

# 二维平板抛掷中 的泰勒公式的理论证明

吕洪生 蒋伯诚

(1985年4月17日收到)

本文从理论上简单地导出了二维抛板上任一点在任何时刻,其板速与其弯转角之间的关系式以及板速的方向,即从理论上证明了泰勒公式。同时扩大了该公式的适用范围,它不仅仅适用于抛掷的极限情况。

在炸药驱动下的二维平板抛掷问题,在国防和民用中极其重要,特别是抛板的速度 $W$ 与其动态弯转角 $\beta$ 之间的关系。1941年英国科学家泰勒(G. E. Taylor)提出了一个著名的半经验公式—即泰勒公式

$$W_L = 2D \cdot \sin \frac{\beta_L}{2} \quad (1)$$

该公式给出了抛板的极限速度 $W_L$ 和其极限弯转角 $\beta_L$ 之间的关系,其中 $D$ 为爆速。

泰勒公式自它问世起一直在工程界和科学界广泛地使用,它的正确性,已被实验所证实,然而直到现在还没对它做严格明确的理论证明,在爆炸力学的专著〔1〕中是按直观的半经验办法导出的。现在,我们从理论上证明它,同时指出 $W = 2D \cdot \sin(\beta/2)$ 的关系不仅适用于极限情况,它可描述抛板上任一个质点在任何时刻其速度与转角之间的关系。在叙述我们的理论证明之前,先谈一下半经验的办法。

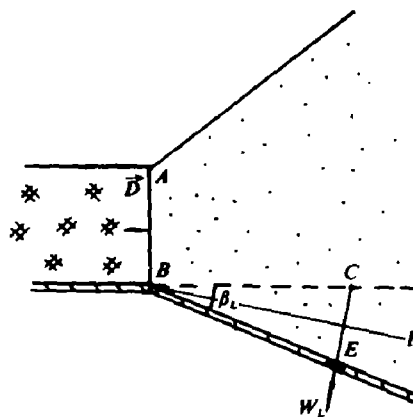


图 1

## 一、按半经验办法导出泰勒公式

在稳定的滑移爆轰作用下,如图1所示,二维平板被驱动,若站在爆轰波阵面(处在 $AB$ 位置)上来观察波阵面之后的流场,随时间是不变的(即定常),抛板的形状亦不变。因此任一板元质点(即抛板的一段微元)的运动情况代表了所有板元质点的运动情况。

现在考虑被抛平板上任一板元质点 $Q$ (在图上只标出它在两个时刻所在的空间位置,而未

标出 $Q$ 本身),在爆轰波阵面到达之前它静止不动,处于空间 $C$ 点处,在波阵面掠过之后,经过 $\Delta t$ 时间它到达空间 $E$ 点处,这时爆轰波阵面到达了 $B$ 点处。为了导出质点 $Q$ 的极限速度 $W_L$ 和极限弯转角 $\beta_L$ 之间的关系,须做三点假设

①原处在 $\overline{BC}$ 位置的那段平板绕 $B$ 点平直地旋转到 $\overline{BE}$ 位置(即板被抛部分“没有”弯曲);

②质点 $Q$ 沿 $\overline{CE}$ 线的速度不变,等于 $W_L$ ;

③速度矢量 $\vec{W}_L$ 垂直于角 $\beta_L$ 的平分线 $\overline{BF}$ ,或者说, $\vec{W}_L$ 沿 $\overline{CE}$ 方向。

根据如上假设,则

$$\begin{cases} \overline{BC} = D \cdot \Delta t \\ \overline{CE} = W_L \cdot \Delta t \\ \overline{BC} = \overline{BE} \end{cases}$$

在 $\triangle CBE$ 中使用正弦定理

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\pi/2 - \beta_L/2)} = \frac{\overline{CE}}{\sin \beta_L}$$

从而得到泰勒公式

$$W_L = 2D \cdot \sin \frac{\beta_L}{2} \quad (2)$$

泰勒是以非常敏锐的洞察力直观地得到这个近似公式的,它只适用于二维抛板小转角的极限情况。然而可以从理论上证明它是个适用于任一板元的精确公式。

## 二、从理论上导出泰勒公式

现在,我们完全去掉如上的三点假设来推导泰勒公式。如图2所示,取两个坐标系, $oxy$ 和 $OXY$ 。 $oxy$ 系取在爆轰波阵面上,随阵面一起运动, $OXY$ 系为空间固定坐标系。现在仍考虑一个板元质点 $Q$ 的运动情况。

### 1. 在 $oxy$ 系中考虑

如前所述,在动坐标系 $oxy$ 中,整个流场是定常的,板形曲线 $y = f(x)$ 是条流线,也是条迹线,所有的板元质点都沿这条曲线运动。

质点 $Q$ 的轨迹为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

质点 $Q$ 的速度分量为

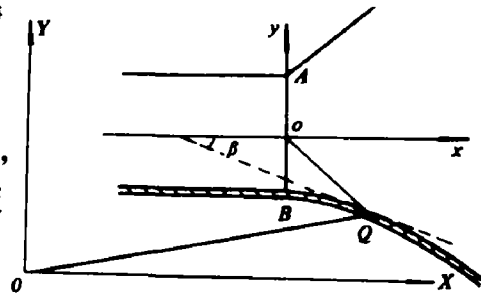


图 2

$$\begin{cases} u = \frac{dx}{dt} \\ v = \frac{dy}{dt} \end{cases} \quad (3)$$

质点的运动方程为

$$\begin{cases} m \frac{du}{dt} = p f' / \sqrt{1 + (f')^2} \\ m \frac{dv}{dt} = -p / \sqrt{1 + (f')^2} \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$\begin{cases} f' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} \beta \\ \beta \text{ 为质点 } Q \text{ 所处位置的抛板切线与 } x \text{ 轴夹角, 按顺时针;} \\ p \text{ 为爆轰产物对质点 } Q \text{ 的压强;} \\ m \text{ 为单位长度板的质量。} \end{cases}$$

将(4)式的第一式乘以 $u$ , 第二式乘以 $v$ , 并利用

$$v = f' \cdot u \quad (5)$$

则得到

$$\frac{d}{dt}(u^2 + v^2) = 0$$

即有

$$u^2 + v^2 = \text{const} = q^2 \quad (6)$$

$$\begin{cases} u = q \cdot \cos \beta \\ v = q \cdot \sin \beta \end{cases} \quad (7)$$

## 2. 在OXY系中考虑

### ①质点Q的速度W

质点Q在OXY系中的轨迹可写成

$$\begin{cases} X = X(t) = x(t) + X_0 - D \cdot t \\ Y = Y(t) = y(t) + Y_0 \end{cases} \quad (8)$$

式中 $X_0, Y_0$ 是动坐标系原点在 $t = 0$ 时刻的空间位置。

质点Q的速度分量为

$$\begin{cases} U = \frac{dX}{dt} = \frac{dx}{dt} - D = u - D \\ V = \frac{dY}{dt} = \frac{dy}{dt} = v \end{cases} \quad (9)$$

已知质点Q在运动开始时 $U = V = 0$ , 因而初始时刻 $u = D, v = 0$ , 故由(6)式得到 $q = D$ , 所以由(7)式和(9)式得出

$$\begin{cases} U = D(\cos \beta - 1) \\ V = -D \cdot \sin \beta \end{cases} \quad (10)$$

而  $W = \sqrt{U^2 + V^2}$

从而推出

$$W = 2D \cdot \sin \frac{\beta}{2} \quad (11)$$

由于质点  $Q$  是任取的，所以(11)式对任何质点都适用。

在极限情况下公式(11)就是所谓的泰勒公式，从而证明了半经验的泰勒公式是精确的，但是公式(11)可描述任何时刻的板元质点运动，不仅仅是极限情况。

值得说明的一点，如上所用的  $\beta$  角是在动坐标系  $oxy$  中量度的，按现在所取的两个坐标系关系，在固定坐标系  $OXY$  中也一样，即  $\beta$  仍为抛板切线与  $X$  轴的夹角，因在  $oxy$  系中的板形曲线为  $y = f(x)$ ，则  $\operatorname{tg} \beta = -f'(x)$ ，而据(8)式在  $OXY$  系中板形曲线写成

$$Y = f(x) + Y_0 = f(X + Dt - X_0) + Y_0$$

所以  $\frac{\partial Y}{\partial X} \Big|_t = f' \cdot \frac{\partial x}{\partial X} \Big|_t = f' = -\operatorname{tg} \beta$

故角  $\beta$  不变

② 质点  $Q$  的速度  $\vec{W}$  的方向

可以证明：在任何时刻  $t$ ，板元质点  $Q$  的速度  $\vec{W}$  都垂直于它所在抛板位置处的转角  $\beta$  的平分线  $HK$ ，如图 3 所示。

令  $\vec{L}$  为沿  $HK$  线任一非零矢量

$$\vec{L} = L \cdot \cos \frac{\beta}{2} \vec{i} - L \cdot \sin \frac{\beta}{2} \vec{j} \quad (12)$$

(其中  $\vec{i}$ ， $\vec{j}$  为沿  $X$ ， $Y$  轴的单位矢量)

而由(10)式， $\vec{W}$  表作

$$\vec{W} = U \vec{i} + V \vec{j} = D(\cos \beta - 1) \vec{i} - D \cdot \sin \beta \vec{j} \quad (13)$$

由(12)式和(13)式，则

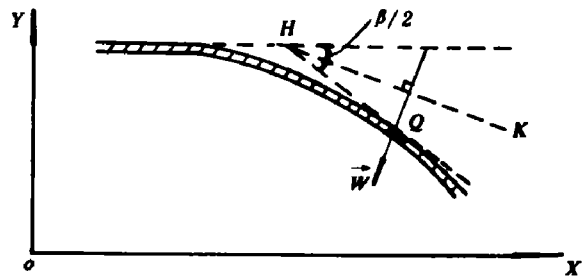


图 3

$$\begin{aligned}\vec{W} \cdot \vec{L} &= DL \left[ (\cos \beta - 1) \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \beta \right] \\ &= DL \left[ -2 \sin^2 \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} + 2 \sin^2 \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \right] = 0\end{aligned}$$

所以,  $\vec{W}$  垂直于板弯转角  $\beta$  的平分线。

### 三、分 析

从上述论证看出, 在若干假设条件下得出的泰勒半经验公式已被理论所证实, 然而在那些假设之中, 最值得怀疑的地方是沿  $\overline{CE}$  线 (见图 1) 板速  $W = W_L = \text{const}$ 。显然板元质点  $Q$  在  $C$  点处  $W = 0$ , 经过  $\Delta t$  时间它处于  $E$  点处  $W = W_L$ , 因此在许多作品中给出貌似合理的做法, 沿  $\overline{CE}$  线取板元质点速度的平均值  $\overline{W}$  为

$$\overline{W} = \frac{1}{2} W_L \quad (14)$$

其他做法与泰勒的相同, 因而得到

$$W_L = 4D \cdot \sin \frac{\beta}{2} \quad (15)$$

这相当于文献〔2〕中的  $\theta = 0$  的情况。但是这种做法给出的结果却与理论不符。原因在于: (14) 式成立的前提在于  $W$  与  $t$  成线性关系, 可是, 不管从理论计算〔3〕, 还是实验测量都表明, 开始  $W$  随时间上升很快 (大约  $W = W_L(1 - e^{-bt})$ ,  $b$  为未定的正常数), 然后很快地趋于“不变”的极限状态, 见图 4。泰勒考虑的为远离

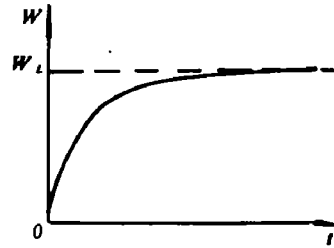


图 4

爆轰波阵面处的板元质点 (即考虑板元质点速度的极限状态), 在远离波阵面的地方假定抛板绕  $B$  点作平直旋转是正确的, 见图 2, 因此泰勒的直觉做法得出完全正确的结果。

### 参 考 文 献

- 〔1〕 Дерибас, А.А., Физика Упрочения И Сварка Взрывом. Издательство «Наука», Новибичск (1972), 39.
- 〔2〕 北京工业学院八系, 爆炸及其作用 (下册), 国防工业出版社 (1978), 52.
- 〔3〕 吕洪生, 在滑移爆轰波作用下, 二维金属平板抛掷的理论计算, 国防科技大学学报, 1982年1期.

**THEORETICAL PROOF OF THE TAYLOR'S  
FORMULA IN THE TWO-DIMENSIONAL  
PLATE PROJECTION PROBLEM**

Lu Hongsheng Jiang Becheng

**Abstract**

In this article the relation between the speed deflected and angle at any point on a two dimensional plate and its direction is simply derived theoretically, and at the same time the range of its suitability is extended. It rigorously proves that the Taylor's formula is correct not only for the limit velocity but for all time.