

阶跃载荷作用下圆板塑性动力响应

李庆明 黄永刚

本文研究了理想刚塑性简支圆板在均布阶跃载荷作用下的塑性动力响应。应用屈服条件和建立方程时，考虑了横向剪力与转动惯量，得到了问题的完全解。

一、引言

梁与圆板是工程中常见的结构，其塑性动力响应问题从五十年代开始研究^[1,2]，迄今已做了大量工作。1972年 Jones, N. 对七十年代以前的工作做了总结^[3]。

Jones, N. ^[4,5] 最早考虑横向剪力和转动惯量对梁、圆板塑性动力响应的影 响。但他仅限于对冲击载荷得到了完全解。文献 [6] 对于梁得到了任意非反向均布载荷作用时的完全解。可是至今尚未见到圆板在有限均布载荷作用下的完全解。

本文考虑理想刚塑性简支圆板在均布阶跃载荷作用下的塑性动力响应。其屈服条件中包含横向剪力，运动方程中包含转动惯量，采用模态解法，得到了该问题的完全解。结果分析表明，对应于不同值的阶跃载荷有两种不同形式的流动机构。

二、基本方程

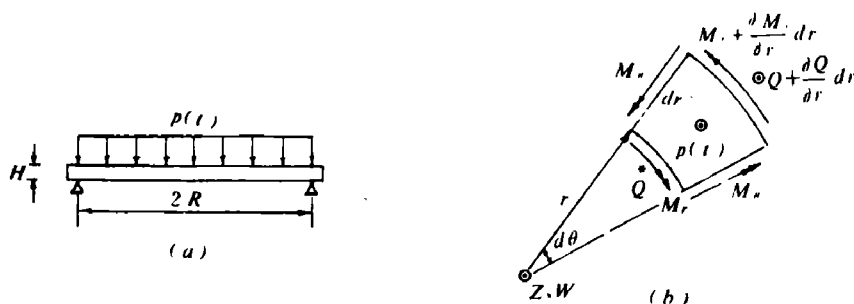


图1 简支圆板及内力

均布载荷作用下的简支圆板在考虑剪力与转动惯量时动力学方程如下

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_r}{\partial r} + (M_r - M_\theta)/r + Q &= I_r \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{Q}{r} &= -p(t) + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, $I_r = \rho H^3/12$; $\mu = \rho H$; $\partial W/\partial r = \gamma + \psi$; $K_r = \partial \psi/\partial r$; $K_\theta = \psi/r$. W 为圆板中面横向位移, ρ 为圆板密度; ψ 为弯曲导致中面转角; γ 、 K_r 和 K_θ 分别为横向剪切应变、径向与周向弯曲应变。 M_r 、 M_θ 和 Q 分别为单位长度上的径向弯矩、周向弯矩, 和横向剪力。

在简支边界上, 不考虑支承的局部效应, 用均布于圆板横截面上的支承力 $N (= -Q|_{r=R})$ 代替支承。当 $N < Q_0$ 时, 支承点的横向运动速度 $\dot{W}_1 = 0$; 当 $N = Q_0$ 时, 支承点开始有剪切滑移, 这种剪切滑移导致 $r=R$ 处 $\dot{\gamma} = \infty$, 但它并不违反屈服准则。为了保证剪切滑移不使梁发生断裂, 剪切滑移位移应小于 H , 这一点将在后面讨论。

塑性区中, 间断面上的连续条件为

$$[M_r] = -\dot{\beta} I_r [\dot{\psi}]; [Q] = -\dot{\beta} \mu [\dot{W}];$$

$$[\dot{\psi}] = -\dot{\beta} \left[\frac{\partial \psi}{\partial r} \right]; [\dot{W}] = -\dot{\beta} \left[\frac{\partial W}{\partial r} \right] \quad (2)$$

式中, $\dot{\beta}$ 是间断面运动速度; $[X] = X_2 - X_1$ 是间断面两侧物理量的差。

本文采用的屈服面与文献 [5] 中的相同

(见图2)。图中, $Q_0 = \frac{1}{2} \sigma_s H$, $M_0 = \frac{1}{4} \sigma_s H^2$

分别为单独考虑时的静力极限剪力与静力极限弯矩。 σ_s 为单向拉伸屈服应力。

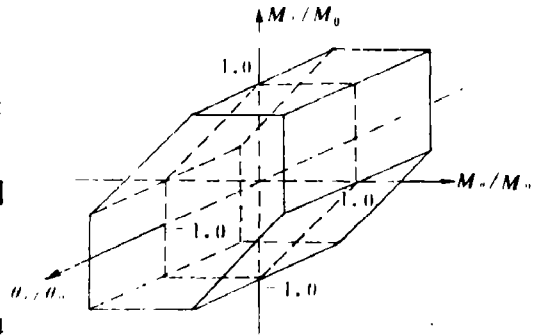


图2 屈服面

三、阶跃载荷作用下圆板塑性动力响应的完全解

圆板的运动导致全面屈服, 故 $M_\theta = -M_r$, 由正交流动法则可知, 在 $0 \leq r \leq R$ 中, $\dot{\gamma} = 0$, 因此, $\partial W/\partial r = \dot{\psi}$, 解可以分为以下三部分:

在简支边界上, $M_r = 0$; $\dot{W}_1 = 0$ (当 $N < Q_0$ 时), 或 $N = Q_0$ 。

在中部塑性区, $0 \leq r \leq \beta$, 假定 $M_r = -M_0$ 及 $-Q_0 \leq Q \leq 0$, 由 (1) 式可得

$$I_r \frac{\partial^2 \ddot{W}}{\partial r^2} + \frac{I_r}{r} \frac{\partial \ddot{W}}{\partial r} = -p(t) + \mu \dot{W} \quad (3)$$

在外部塑性区, $\beta \leq r \leq R$, 假定 $-M_0 \leq M_r \leq 0$ 及 $-Q_0 \leq Q \leq 0$, 由正交流动法则, $K_r = \partial \dot{\psi}/\partial r = 0$ 即 $\partial^2 \ddot{W}/\partial r^2 = 0$ 。因此, 该区域中速度场的形式为

$$\dot{W} = \dot{W}_1(t) + (R-r)\omega(t) \quad (4)$$

式中, $\dot{W}_1(t)$ 是支承处的剪切滑移速度, $\omega(t)$ 是该区域的转动角速度。

当作用一个阶跃载荷时 (图3), 如载荷 p 比较小, 则支承点不滑动, 有 $\dot{W}_1(t) \equiv 0$; 如 p 比较大, 支承处产生剪切滑移, $\dot{W}_1 \neq 0$ 。这两种情形的临界判别条件将在以后给出。

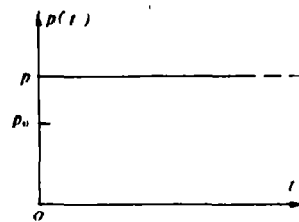


图3 阶跃载荷

阶跃载荷作用下,显然 $\dot{\beta} = 0$,
即间断面是静止的。因此,间断面
上的连续条件(2)式为

$$[M_r] = 0; [Q] = 0;$$

$$\left[\frac{\partial \dot{W}}{\partial r} \right] = 0; [\dot{W}] = 0 \quad (5)$$

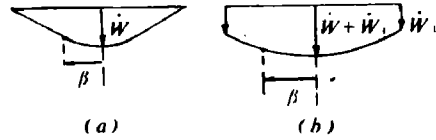


图4 两种流动机构

下面采用模态解进行分析。

1. 支承点静止时的解(见图4a)

设解为

$$\dot{W} = \ddot{W}(t) \phi(r)$$

则

$$\dot{\psi} = \ddot{W}(t) \phi'(r)$$

(6)

条件(5)可写为

$$[\phi] = \left[\frac{d\phi}{dr} \right] = 0 \quad (7)$$

对于 $0 < r < \beta$, 将(6)式代入(3)式, 对 $\beta < r < R$, 将(6)式与(4)式比较,
并考虑到(7)式以及初条件 $\dot{W}(r, 0) = 0$

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{p}{\mu \ddot{W}} + \left(1 - \frac{p}{\mu \ddot{W}}\right) I_0(\eta r) & 0 < r < \beta \\ \left(\frac{p}{\mu \ddot{W}} - 1\right) \eta I_1(\eta \beta)(R - r) & \beta < r < R \end{cases} \quad (8)$$

式中, I_0 、 I_1 分别为修正的第一类零阶和一阶 Bessel 函数。 $\mu \ddot{W}$ 满足

$$\frac{p}{\mu \ddot{W}} = \frac{X(\beta)}{X(\beta) - 1} \quad (9)$$

式中, $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{I_r}} = \frac{2\sqrt{3}}{H}$, $X(\beta) = \eta(R - \beta)I_1(\eta\beta) + I_0(\eta\beta)$ 。

积分(1)式并考虑到(5)式及 $Q|_{r=0} = 0$, 可以得到内力的表达式

$$M_r = \begin{cases} -M_0 & 0 < r < \beta \\ -M_0 + \frac{p\eta I_1(\eta\beta)}{12X(\beta)} \cdot \frac{(r-\beta)^2}{r} \left\{ r^2 - \beta^2 - \frac{6}{\eta^2} + 2(r+2\beta) \frac{I_0(\eta\beta)}{\eta I_1(\eta\beta)} \right\} & \beta < r < R \end{cases} \quad (10)$$

$$Q = \begin{cases} -\frac{p}{X(\beta)} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot I_1(\eta r) & 0 < r < \beta \\ \frac{1}{6} \frac{p\eta I_1(\eta\beta)}{X(\beta)} \left\{ -2r^2 + 3r\beta - 3r \frac{I_0(\eta\beta)}{\eta I_1(\eta\beta)} \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{r} \left[-\beta^3 - \frac{6}{\eta^2} \beta + 3\beta^2 \frac{I_0(\eta\beta)}{\eta I_1(\eta\beta)} \right] \right\} & \beta < r < R \end{cases} \quad (11)$$

由 $M_r|_{r=R} = 0$ 得到以下方程, 用于确定 β

$$\frac{2p_0}{p} = \frac{\eta R I_1(\eta\beta)}{X(\beta)} \left(1 - \frac{\beta}{R}\right)^2 Z(\beta) \quad (12)$$

式中, $p_0 = \frac{6M_0}{R^2} = \frac{3\sigma_s H^2}{2R^2}$; $Z(\beta) = 1 - \frac{\beta^2}{R^2} - \frac{6}{\eta^2 R^2} + 2\left(1 + 2\frac{\beta}{R}\right) \frac{I_0(\eta\beta)}{\eta R I_1(\eta\beta)}$ 。

当 $p \geq p_0$ 时, 容易证明方程 (12) 在 $\beta \in [0, R]$ 中解是唯一的。这样, 可以解得 β , 从而确定 \ddot{W} 、 M 和 Q 。由 M 和 Q 的表达式可证明, 在 $r \in [0, R]$ 中 M 单调递增, Q 单调递减。因此, 不违背屈服条件和我们的假定, 得到的解是完全解。

速度场为

$$\dot{W} = \dot{W} \phi(r) = \frac{p t}{\mu} \cdot \begin{cases} \left\{ 1 - \frac{I_0(\eta r)}{X(\beta)} \right\} & 0 < r < \beta \\ \frac{\eta I_1(\eta\beta)}{X(\beta)} (R - r), & \beta < r < R \end{cases} \quad (13)$$

位移场为

$$W = \frac{p t^2}{\mu} \cdot \begin{cases} \left\{ 1 - \frac{I_0(\eta r)}{X(\beta)} \right\}; & 0 < r < \beta \\ \frac{\eta I_1(\eta\beta)}{X(\beta)} \cdot (R - r), & \beta < r < R \end{cases} \quad (14)$$

以上的解都是在假定 $Q|_{r=R} = -Q_0$ 时得到的, 当令 $Q|_{r=R} = -Q_0$ 时, 我们得到判断支承点是否移动的临界条件

$$\frac{p \eta R^2 I_1(\eta\beta)}{6 Q_0 X(\beta)} \left\{ 2 + \left(\frac{6}{\eta^2 R^2} - 3 \right) \frac{\beta}{R} + 3 \frac{I_0(\eta\beta)}{\eta R I_1(\eta\beta)} \cdot \left(1 - \frac{\beta^2}{R^2} \right) + \frac{\beta^3}{R^3} \right\} = 1 \quad (15)$$

由 (12)、(15) 消去 β , 则可得到判别两种流动机构的临界曲线 (图 5)。

2. 支承点运动时的解 (见图 4b)。

设解为 $\dot{W} = \dot{W}_1(t) + \dot{W}(t) \phi(r)$ (16)

此时的分析与上节相似, 只需将其中的 p 换为 $p - \mu \ddot{W}_1$ 。如对 (12) 式可得

$$\frac{2 p_0}{p - \mu \ddot{W}_1} = \frac{\eta R(\eta\beta)}{X(\beta)} \left(1 - \frac{\beta}{R}\right)^2 Z(\beta) \quad (17)$$

内力表达式等其它式子也可类似写出。由此, 可解得 \ddot{W}_1 、 \ddot{W} 及 $\phi(r)$ 。

利用条件 $Q|_{r=R} = -Q_0$, 有

$$\frac{p - \mu \ddot{W}_1}{p_0} = X(\beta) \sqrt{3} \left\{ 2 + \left(\frac{6}{\eta^2 R^2} - 3 \right) \frac{\beta}{R} + \frac{\beta^3}{R^3} \right\} I_1(\eta\beta) + \frac{3}{\eta R} \left(1 - \frac{\beta^2}{R^2} I_0(\eta\beta) \right) \quad (18)$$

由 (17)、(18) 消去 $p - \mu \ddot{W}_1$, 可得 β 的方程

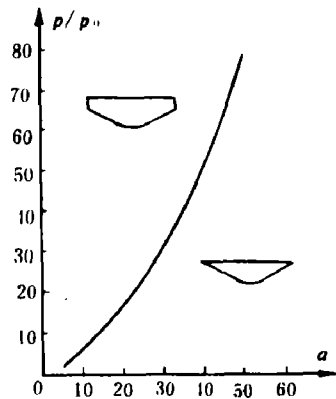


图 5 临界判别曲线 ($a = \eta R$)

$$2\sqrt{3}\left[2 + \left(\frac{6}{\eta^2 R^2} - 3\right)\frac{\beta}{R} + \frac{\beta^3}{R^3} + 3\left(1 - \frac{\beta^2}{R^2}\right)\frac{I_0(\eta\beta)}{\eta R I_1(\eta\beta)}\right] = \left(1 - \frac{\beta}{R}\right)^2 \eta R Z(\beta) \quad (19)$$

(18)式中, 令 $\ddot{W}_1 \equiv 0$, 可以得到与 (15) 相同的临界条件。

速度场可写为

$$\dot{W} = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \left[p - \frac{2 p_0 X(\beta)}{\eta R I_1(\eta\beta)(1 - \beta/R)^2 Z(\beta)} \right] \cdot t \\ \quad + \frac{2 p_0 t}{\mu \eta R I_1(\eta\beta)(1 - \beta/R)^2 Z(\beta)} \cdot [X(\beta) - I_0(\eta r)], & 0 < r < \beta \\ \frac{1}{\mu} \left[p - \frac{2 p_0 X(\beta)}{\eta R I_1(\eta\beta)(1 - \beta/R)^2 Z(\beta)} \right] \cdot t + \frac{2 p_0 t}{\mu R (1 - \beta/R)^2 Z(\beta)} (R - r), & \beta < r < R \end{cases} \quad (20)$$

位移场为

$$W = \begin{cases} \frac{p t^2}{2\mu} - \frac{p_0 I_0(\eta r) t^2}{\mu \eta R I_1(\eta\beta)(1 - \beta/R)^2 Z(\beta)}, & 0 < r < \beta \\ \frac{t^2}{2\mu} \left[p - \frac{2 p_0 X(\beta)}{\eta R I_1(\eta\beta)(1 - \beta/R)^2 Z(\beta)} \right] + \frac{2 p_0 t^2 (R - r)}{\mu R (1 - \beta/R)^2 Z(\beta)}, & \beta < r < R \end{cases} \quad (21)$$

四、讨 论

从解的形式可以看到, 圆板的位移是随时间而增加的。但是随着 W 的增大, 它将破坏我们的一些假定, 而从工程观点来看, 结构已经不能继续使用。因此存在一个认为结构达到损坏时间 t_f 。

假定 W^* 为中点最大允许位移。

对于第一种流动机构, 可令 $W(0) \leq W^*$, 则

$$t_f = t^* = \sqrt{\frac{2\mu W^*}{\{1 - [1/X(\beta)]\} \cdot p}} \quad (22)$$

对第二种流动机构,

$$t^* = \sqrt{\frac{\mu W^*}{(p/2) - \{p_0/\eta R I_1(\eta\beta)(1 - \beta/R)^2 Z(\beta)\}}} \quad (23)$$

式中 t^* 为中点位移达到 W^* 所需时间。

前面已提到, 支承处剪切滑移位移应小于板厚 H , 令 $H = \int_0^{t^{**}} \dot{W}_1 dt$, 则

$$t^{**} = \sqrt{\frac{2\mu H}{p - p_0 f(\beta)}} \quad (24)$$

式中 t^{**} 为支承点位移达到 H 所需时间

$$f(\beta) = \frac{X(\beta)}{\sqrt{3}} / \left\{ \left[2 + \left(\frac{6}{\eta^2 R^2} - 3 \right) \frac{\beta}{R} + \frac{\beta^3}{R^3} \right] I_1(\eta\beta) + \frac{3}{\eta R} \left(1 - \frac{\beta^2}{R^2} \right) I_0(\eta\beta) \right\}$$

则

$$t_f = \min[t^*, t^{**}] \quad (25)$$

另一方面, 对简支圆板在均布载荷下的静力分析表明, 圆板的极限载荷为 p_0 , 其位移为

线性场分布。这样，我们有了均布载荷作用下简支圆板在两种极端情况下的完全解。对于具体问题进行分析时，静力分析比较保守，动力分析则可以给出允许的响应极限，在这个期限内，尽管 $p > p_0$ ，但结构仍然没有损坏。实际上，许多工程问题也仅仅是要求在某段时间内保证其不损坏。因此，在进行结构设计，给定安全系数时，进行这方面的考虑是很有意义的。

参 考 文 献

- [1] Hopkins, H. G., Prager, W., *ZAMP* 5 (4) (1954), 317.
- [2] Wang, A. J., *JAM*, 22 (1955), 375.
- [3] Jones, N., et al., *Dynamic Response of Structures*, eds., Herrmann, G., Perrone, N., Pergamon Press (1972), 1.
- [4] Jones, N., Gomes de Oliveira, J., *JAM*, 46 (1979), 303.
- [5] Jones, N., Gomes de Oliveira, J., *JAM*, 47 (1980), 27.
- [6] 金泉林，理想刚性 Timoshenko 梁动力响应的分析解，力学学报 5 (1984)。

DYNAMIC PLASTIC RESPONSE OF CIRCULAR PLATE UNDER STEP LOADING

Li Qingming Huang Yonggong

Abstract

Dynamic plastic response of a simply supported circular plate made of a rigid-perfectly plastic material under uniformly step loading is investigated in this paper. In using the yield condition and establishing the equations, the shear force and the rotating inertia are considered. Finally we get the analytic solution of this problem.