

# 连续斜电阻丝测量飞板 速度时弯曲波影响的理论分析

张 凯 奚进一 杨文彬

(1985年5月9日收到)

本文对连续斜电阻丝测飞板速度时弯曲波的影响作了理论分析。当切割速度 $v_c$ 小于弯曲波的最大波速 $C_{Pmax}$ 时,就有可能使电阻丝脱离飞板的接触点。对于这种影响,作了计算,并进行了相应的实验,二者的结果是符合得很好。

## 一、概 述

连续斜电阻丝测量飞板速度,在电阻丝中会产生弯曲波的扰动。当切割速度 $v_c$ 大于弯曲波传播的最大波速 $C_{Pmax}$ 时,弯曲波被抑制,而在 $v_c < C_{Pmax}$ ,并飞板速度开始变慢的时候,就有可能使电阻丝脱离飞板接触点。这个现象在用连续电阻丝测试飞板速度时是经常发生的,特别是在电阻丝的下落段,因为在这段上,往往满足 $v_c < C_{Pmax}$ 的条件。所以利用连续电阻丝下落段的测试方法是不足取的。

用连续电阻丝测量飞板速度的测试装置如图1所示<sup>(1)</sup>。飞板切割电阻丝时,相当于连续地给电阻丝以冲击。电阻丝实际上可看成是一截面为圆柱形的杆,杆的一端受到冲击,在杆内将产生一个弯曲波沿杆传播。由于柔性索的大挠度扰动可以用线弹性理论来处理,所以这种扰动是一种弹性弯曲波。这种扰动在某种条件下会使电阻丝测试方法完全失效。在爆炸焊接中,使用的都是低爆速炸药,所以飞板对电阻丝的切割速度较低,特别是在下降段的电阻

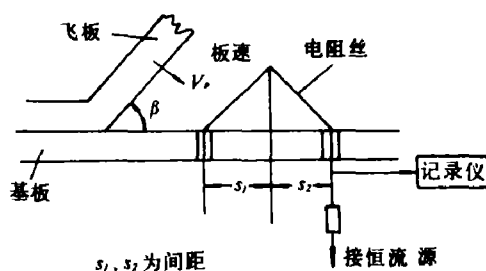


图1 电阻丝测试方法图

丝中,其切割速度更低,在大多数的情况下,弹性弯曲波的传播速度大于切割速度,从而使电阻丝在未被切割之前,已经发生了扰动,这种扰动速度是与飞板速度同一量级的。在某种特殊情形下(例如在测试圆管在滑移爆轰作用下的飞行姿态时),扰动速度超过了飞板速度,此时出现电阻丝脱离飞板的现象,并导致测试全部失效。另一方面它也将帮助我们判断在什么情况下,电阻测试结果将会失效,所以研究弯曲波对电阻丝测试的影响是很重要的。

## 二、Timoshinko梁的弯曲波微分方程式

在杆的弹性弯曲波理论发展中<sup>(2)</sup>, 既考虑杆的转动惯量修正, 又考虑纵断面由于剪切而偏离圆柱形的因素, 是Timoshinko提出来的, 称为Timoshinko梁, 其波动方程式有以下形式

$$C_0 K^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - K^2(1 + \epsilon') \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\epsilon' K^2}{C_0^2} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0 \quad (1)$$

式中  $w$  — 位移,  $C_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ ,  $K = \sqrt{\frac{I}{A}}$ ,  $\epsilon' = \frac{2(1 + \nu)}{R'}$ ,  $\rho$  — 单位长度质量,  $I$  — 截面惯性矩,  $A$  — 横截面积,  $E$  — 杨氏模量,  $\nu$  — 泊松系数,  $R'$  — 与截面有系数, 对园截面杆取  $R' = (3/4)$ 。

设(1)式的解为

$$w = A \exp[i(p t - f x)] \quad (2)$$

其中  $A$  为任意常量, 把(2)式代入(1)式, 消除指数函数, 就得到波传播的频率方程式

$$C_0^2 K^2 f^4 - K^2(1 + \epsilon') f^2 p^2 + \frac{\epsilon' K^2}{C_0^2} p^4 - p^2 = 0 \quad (3)$$

(3)式中  $p$  — 波的频率,  $f$  是波数,  $\lambda (= 2\pi/f)$  是波长,  $C_0$  — 波速, 频率与波长有以下关系。

$$p = \frac{2\pi C_0}{\lambda} \quad C_0 = \frac{p}{f} \quad (4)$$

按(3)与(4)式可解得

$$\left(\frac{C_p}{C_0}\right)^2 = \frac{[K^2(1 + \epsilon') + (\lambda^2/4\pi^2)] \pm \sqrt{[K^2(1 + \epsilon') + (\lambda^2/4\pi^2)]^2 - 4\epsilon' K^4}}{2\epsilon' K^2} \quad (5)$$

对园柱杆来说,  $K^2 = \frac{I}{A} = \frac{a^2}{4}$ ,  $a$  — 半径,  $\epsilon' = \frac{8(1 + \nu)}{3}$ ; 另外, 所用电阻丝直径  $0.1 \text{ mm}$ ,

并实测得  $E = 1.755 \times 10^9 \text{ kg/cm}^2$ , 所以计算得  $C_0 = 4560 \text{ m/s}$ , 把上述数值代入(5)式中去, 求得

$$\left(\frac{C_p}{C_0}\right)^2 = \frac{3}{4(1 + \nu)} \left\{ \left[ \frac{11 + 8\nu}{12} + \frac{\lambda^2}{4\pi^2 a^2} \right] - \sqrt{\left[ \frac{11 + 8\nu}{12} + \frac{\lambda^2}{4\pi^2 a^2} \right]^2 - \frac{2(1 + \nu)}{3}} \right\} \quad (6)$$

(6)式中的  $C_p$  为相速, 但相速  $C_p$  不相应于能量在介质中传播, 能量是以群速  $C_g$  来传播的, 连续地相邻一组波构成波群的波速为

$$C_g = (dp/df) \quad (7)$$

把(3)式二边除以  $f^4$ , 然后对  $f$  求导数, 再乘以  $f$ , 再以  $C_g = \frac{dp}{df}$  代入, 解出  $C_g$

$$\frac{C_g}{C_0} = \frac{(C_p/C_0)[4\epsilon' K^2(C_p/C_0)^2 - 2K^2(1 + \epsilon') - (\lambda^2/\pi^2)]}{[4\epsilon' K^2(C_p/C_0)^2 - 2K^2(1 + \epsilon') - (\lambda^2/2\pi^2)]} \quad (8)$$

根据(6)及(8)式可以计算出  $(C_p/C_0)$  与  $(C_g/C_0)$ , 图2是  $(C_p/C_0)$  与  $(C_g/C_0)$  对  $(a/\lambda)$  的

曲线,从曲线中看出,  $C_s$  与  $C_p$  都有极限值存在,在波长  $\lambda \rightarrow 0$  时的波速为  $C_s = 0.537C_0$ ,  $C_p = 0.537C_0$ ,说明  $C_s$  与  $C_p$  非常接近,另外,从图 2 说明的重要一点是波的弥散,即波速依赖于波长,不同波长的波,其波速是不一样的,波长越短的波,速度越快,但无论怎样快,也不会超过  $0.570C_0$  值。

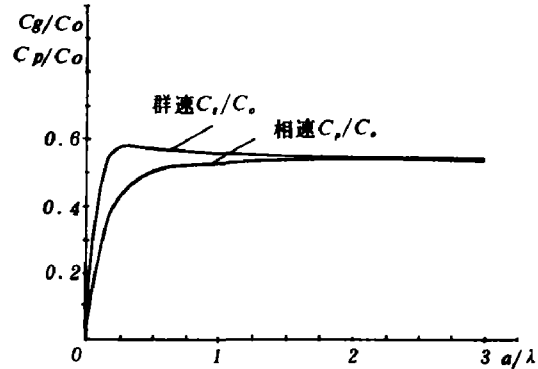


图 2

### 三、满足脉冲初始条件的解

飞板切割电阻丝一端时,一般地说,飞板的速度与电阻丝并不垂直,把这一速度分解为平行与垂直二个分速度,设垂直的分速度为  $v_0$ 。这个  $v_0$  就是使电阻丝发生弯曲扰动的脉冲条件,设在  $t=0$  时,电阻丝在  $x=x_0$  处受到飞板的冲击,这样电阻丝弯曲波的初值条件可写为

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= 0 \\ w_t(x, 0) &= \begin{cases} 0 & x \neq x_0 \\ -v_0 & x = x_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

或写为  $\delta$  函数的形式

$$w_t(x, 0) = -v_0 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx \quad (10)$$

根据式(2)知道,其特解形式是

$$w = A \exp[i(pt - fx)] \text{ 与 } w = B \exp[i(-pt - fx)]$$

把不同波数  $f$  (或波长  $\lambda$ ) 的波迭加起来构成一般解形式

$$w(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} [A(f)e^{i f(-x + C_p t)} + B(f)e^{i f(-x - C_p t)}] df$$

代入初值条件(9)式得

$$\int_{-\infty}^{\infty} [A(f) + B(f)] e^{-i f x} df = 0$$

求得

$$A(f) = -B(f)$$

这样

$$w(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(f) [e^{i f(-x + C_p t)} - e^{i f(-x - C_p t)}] df \quad (12)$$

代入初值条件(10),有

$$w_t(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} 2i f C_p A(f) e^{i f x} df = -v_0 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx$$

但按  $\delta$  函数的性质

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(f-f_k)(x-x_0)} d(f-f_k) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(f-f_k)x_0} df \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(f-f_k)x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(f-f_k)x_0} \delta(f-f_k) df\end{aligned}$$

$$W_i(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} 2ifC_p A(f) e^{ifx} df = -v_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(f-f_k)x_0} \delta(f-f_k) df$$

式中  $f_k$  为某一特定波数。从而得到

$$2ifC_p A(f) e^{ifx} = -v_0 e^{-i(f-f_k)x_0} \delta(f-f_k)$$

解得

$$A(f) = -\frac{v_0 e^{if(x-x_0)} \cdot e^{if_k x_0}}{2ifC_p} \delta(f-f_k)$$

把  $A(f)$  代入  $W(x, t)$  中

$$w(x, t) = -\frac{v_0}{2i} e^{if_k x_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{if(x-x_0)}}{f \cdot C_p} [e^{if(-x+C_p t)} - e^{-if(x+C_p t)}] \delta(f-f_k) df \quad (13)$$

对 (13) 式进行微分, 得到

$$\begin{aligned}W_i(x, t) &= -\frac{v_0}{2} e^{if_k x_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ifx_0} [e^{ifC_p t} + e^{-ifC_p t}] \delta(f-f_k) df \\ &= -\frac{v_0}{2} e^{if_k x_0} \cdot e^{-if_k x_0} [e^{if_k C_p t} + e^{-if_k C_p t}] \\ &= -v_0 \cos(f_k C_p t) = -v_0 \cos\left(\frac{2\pi C_p t}{\lambda_k}\right) \quad (14)\end{aligned}$$

(14)式表示以波长  $\lambda_k$ , 并相应以波速  $C_p$  运动的弦波分量的速度, 也就是在  $x_0$  处打击一个  $v_0$  速度后, 在  $t$  时, 在  $x-x_0=C_p t$  处所得到的速度, 从而想到, 当飞板以切割速度  $v_c$  切割电阻丝时, 只有波速与切割速度  $v_c$  相等的弦波与切割点同时前进, 而  $C_p > v_c$  的弦波将先于切割点而往前运动,  $C_p < v_c$  的弦波被切割点抑制住了, 因而在考虑切割点的速度时, 是不必考虑的。

在切割点,  $C_p = v_c$ , 在该点的电阻丝扰动速度为  $w_i = -v_0 \cos\left(\frac{2\pi v_c t}{\lambda_c}\right)$ , 当  $t = \frac{n\lambda_c}{v_c}$  时, 该点速度适好为  $-v_0$ , 与飞板的速度相同, 其中  $n$  为任意整数,  $\lambda_c$  可按 (8) 式求出。如果飞板的运动在某一瞬时开始减速, 电阻丝有可能脱离飞板运动, 这种情形是在测试园管外布炸药作滑移爆轰时的飞行姿态下, 最易容出现的, 因为园管的飞行姿态曲线上有拐点, 在该点, 壁面速度由极大值开始降低。图 3 的  $a$  图是电阻丝测试的布置图,  $b$  图是它的由数值计算所得的飞行姿态曲线, 园点是由这个电阻丝方法所测得的值,  $A$  点对应  $y = 1.627$  mm, 正好对应于实测的电压曲线上的上抬点 (图 4 中的  $b$  点), 它说明此时在这一点上, 电阻丝的速度超过了飞板的速度, 电阻丝开始脱离飞板。在这一点开始脱离之后, 同时带动

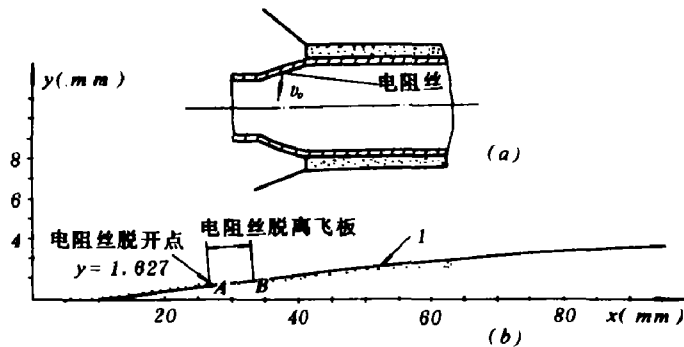


图 3

1——由数值计算的园管飞行姿态曲线; ·——由电阻丝测得的值

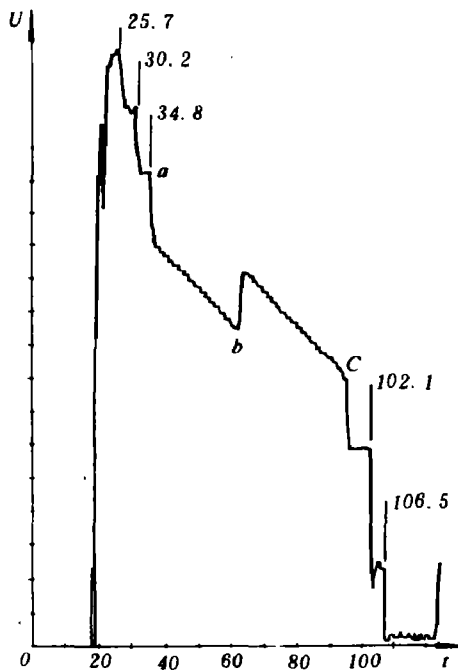


图 4

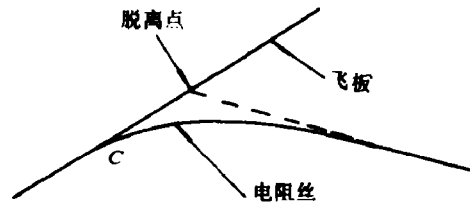


图 5

了一段电阻丝也脱离了飞板 (图 5), 但此时电阻丝并没有断。在电阻丝脱开后, 立刻得到松弛, 又很快减速, 致使飞板从 C 点又开始重新被切割。但是此时的有效电阻丝长度被加长了一段, 反映在图 4 上的电压曲线上就是出现一个突跃值。图 3 中的 A 点是飞行曲线的拐点, 亦即过了这一点后, 速度由极大值开始下降。为了有一个清晰的概念, 把邻近这一点的数值计算值列表如下

表

$y (mm)$	0.9621	1.067	1.2432	1.4362	1.5956	1.7934	1.97	2.1253
$\beta$ (度)		4.53	4.36	4.718	4.825	4.737	4.505	4.42
$v_r (m/s)$	251.87	240.69	256.2	271.55	270.53	260.17	249.13	242.97

从表中看出, 在  $y = 1.5956 mm$  处, 速度达极大值后就开始下降, 这与电阻丝脱开点的  $y = 1.627 mm$  是一致的。同时, 自然会想到, 如果切割速度超过了最大的群速, 即超过了  $C_{max} = 0.570C_0$  时, 按照上面所述的理论, 弯曲波的扰动将完全被抑制。事实也确实如此, 在一

次实验中，实验的参数为  $v_c = 5000\text{ m/s}$ ， $C_{p\text{max}} = 2599\text{ m/s}$ ，因而  $v_c > C_{p\text{max}}$ ，电压曲线就无上抬现象。

若采用上升段的电阻丝，按

$$v_l = \frac{\sin \beta}{\sin(\beta - \beta_1)} v_d > C_{p\text{max}}$$

就有可能遏止弯曲波的产生。

图 6 是用连续电阻丝测试平板飞行姿态的一次实验。电阻丝呈下降段，在电阻丝前面有

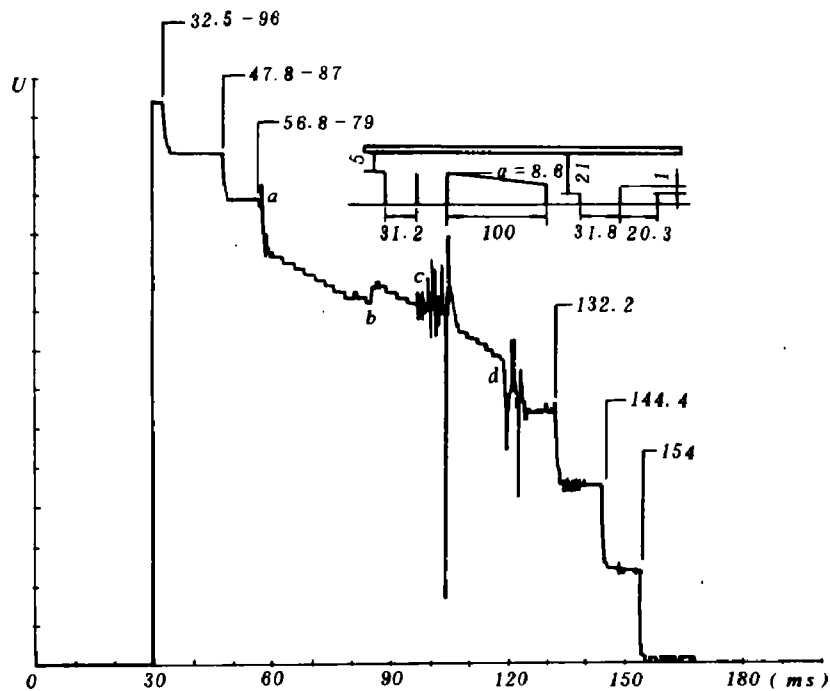


图 6

二根等高探针，用来测定爆速，在其后面有三根探针可以用来测定弯折角  $\beta$  和末端爆速，根据图示尺寸，可以计算得弯折角

$$\beta = \tan^{-1} \frac{2h(t_1 + t_2)}{(s_1 + s_2)(t_2 - t_1) - (s_2 - s_1)(t_1 + t_2)} = 20.72^\circ$$

取前后端爆速的平均值为  $2214\text{ m/s}$ ，平板切割电阻丝的切割速度

$$v_2 = \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \beta_2)} v_d = \frac{\sin 20.72^\circ}{\sin(20.72^\circ + 8.6^\circ)} \times 2214 = 1600\text{ m/s}$$

电阻丝的长度为  $101.14\text{ mm}$ 。由于弯曲波群速  $C_r = 0.537 C_0 = 2449\text{ m/s}$ ，看出切割速度小于电阻丝中弯曲波传播的群速，于是在切割点前方，必有弯曲波的扰动存在。但从理论上讲，如果爆轰条件非常稳定，从而飞板速度也是非常稳定的，飞板速度随着  $y$  的增加不可能有减

少倾向, 根据前述理论, 在测试平板情况下, 电阻丝似乎是不会脱离板面的。但是实际上, 爆轰从来都不是严格稳定的, 加上各种随机因素, 在飞行中, 平板速度有可能在变化, 当飞板速度变慢瞬时, 电阻丝就会离开板面, 图 6 中的  $b$  点处的曲线上抬现象, 就属于这种情况。在  $C$  点开始, 出现了一段强烈的扰动现象, 这个现象可解释如下: 从图中的  $a$  点到  $c$  点所需时间从图上量得为  $39.6\mu s$ , 此时, 相应地飞板切割电阻丝走过了  $39.6 \times 1.6 = 63.36\text{ mm}$ 。另一方面, 从切割开始, 就产生了纵波, 纵波速度  $C_0 = 4560\text{ m/s}$ , 远快于弯曲波的速度, 它从电阻丝的左端走到右端所需时间为  $22.23\mu s$ , 到了左端后, 由于电阻丝是绕过支脚端部呈拉紧状态, 并不是固接的, 因而受端部影响, 会产生新的左传弯曲波, 正是这个左传弯曲波到达切割点后, 与该点近区的右传弯曲波相互作用, 使得电阻丝与飞板接触产生强烈扰动。为了证实这个设想, 可计算一下左传弯曲波的时间。其实, 左传弯曲波从右端传至  $C$  点的时间为  $15.42\mu s$ , 这个时间加上纵波在整个电阻丝上的传播时间求得为  $37.65\mu s$ , 这与切割所需时间  $39.6\mu s$  只差了  $1.95\mu s$ , 是很接近的。如果注意到图中在  $b$  点曲线有上抬现象, 这说明切割点右方的电阻丝加长了。从图中粗略算得为  $9.5\text{ mm}$  左右, 从而上述左传弯曲波所经历时间将超过  $15.42\mu s$ , 因而前面计算的误差  $1.95\mu s$  会进一步的缩小, 在经过一段扰动之后, 右传与左传弯曲波的合成会趋于稳定, 这时切割现象也趋于稳定 (见图中  $d$  点前方一段平稳曲线)。在  $d$  点往后一段强烈扰动的曲线, 其特征是电阻不断受到短路, 这或许是由于射流使电阻短路, 射流是随机的, 因此出现多次短路现象。图 7 的电阻丝是呈上升段的, 在其前后端测得爆速

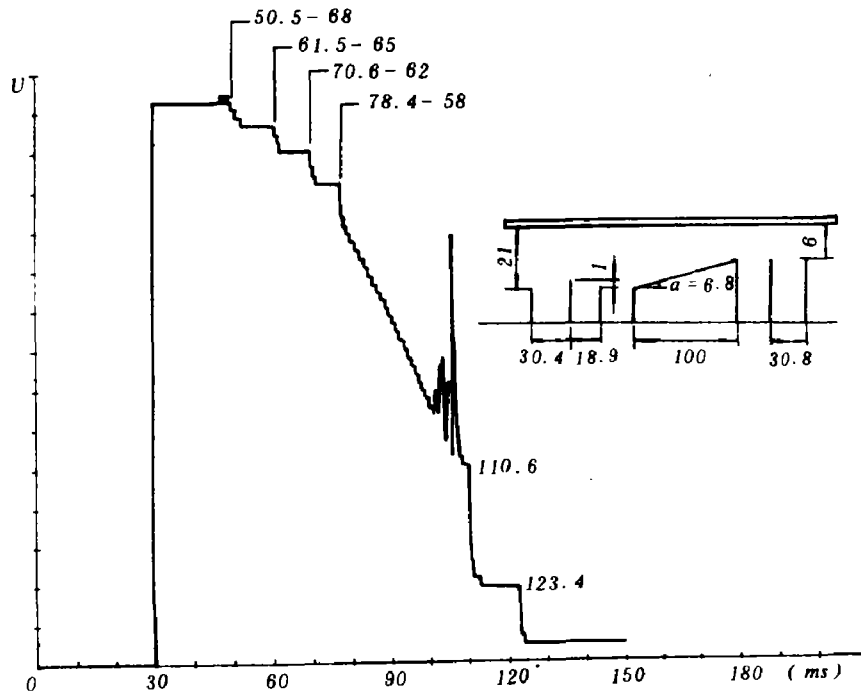


图 7

平均值  $v_1 = 2452\text{ m/s}$ , 弯折角计算得  $\beta = 16.3^\circ$ , 飞板对电阻丝的切割速度为  $v_2 = 4171\text{ m/s}$ ,

由于切割速度大大超过弯曲波速度,所以在电阻丝的绝大部分,如  $a-b$  段,电压曲线不会有上抬现象,但在  $b$  点以后,电压曲线又出现了扰动,这是由于端部的反射弯曲波造成的。同前段的分析一样,可以计算电阻丝总长为  $l = 100.7 \text{ mm}$ , 自  $a$  点出发的纵波从左端传到右端时间为  $22.08 \mu\text{s}$ , 而从  $a$  点切割到  $b$  点经过的时间为  $23 \mu\text{s}$ , 相应于  $a$  点到  $b$  点距离为  $95.93 \text{ mm}$ , 于是反射弯曲波到达  $b$  点时间为  $1.946 \mu\text{s}$ , 这样,纵波在  $a$  点出发到反射弯曲波到达  $b$  点经过的总时间为  $24 \mu\text{s}$ , 二者非常符合。图 8 也是电阻丝呈上升段的形状,但测得的爆速  $v_d$

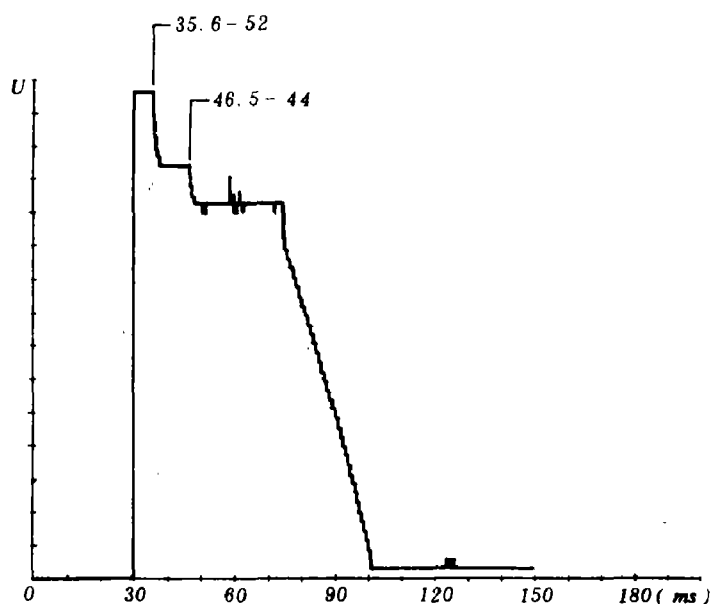


图 8

$= 2568.8 \text{ m/s}$ , 计算的切割速度稍大于纵波波速, 从而按予期那样, 不会产生任何扰动。

## 参 考 文 献

- (1) Held, M. Theoretical and Practical Aspects of Explosive Welding, 7th International Conference on High Energy Rate Fabrication (1981).
- (2) H. 考尔斯基著, 王仁等译, 固体中的应力波, 科学出版社 (1958年), 46.



**A THEORETICAL ANALYSIS FOR THE INFLUENCE  
OF BENDING WAVE ON THE FLYER VELOCITY  
DETERMINATION MEASURED BY SLANTED  
RESISTANCE WIRE TECHNIQUE**

Zhang Kai Xi Jinyi Yang Wenbin

**Abstract**

A theoretical analysis about the effect of bending wave on the slanted resistance wire, which are used in measuring the flyer velocity, is proposed in this paper. The resistance wire may be departed from the point contacted with the flyer in case of the cutting velocity of the slanted resistance-wire  $V_c$  is smaller than the maximum wave velocity  $C_{p,max}$  of the bending wave. The coincidence between the experimental and the calculation results is rather good.