</sup> ), $U = 20$ (米/秒)						
$\omega_i$ (度)	5	10	15	20	25	30	35
$(\xi_r)_0$	3.8484	3.8095	3.7473	3.6669	3.5757	3.4904	3.4564
$(\sigma_r)_0$	1.8551	1.8461	1.8316	1.8127	1.7910	1.7705	1.7622
$(\Delta P_r / \Delta P_i)_{\text{动}}$	4.411	4.364	4.289	4.167	4.057	3.931	3.841
$(\Delta P_r / \Delta P_i)_{\text{固}}$	4.437	4.390	4.315	4.218	4.108	4.005	3.964
计算条件	$\Delta P_i = 10$ (公斤/厘米 <sup>2</sup> ), $U = 20$ (米/秒)						
$\omega_i$ (度)	5	10	15	20	25	30	35
$(\xi_r)_0$	5.0411	4.9790	4.8794	4.7484	4.5968	4.4447	4.3471
$(\sigma_r)_0$	2.1128	2.1001	2.0797	2.0525	2.0206	1.9881	1.9670
$(\Delta P_r / \Delta P_i)_{\text{动}}$	5.404	5.336	5.227	5.083	4.916	4.699	4.542
$(\Delta P_r / \Delta P_i)_{\text{固}}$	5.459	5.390	5.280	5.136	4.968	4.801	4.693

### 4. 斜反射壁面超压系数计算值与实验值比较

从表 2 所列比较数据可以看出, 按动壁反射理论计算值更接近实际, 计算值与实验值相对偏差在  $\pm 9.7\%$  以内。



## OVERPRESSURE CALCULATION ON THE REFLECTION OF AIR SHOCK WAVES WITH MOVING RIGID WALL

Chen Zhilin

### Abstract

The interaction of air shock wave with a moving rigid wall is analyzed in the present paper. Formulas for the calculation of peak reflection overpressure on the wall are given in the cases that normal reflection or regular oblique reflection from the moving rigid wall takes place. When the velocity of the rigid wall is zero, these formulas degenerate to that for the interaction of air shock wave with static rigid wall.