

对一组有机玻璃粒子速度测量波形的拉格朗日分析

李孝兰

(1985年2月24日收到)

在气炮装置上,运用电磁法测量了一组有机玻璃材料中的粒子速度波形,对这组波形运用拉格朗日分析方法计算了对应的应变波形、应力波形,得到了加载、卸载全过程的应力-应变路径,揭示出有机玻璃材料与应变速率相关的弹-塑性本构关系的特征。

一、引言

真实材料的低压动态本构关系是相当复杂的,它的研究对于某些军事及工程实际问题具有重要的意义。国外从六十年代起便开展此项课题的研究。实验研究的手段大体上分为两类:一类是利用压电应力计测量待测材料和压电材料界面上的应力波形,利用激光速度干涉仪、斜电阻丝、高速条纹相机、电容器等手段测量待测材料自由表面的速度波形。这类测量统称为材料外部的测量。由于界面、自由表面的运动过程是应力波在界面、自由表面上反射的结果,因此在分析测试结果时,要么是作一些近似假定,或者,更一般地是先假定一个本构关系模型,然后通过运动方程组的数值解结果与实验结果的对比,不断修正本构关系的模型,直至与实验结果一致。这样作,不仅是工作量庞大,更重要的是,所得的本构关系往往不是唯一确定的。第二类实验研究手段是在材料内部埋设应力计、粒子速度计,测量材料内部不同位置上的拉格朗日应力波形、粒子速度波形。这类测量统称为材料内部的测量。

七十年代初,Fowles、Williams、Cowperthwaite^(1,2),创立了一种理论分析方法,直接由材料内部测计测得的拉格朗日应力波形、粒子速度波形确定一维应变条件下材料的动态本构关系。现在,这种理论分析方法已被人们通称为拉格朗日分析方法。随着材料内部测计分辨率的不断提高,第二类实验研究手段在材料动态本构关系的研究中得到了日益广泛的使用,并且拉格朗日分析方法也得到进一步的改进和发展。

本文在第二节中给出拉格朗日分析的基本方程,在第三节中介绍了在气炮上运用电磁法测量有机玻璃材料内不同初始位置上拉格朗日粒子速度波形的实验装置,给出一组实测粒子速度的波形。第四节中,根据基本方程导出由三个粒子速度波形计算对应的应变波形及由三个粒子速度波形反演计算对应的应力波形的公式,并给出计算结果。最后给出了加、卸载全

过程的应力-应变路径,讨论了本构关系的特征。

二、基 本 方 程

一维应变条件下,拉格朗日坐标下的质量、动量、能量守恒方程为

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_h + \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \left(\frac{\partial u}{\partial h}\right)_t = 0 \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial h}\right)_t + \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_h = 0 \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_h - \frac{\sigma}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_h = 0 \quad (3)$$

式中, σ —应力; ρ —密度; ρ_0 —初始密度; u —粒子速度; E —比内能; h —拉格朗日坐标。

Fowles 和 Williams 引入两个相速度概念⁽¹⁾

恒定应力的拉格朗日波速

$$C_\sigma \equiv \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_\sigma \quad (4)$$

恒定粒子速度的拉格朗日波速

$$C_u \equiv \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_u \quad (5)$$

由定义(4)、(5)及方程(1)–(3),可导得如下的微分方程

$$d\sigma = \rho_0 C_\sigma du \quad (6)$$

$$dV = du / (-\rho_0 C_u) \quad (7)$$

$$dE = \sigma d\sigma / (\rho_0^2 C_\sigma C_u) \quad (8)$$

式中, V —比容, $V = 1/\rho$, 沿恒定粒子路径对(6)–(8)式进行积分, 得到

$$u(\sigma) - u_0 = \frac{1}{\rho_0} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{C_\sigma} \quad (9)$$

$$V(u) - V_0 = -\frac{1}{\rho_0} \int_{u_0}^u \frac{du}{C_u} \quad (10)$$

$$E(\sigma) - E_0 = \frac{1}{\rho_0^2} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{\sigma du}{C_\sigma C_u} \quad (11)$$

只要在实验上测得 C_σ 、 C_u , 就可由(9)–(11)式确定材料的本构关系。

Crady⁽³⁾把拉格朗日分析概念推广到处理球对称流动中任意形状的衰减波, 他未引进相速度的概念, 而是采用一种所谓“路径线”的概念。Seaman⁽⁴⁾也引用了路径线的概念, 并对拉格朗日分析的数值计算方法作了进一步的改进和发展。如图1所示, 将分别位于多个应力波形(或粒子速度波形)上的对应测点拟合成一条曲线, 这条曲线称为路径线, 由一簇足

够密的路径线便可近似地表征流动曲面。图1中的参量 f 代表 σ 或 u 。参量 f 沿路径线对 h 的全导数为

$$\frac{df}{dh} = \left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)_t + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_h \frac{dt}{dh} \quad (12)$$

于是得
$$\left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)_t = \frac{df}{dh} - \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_h \frac{dt}{dh} \quad (13)$$

将
$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_h = -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_h$$

代入方程(1)-(3), 得到:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_h = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial u}{\partial h}\right)_t \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_h = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial h}\right)_t \quad (15)$$

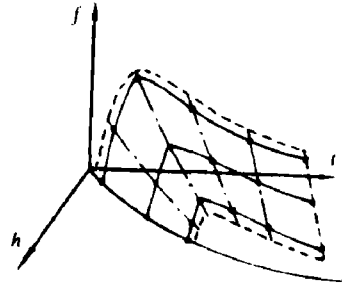


图1 用一族路径线表征 (f, h, t) 流场中的流动曲面

$$\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_h = -\frac{\sigma}{\rho_0} \left(\frac{\partial u}{\partial h}\right)_t \quad (16)$$

沿恒定 h 积分(14)-(16)式, 得

$$V_2 - V_1 = \frac{1}{\rho_0} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial u}{\partial h}\right)_t dt \quad (17)$$

$$\dot{u}_2 - u_1 = -\frac{1}{\rho_0} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial h}\right)_t dt \quad (18)$$

$$E_2 - E_1 = -\frac{1}{\rho_0} \int_{t_1}^{t_2} \sigma \left(\frac{\partial u}{\partial h}\right)_t dt \quad (19)$$

只要对实测的多个拉格朗日应力波形、粒子速度波形选定一族路径线, 沿着每根路径线, 按照(13)式计算出 $(\partial \sigma / \partial h)_t$ 、 $(\partial u / \partial h)_t$, 代入方程(17)-(19), 即可求得材料的本构关系。

必须指出, 上述基本方程的推导中, 未对波的流动状态和流动过程是否等熵, 有无能量耗散效应作任何假设, 因而所得关系式无论是对于稳定流动或非稳定流动、等熵过程或非等熵过程、压缩波或稀疏波、衰减波或不衰减波都是普遍适用的。

三、有机玻璃中拉格朗日粒子速度波形的实验测量

实验是在我所自行研制的高速阀门式单级气炮上进行的, 采用对称碰撞的方式产生阶跃波, 运用电磁法测量有机玻璃中距碰撞面不同初始位置上的拉格朗日粒子速度波形 $u(t)$ 。

气炮内径57毫米, 最高弹速1400米/秒, 激光测速系统测量炮弹击靶速度的误差小于千分之五, 碰撞倾斜角一般小于0.5毫弧度。靶板和样品系由国产有机玻璃棒材加工而成, 平均密度为: $\rho_0 = 1.18$ 克/厘米³。实验装置示意图如图2所示。凹形有机玻璃冲击体粘接在炮弹头部, 冲击体厚度 $s = 3.99$ 毫米。电磁法的敏感元件是用宽1.5~2毫米、厚0.015毫米的紫铜箔做成U形结构埋置在有机玻璃样品中, 其切割磁力线的臂长 $l = 10.00$ 毫米。采用永久磁铁提供测试所需的磁场, 磁感应强度 $B = 356$ 高斯。粒子运动速度、敏感元件臂、磁感应强度三者方向互相垂直。当应力波到达敏感元件位置时, 其臂便以波后粒子速度运动, 切割磁力线, 产生感应电动势 e , 用示波器记录 $e(t)$ 波形。根据法拉第电磁感应定律求得粒子运动速

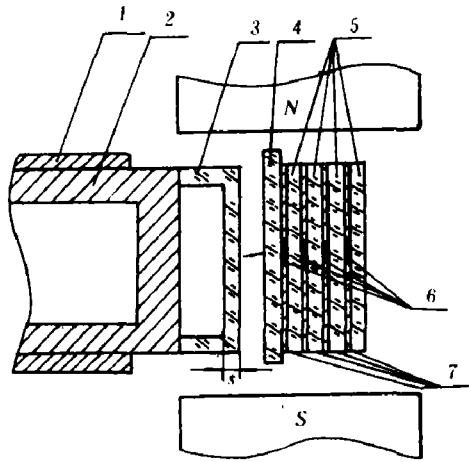


图 2 实验装置示意图

- 1—炮管壁、2—炮弹
- 3—有机玻璃冲击波
- 4—有机玻璃靶板
- 5—有机玻璃样品
- 6—铜箔敏感元件
- 7—环氧树脂粘接层
- N、S—永久磁铁的两个磁极

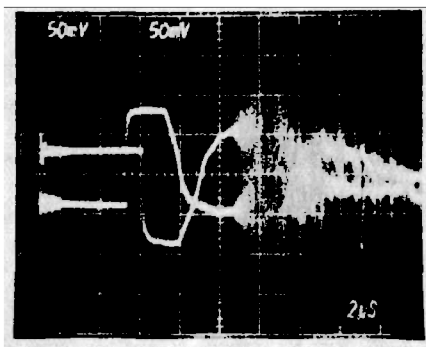


图 3(a) 敏感元件1、3的示波器记录照片

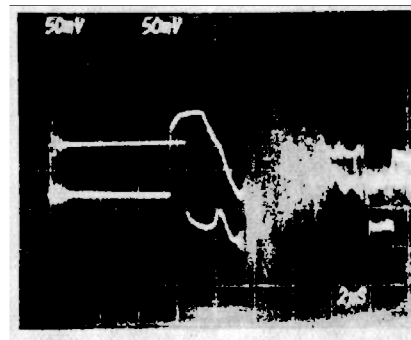


图 3(b) 敏感元件2、4的示波器记录照片

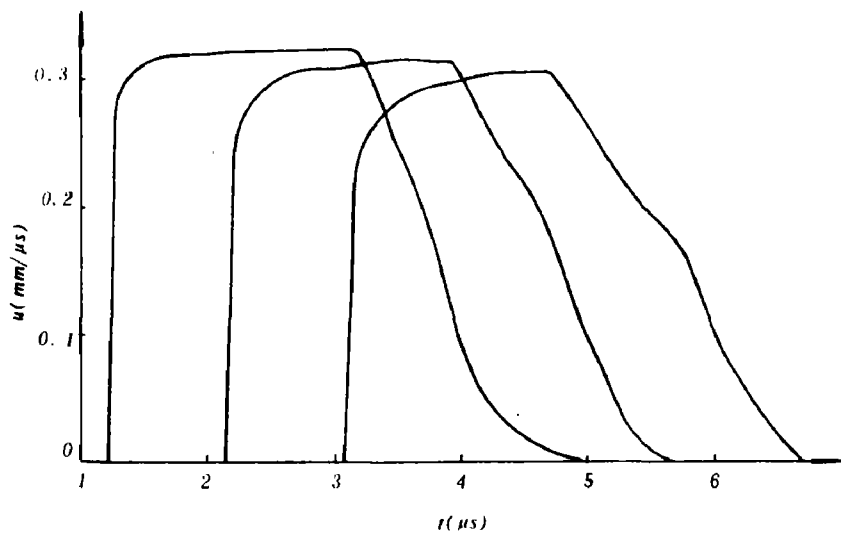


图 3(c) 实测 $u(t)$ 波形

度的波形 $u(t)$ 。

$$u(t) = \frac{e(t)}{Bl} \quad (20)$$

图2中从左到右埋置的四个敏感元件编号分别为1、2、3、4。拉格朗日坐标 h (即敏感元件至碰撞面的初始距离) 分别为3.975、6.995、10.035、13.055毫米。样品尺寸的设计保证了敏感元件1—3在测量加载及来自冲击体背表面的稀疏卸载过程中不受来自样品边侧及样品右表面的稀疏扰动的影响。敏感元件4的设置原是想测量加载及由样品右表面来的反射稀疏卸载过程, 由于应力波从样品右表面反射时带动位于其右侧空间中走向不规整的信号引出线的运动, 导致一个附加信号迭加在待测信号上, 因而未达到原测试目的。示波器记录的信号照片见图3(a)和(b)。照片(a)、(b)中的正相信号分别是敏感元件1、3所记录的信号, 负相信号分别是敏感元件2、4所记录的信号。所有4个记录信号的末端出现的高频振荡是样品边侧稀疏波到达敏感元件后产生侧向拉伸运动, 使得敏感元件及其引线处于似断非断的不正常状态所引起的。图3(c)是敏感元件1—3所记录的信号经判读、处理得到的有机玻璃中的拉格朗日粒子速度波形。在下面的分析中采用图3(c)中的这组实测 $u(t)$ 波形进行计算。

四、分析、讨论

由图3实测波形可以看到, 波形的加载段开始是一个陡峭上升的间断面(由于碰撞倾斜度的缘故, 上升前沿达几十毫微秒)。当接近波形的平顶段时, 出现弯曲现象, 随着传播距离的增加, 弯曲程度愈益严重, 这反映了加载过程的速率相关效应。在平顶段, 粒子速度达最大值, 不随时间而变。当来自冲击体背表面的稀疏波向右传播赶上加载波时, 便开始了卸载过程。由图3中波形的卸载段可以清楚地看到, 卸载曲线中途出现转折现象, 且随着传播距离的增加, 此现象愈益明显。上述波形变化揭示了有机玻璃材料的与速率相关的弹-塑性特征。下面计算应变波形 $\varepsilon(t)$ 和应力波形 $\sigma(t)$, ε 为体应变。

$$\varepsilon = 1 - \frac{V}{V_0} \quad (21)$$

对于间断面, 直接运用雨贡纽关系式计算,

$$\begin{cases} \Delta\sigma = \rho_0 D \Delta u \\ \Delta\varepsilon = \frac{\Delta u}{D} \end{cases} \quad (22)$$

由实测数据得到间断面的运动速度 $D = 3.27$ 毫米/微秒。

对于平顶段, 由于 $\Delta u = 0$, 由方程(6)、(7)知, $\Delta\sigma = 0$, $\Delta\varepsilon = 0$ 。

对于间断面和平顶段之间的弯曲加载段及整个卸载段采用一般流动状态的拉格朗日分析法进行计算。首先是选定一簇 n 条路径线, 在三个实测波形上分别取对应的 n 个测点 $u_{j,k}$, $k = 1, 2, 3$ 分别表示 h_1, h_2, h_3 处的 $u(t)$ 波形, $j = 1, \dots, n$ 表示在所分析的波形区段上所选择的测点。通过抛物线拟合给出路径线在 (u, h) 平面及 (t, h) 平面上的投影线

$$\overline{u_j} = a_j + b_j h_k + c_j h_k^2 \quad (23)$$

$$\bar{t}_j = a'_j + b'_j h_k + c'_j h_k^2$$

给出沿第 j 条路径线并位于第 k 个传感器线上的 u, t 对 h 的全导数

$$\frac{d\bar{u}_{j,k}}{dh} \equiv \left(\frac{d\bar{u}_j}{dh} \right) \Big|_k = b_j + 2c_j h_k = A_k u_{j,1} + B_k u_{j,2} + C_k u_{j,3} \quad (24)$$

$$\frac{d\bar{t}_{j,k}}{dh} \equiv \left(\frac{d\bar{t}_j}{dh} \right) \Big|_k = b'_j + 2c'_j h_k = A_k t_{j,1} + B_k t_{j,2} + C_k t_{j,3} \quad (25)$$

式中,

$$A_k = \frac{2h_k - (h_2 + h_3)}{(h_2 - h_1)(h_3 - h_1)}$$

$$B_k = \frac{(h_3 + h_1) - 2h_k}{(h_2 - h_1)(h_3 - h_2)}$$

$$C_k = \frac{2h_k - (h_1 + h_2)}{(h_3 - h_1)(h_3 - h_2)}$$

由(21)式得

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = -\frac{(V_2 - V_1)}{V_0}$$

代入方程(17)得

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = -\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial u}{\partial h} \right)_i dt \quad (26)$$

由(13)式

$$\left(\frac{\partial u}{\partial h} \right)_i = \frac{du}{dh} - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_k \cdot \frac{dt}{dh}$$

在路径线选得足够密的条件下, 采用数值积分的办法计算(26)式

$$\varepsilon_{j+1,k} - \varepsilon_{j,k} = -\frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{d\bar{u}_{j,k}}{dh} + \frac{d\bar{u}_{j+1,k}}{dh} \right] (t_{j+1,k} - t_{j,k}) - \left[\frac{d\bar{t}_{j,k}}{dh} + \frac{d\bar{t}_{j+1,k}}{dh} \right] \cdot (u_{j+1,k} - u_{j,k}) \right\}$$

经整理、化简得

$$\varepsilon_{j+1,k} - \varepsilon_{j,k} = -\frac{1}{2} \{ [A_k(u_{j,1} + u_{j+1,1}) + B_k(u_{j,2} + u_{j+1,2}) + C_k(u_{j,3} + u_{j+1,3})] \cdot (t_{j+1,k} - t_{j,k}) - [A_k(t_{j,1} + t_{j+1,1}) + B_k(t_{j,2} + t_{j+1,2}) + C_k(t_{j,3} + t_{j+1,3})] \cdot (u_{j+1,k} - u_{j,k}) \}$$

$$k = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (27)$$

由(27)式计算的 h_1, h_2, h_3 处的 $\varepsilon(t)$ 波形如图4所示。

下面用粒子速度波形的反演法计算 $\sigma(t)$ 波形。设想, 如果在 h_1, h_2, h_3 处分别测得的是 $\sigma(t)$ 波形, 欲由这三个 $\sigma(t)$ 波形确定 $u(t)$ 波形的的方法是: 与上面确定 $\varepsilon(t)$ 波形的的方法相似, 首先选定一族由实测 $\sigma(t)$ 数据拟合的路径线, 而后由方程(13)计算得到 $(\partial \sigma / \partial h)_i$, 再对方程(18)进行数值积分, 导得如下的方程

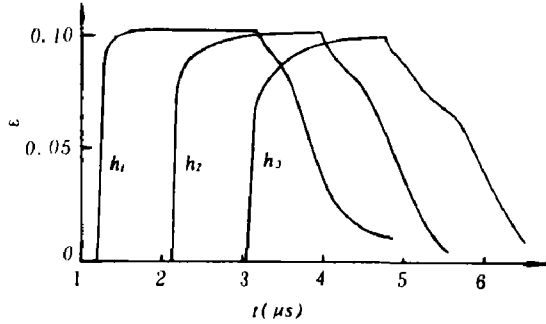


图4 计算得到的 $\varepsilon(t)$ 波形

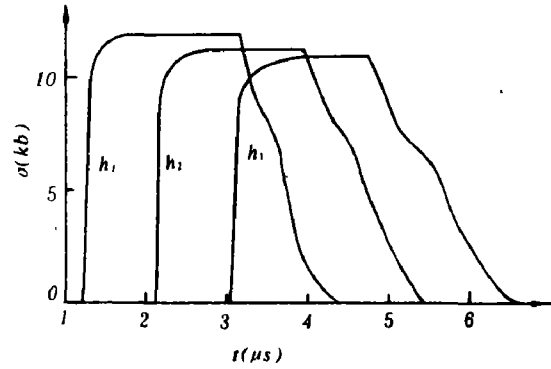


图5 计算得到的 $\sigma(t)$ 波形

$$\begin{aligned}
 u_{j+k} - u_{j,k} &= -\frac{1}{2\rho_0} \{ [A_k(\sigma_{j,1} + \sigma_{j+k,1}) + B_k(\sigma_{j,2} + \sigma_{j+k,2}) + C_k(\sigma_{j,3} + \sigma_{j+k,3})] \cdot (t_{j+k} - t_{j,k}) \\
 &\quad - [A_k(t_{j,1} + t_{j+k,1}) + B_k(t_{j,2} + t_{j+k,2}) + C_k(t_{j,3} + t_{j+k,3})] \cdot (\sigma_{j+k} - \sigma_{j,k}) \} \\
 k &= 1, 2, 3 \\
 j &= 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{28}$$

实际上现在测得的是3个 $u(t)$ 波形，方程(28)对 $k = 1, 2, 3$ 可分别写成三个方程，这三个方程在 $\sigma_{j,1}, \sigma_{j,2}, \sigma_{j,3}$ 已知的情况下仅包含三个未知数： $\sigma_{j+k,1}, \sigma_{j+k,2}, \sigma_{j+k,3}$ 。经化简，得到反演计算的方程组为

$$\begin{cases} X_1\sigma_{j+k,1} + Y_1\sigma_{j+k,2} + Z_1\sigma_{j+k,3} = S_1 \\ X_2\sigma_{j+k,1} + Y_2\sigma_{j+k,2} + Z_2\sigma_{j+k,3} = S_2 \\ X_3\sigma_{j+k,1} + Y_3\sigma_{j+k,2} + Z_3\sigma_{j+k,3} = S_3 \end{cases} \tag{29}$$

式中

$$\begin{aligned}
 S_k &= -2\rho_0 [u_{j+k} - u_{j,k}] - \{ [A_k\sigma_{j,1} + B_k\sigma_{j,2} + C_k\sigma_{j,3}] \cdot (t_{j+k} - t_{j,k}) + \\
 &\quad \sigma_{j,k} [A_k(t_{j,1} + t_{j+k,1}) + B_k(t_{j,2} + t_{j+k,2}) + C_k(t_{j,3} + t_{j+k,3})] \} \\
 k &= 1, 2, 3
 \end{aligned}$$

$$X_1 = -2A_1t_{j,1} - B_1(t_{j,2} + t_{j+k,2}) - C_1(t_{j,3} + t_{j+k,3})$$

$$Y_1 = B_1(t_{j+i,1} - t_{j,1})$$

$$Z_1 = C_1(t_{j+i,1} - t_{j,1})$$

$$X_2 = A_2(t_{j+i,2} - t_{j,2})$$

$$Y_2 = -2B_2t_{j,2} - A_2(t_{j,1} + t_{j+i,1}) - C_2(t_{j,3} + t_{j+i,3})$$

$$Z_2 = C_2(t_{j+i,2} - t_{j,2})$$

$$X_3 = A_3(t_{j+i,3} - t_{j,3})$$

$$Y_3 = B_3(t_{j+i,3} - t_{j,3})$$

$$Z_3 = -2C_3t_{j,3} - A_3(t_{j,1} + t_{j+i,1}) - B_3(t_{j,2} + t_{j+i,2})$$

由方程组 (29) 反演计算得到的 $\sigma(t)$ 波形如图 5 所示。由图 4、图 5 可得到加、卸载 $\sigma - \varepsilon$ 路径，如图 6 所示。

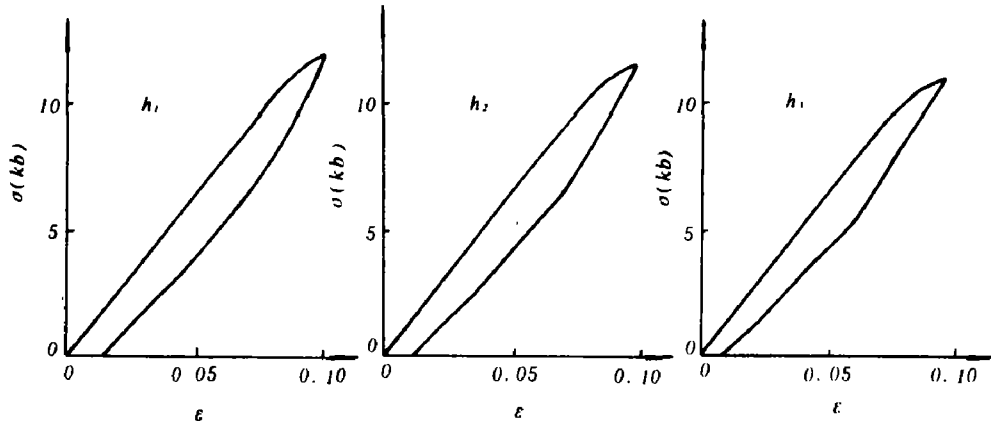


图 6 计算得到的加、卸载 $\sigma - \varepsilon$ 路径

由图 6 可以看到 PMMA 冲击加卸载后存在残余应变。必须指出，由于路径线是以 h_1 、 h_2 、 h_3 三条传感器线上的测点拟合的，所以沿路径线计算参量对 h 的全导数在中间传感器线 h_2 上最为可信，而在两条外边的传感器线上的全导数值可信度就要差一些，因此，图 4、5、6 中所得到的分析结果以中间传感器上的可信度为最高。

有机玻璃中粒子速度波形的实验测定主要是由史有程、曹述生、刘风琴等同志完成的，结果分析与林俊德同志进行了有益的讨论，在此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] Fowles, R., Williams, R. F., *J. Appl. Phys.*, 41(1)(1970), 360.
- [2] Cowpenthwaite, M., Williams, R. F., *J. Appl. Phys.*, 42(1)(1971), 456.
- [3] Grady, D. E., *J. Geophys. Res.*, 78(8)(1973), 1299.
- [4] Seaman, L., 材料动力学 (来华讲学), 北京工业学院 (1983).

LAGRANGIAN ANALYSIS FOR A SET OF PARTICLE VELOCITY PROFILES MEASURED IN PMMA

Li Xiaolan

Abstract

A set of particle velocity profiles in PMMA have been measured with electromagnetic gauge on a gas gun. By lagrangian analysis, the stress and strain profiles are computed from these particle velocity profiles. The compression and release stress strain paths are obtained. The rate-dependent constitutive relation characteristic of PMMA is revealed.