

翟文计算结果小得多,究其原因这是由于他的无限元位移模式使波动能量瞬时弥散到无限远去了。由此,进一步从实践上证明本文对翟文的看法是正确的。

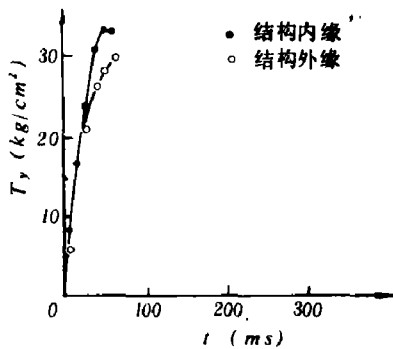


图2 轴向应力

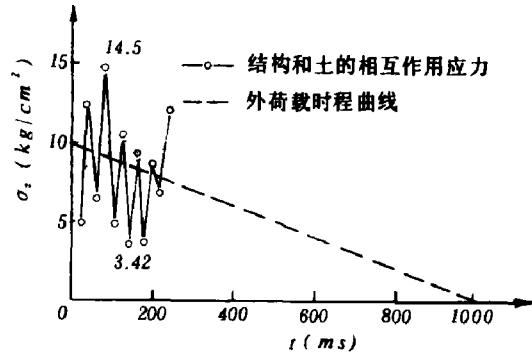


图3 土和结构相互作用应力

当然,关于采用类似的无限元(即用 $e^{-\alpha r}$ 作为离散化形函数)的作法,国外有人在结合有限元离散中联合应用过。但是该无限元被设置在离关心的主要区域较远处,作为一种能量吸收机制使用,对某些问题取得过一些较好的结果。但翟文将其直接设置在结构周边的做法,看来是有问题的。以上看法比较粗浅,望各位同行批评指正。

关于《对“内爆炸荷载作用下地下竖井的动力响应”一文》的几点讨论

翟桐 曹志远

(1986年4月20日收到)

无限元法是近几年发展起来的一种新的计算方法,它特别适用于求解地下结构一类相互作用问题。在本刊上刊登的“内爆炸荷载作用下地下竖井的动力响应”一文(以下简称原文)是该法在抗爆结构上应用的一次尝试,引起大家广泛兴趣。我们很高兴看到吴逸群等同志在此基础上又做了一些补充工作,提出了自己的看法(以下简称吴文)。下面就有关问题进行一些讨论。

原文位移函数在径向采用 $e^{-\alpha(r-l)}$ 函数组合,通过满足位移变分方程(见原文p15第14行及原文文献〔1〕)建立待定系数 $u_{1m}(t), u_{2m}(t), b_{1m}(t), \dots$ 所满足的常微分方程组来求解。吴文提出完备函数系问题是指偏微分方程的无穷级数解析解而言,而这里是含有待定系数的有限项组合(见原文式(2))的位移变分解。众所周知,通过位移变分原理求解,要求试函数只要是满足位移边界条件的任意函数组合(连是否级数也不要求,更不要完备函数级数——例如目前教科书中有关位移变分原理的一些例题)。微分方程解和变分方程解是两回事。这也可能是由于原文着重于应用,未能详细列出通过变分求解建立算式过程而引起误解。

吴文提到无限元位移函数会产生应力波瞬时由结构传播到无限介质的不合理现象。这可能是从原文式(2)的一项表达式判断的结果。但这里是多项组合,而每项前又有些待定系数,而这些组

合比是时间的函数,并通过与三维变分方程等价的波动方程来确定的。因此,按变分原理及给定载荷、初始边值条件,会自动给出起先在近处相互同向叠加,远处相互反向抵消,而后同向叠加处逐渐外移,向外传播的过程(当然,一开始远处不会绝对为零,这只是数值计算误差问题)。关于这一概念和应用经过有关学者^[1-4]的研究已相当成熟。在1981年美国ASME召开的Computational Methods for Infinite Domain Media-Structure Interaction专题讨论会上曾作过总结⁵。

吴文用八节点等参数有限元对原文的内核爆荷载情况的例题做了计算,其结果与原文结果是接近的。原文中径向位移最大值计算机输出为 $4.524 \times 10^{-2} \text{cm}$ (原文中用曲线给出,有描图误差),而吴文为 $5.5 \times 10^{-2} \text{cm}$ 。径向土压力原文为 2.127kg/cm^2 ,而吴文为 3.42kg/cm^2 (如吴文所指出,用有限元于尺寸跳跃单元间此值是有一定误差的)。两者基本上接近,但有一定偏离,其原因在于有限元计算采用近似的平面模型和介质远端固定边界。对于后者,由于吴文没写出固定边界位置到底多远(只写取得足够远),对动力计算影响如何,难于估计其误差(如果其单元接近于正方形,将四分之一圆环向分四层,径向取十二层,即在两倍多直径远处即行固定,其误差不小)。而将三维改为二维的影响,可以从原文图3、图6、图8看到,沿轴向还是有一定变化的,大约在10—30%范围内波动。因此,两者有这样的偏离是正常的,可以预料的。至于吴文中轴向应力为 32.9kg/cm^2 ,而原文的计算机输出是 1382kg/cm 。初看起来两者好象相差很多,实际十分接近。原因有二:(1)吴文算的是“轴向应力”,而原文是“轴力”,是应力沿厚度的积分值(见原文P 18第1行)。因此,吴文结果应乘厚度 50cm ,再和原文比较;(2)原文图6、图7横座标有误,均应为 (10^2kg/cm) ,因为是轴力,分母应为单位长度,而不是单位面积,这也可能是引起吴文误解为应力的原因。综上所述,所有结果两者相差10—30%左右,其原因是由于二维与三维、有限与无限计算模型间的差别。我们感到高兴的是吴文工作证实了无限元法的正确性。可以想象两文作者在两地用两种方法、两个程序、两部机器不约而同地(在两个模型不同而引起偏差的前提下)能算得如此相近的结果,很有力地证明了半解析无限元法是一种新的实用而有效的方法。

为什么说是更有效的方法,这是吴文没提到的一个问题,这里做一些比较说明。吴文的有限元法是采用48个八节点单元,几百个自由度计算一个平面有限域模型;原文的无限元法是采用两个单元,32个自由度计算一个三维无限域模型。显然,用无限元法工作量少一个量级,而且能计算更为精确的模型(例如另一个行波例题,用有限元平面模型算是根本不行的),其优点是显而易见的。特别是无限域问题,土体计算范围增大,有限元工作量随之增大,而无限元不增加任何计算工作量,且能反应很远处介质状态效应。

无限元法之所以具有这些对工程计算来说十分实用的优点,其原因是采用半解析技术。该法在轴向、径向采用解析函数族逼近,从而使三维问题降为一维数值计算问题,因而大部份复杂的场、域及相互作用问题均能在微机上来实现。半解析半数值方法是目前科学研究手段的一种新趋向,是有限元法的一种重要发展,已引起国内外学术界广泛重视。明年6月21—25日将在北京召开的国际计算工程力学会议的主题之一即是半解析方法。

很抱歉,由于原程序在别的问题上做过核对工作(包括和已有理论、数值、实验结果的比较),因此,对原文例题没有直接进行比较计算。吴文为此专门做了这一工作,是原文很好的补充,为此对吴文作者表示感谢。

参 考 文 献

- [1] Lysner, J., Waas, G., *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, 98 (EM4) (1972), 85.
 [2] Bettess, P., Zienkiewicz, O. C., *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 11 (1977), 1271.
 [3] Chow, Y. K., Smith, I. M., *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 17 (1981), 503.
 [4] Saini, S. S. et al., *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, 16 (1978), 363.
 [5] Zienkiewicz, O. C. et al., *Numerical Methods for Unbounded Field Problems, AMD, ASME*, Vol. 46, (1981), 135.

“对‘内爆炸荷载下地下竖井的动力响应’ 一文看法”的附注*

吴逸群 钱七虎

1. 变分方程的坐标函数(或基函数)要求是完备的, 否则原问题的泛函收敛性得不到保证, 这在一般的数学或力学教科书中均有论述⁽¹⁾⁽²⁾。翟文在径向选取的位移基函数 $e^{-n(n-1)}$ ($n=1, 2, \dots$)不是完备的, 所以原问题解的收敛性得不到保证。而且很难对各种已给初始数据(几何形状, 几何尺寸, 荷载形式等)求出预先指定精度的变分近似解来, 因此, 翟文所建议的方法很难说是合理的。

2. 关于无限元法, 国外有些学者作了一定研究⁽³⁻⁵⁾但是他们都是把无限元与有限元结合一起使用的, 即内部区域用有限元离散, 外部区域用无限元离散。特别重要的是无限元被设置在离核心区较远处(当然比某些其它近似方法设置可相对近些)。无限元只是用来近似地模拟远场的特性, 使扩散波尽可能好地满足所谓的 Sommerfeld 条件(即辐射条件)以保证扩散波能量尽量少地反射回来影响近场。这种方法的收敛性靠有限元本身的收敛性和无限元的设置距离增大来保证。翟文——关于《对‘内爆炸荷载下地下竖井的动力响应’一文看法》的几点讨论——中所列举的几篇文献都是解决静力或稳态问题的。关于瞬态问题的无限元法既未见报导, 更谈不上“成熟”了, 也未发现将无限元直接设置在结构周边。而翟文所取的设置在结构周边的特殊形式无限元就会出现前面所述的收敛性不能保证的问题。

参 考 文 献

- [1] 彭旭麟、罗汝梅, 变分法及其应用, 华中工学院出版社(1983), 108, 119.
 [2] 钱伟长, 变分法与有限元, 科学出版社(1980), 257.
 [3] Bettess, P., *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 11 (1977), 53.
 [4] Chow, Y. K., Smith, I. M., *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 17 (1981), 503.
 [5] Zienkiewicz, O. C., Bettess, P. et al., *Numerical Methods for Unbounded Field Problems and a New Infinite Element Formulation, Computational Methods for Infinite Domain Media-Structure Interaction, AMD, ASME*, Vol. 46 (1981).

* 作者看了翟桐等的回答后补充两点意见, 作为附注