

# 在强动载荷作用下 变截面梁中的塑性铰

周青 余同希

本文采用理想刚塑性材料模型研究了在强动载荷作用下梁的塑性动力响应,发现对于变截面梁,塑性铰处的剪力一般可以不等于零。本文对阶跃载荷和冲击载荷给出了几个例子。

在强动载荷作用下,结构的塑性变形远大于弹性变形,因而通常可采用理想刚塑性材料模型。当采用这个模型求解梁的问题时,必然遇到的就是具有塑性铰的变形机构。在塑性动力学中,塑性铰的概念被广泛应用在梁受阶跃载荷、冲击载荷或其它脉冲载荷作用的动力响应分析中。但以往人们较多地研究了不变截面梁的情况(例如文献[1]),因而形成了这样一个印象:塑性铰的位置就是弯矩达到极值、即剪力为零的位置<sup>[2]</sup>。事实上,这个观点只对不变截面梁是正确的,对于变截面梁,塑性铰可以形成在剪力不为零的地方。本文研究了在阶跃载荷或脉冲型载荷作用下,变截面梁中塑性铰的一些性质。

## 一、刚塑性梁的动力学完全解满足的条件

所谓完全解,是指既是动力许可的、又是运动许可的一组广义力场  $M(x)$  和速度场  $v(x)$ ,它满足:

### 1. 平衡方程

设梁长方向为  $x$  方向,在截面  $x = \xi_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) 形成固定的或移行的塑性铰,每个铰处的弯矩和剪力为  $M_i$  和  $Q_i$  (规定  $Q(x) = -\frac{dM}{dx}$ ),每两个相邻铰之间的梁段看作刚体运动,

它应满足外载(根据达朗贝尔原理,包括惯性力)和  $M_i$ 、 $Q_i$  参与的力和力矩的平衡方程。

### 2. 端点条件

包括梁的外力端条件(如在简支端和自由端)和位移端条件(如在固定端和简支端)。

### 3. 协调条件

包括塑性铰两边的运动连续条件。

4. 外载荷(包括惯性力)在运动许可的速度场  $v(x)$  上做正功。

### 5. 不违背屈服条件

设变截面梁的塑性极限弯矩分布为  $M_b(x)$ ,在外载和惯性力作用下梁的弯矩分布为  $M(x)$ ,则必须有

$$|M(x)| \begin{cases} = M_p(x) & x = \xi_i \\ < M_p(x) & x \neq \xi_i \end{cases} \quad (1)$$

如果在铰点处无外部集中载荷作用,全梁不存在突变截面,则  $M(x)$ 、 $\frac{dM}{dx}$ 、 $M_p(x)$ 、 $\frac{dM_p}{dx}$  是连续函数,为了(1)式成立,根据连续函数的性质,可以证明在成铰处  $x = \xi$  必须满足下列“铰点条件”

(1) 当  $\xi$  位于梁中间某点时

$$\begin{cases} [\text{sign } M(\xi)] M(\xi) = M_p(\xi) \\ [\text{sign } M(\xi)] \frac{dM}{dx} \Big|_{x=\xi} = \frac{dM_p}{dx} \Big|_{x=\xi} \\ [\text{sign } M(\xi)] \frac{d^2 M}{dx^2} \Big|_{x=\xi} \leq \frac{d^2 M_p}{dx^2} \Big|_{x=\xi} \end{cases} \quad (2)$$

对于不变截面梁,(2)中各式分别相当于  $|M| = M_p$ ,  $Q = 0$ ,  $M$  取极大(小)值。

(2) 当  $\xi$  位于梁的端部(比如固定端)时

$$\begin{cases} [\text{sign } M(\xi)] \cdot M(\xi) = M_p(\xi) \\ [\text{sign } M(\xi)] \frac{dM}{dx} \Big|_{x=\xi} \leq \frac{dM_p}{dx} \Big|_{x=\xi} \end{cases} \quad (3)$$

## 二、基本方程

考虑图 1 中长为  $l$ , 线密度为  $m(x)$  的悬臂端, 自由端  $C$  受阶跃载荷  $F$  作用。假设在梁中间某点  $x = \xi$  形成固定铰  $B$ , 自由端速度  $V = V(t)$ , 它与  $F$  同方向。则  $BC$  段的速度分布为

$$v(z) = \frac{z - \xi}{l - \xi} V, \quad (\xi \leq z \leq l) \quad (4)$$

根据达朗贝尔原理, 全梁的弯矩分布为

$$M(x) = \begin{cases} F(l-x) - \int_{\xi}^l (z-x)m(z)\dot{v}(z)dz & 0 \leq x < \xi \\ F(l-x) - \int_x^l (z-x)m(z)\dot{v}(z)dz & \xi \leq x < l \end{cases} \quad (5)$$

剪力分布为

$$Q(x) = -\frac{dM}{dx} = \begin{cases} F - \int_{\xi}^l m(z)\dot{v}(z)dz & 0 \leq x < \xi \\ F - \int_x^l m(z)\dot{v}(z)dz & \xi \leq x < l \end{cases} \quad (6)$$

根据(2)式有

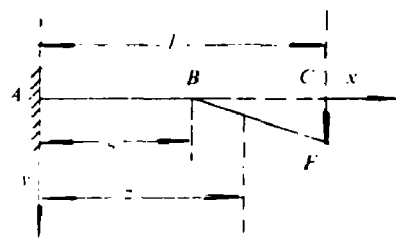


图 1

$$\begin{cases} M(\xi) = M_p(\xi) \\ Q(\xi) = -\left. \frac{dM_p}{dx} \right|_{x=\xi} \end{cases} \quad (7)$$

(7)式就是这类问题的基本方程组。

如果载荷是通过具有  $y$  方向速度  $V_0$  的集中质量  $G$  撞击梁的自由端施加的冲击载荷, 只须将 (5)、(6) 式中  $F$  改为  $-G\dot{V}$ , 并把  $\xi$  看作时间  $t$  的函数 (即  $B$  点为移行铰) 即可。其中  $V$  和  $\dot{V}$  分别是  $t$  时刻梁自由端的速度和加速度。

### 三、理想截面梁的例子

1. 设悬臂梁的横截面是图 2 所示的理想夹层截面, 即芯层只起联结上下两部分的作用, 忽略芯层的质量。截面宽度  $b$  和表面层的厚度  $\delta$  是常数, 高度  $h$  沿梁长方向线性变化

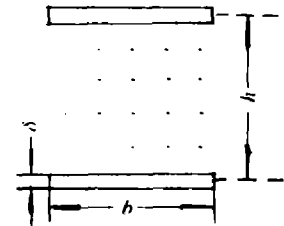


图 2

$$h(x) = a_1 x + a_0 \quad (8)$$

其中  $\delta \ll h$ 。极限弯矩分布为

$$M_p(x) = Y b \delta h(x) = Y b \delta (a_1 x + a_0) \quad (9)$$

其中  $Y$  是材料的动态屈服应力。忽略芯层质量以后, 可取梁的线密度  $m$  为常数以简化数学推导 (如果认为  $m$  不是常数, 也可以推出相应的结果, 后面两节的例子考虑了  $m$  不是常数的情况)。

如果梁的自由端受阶跃载荷  $F$  的作用, 则变形机构是固定铰, 即  $\xi$  不随时间  $t$  变化, 故由 (4) 式知加速度分布为

$$\ddot{v}(z) = \frac{z - \xi}{l - \xi} \dot{V} \quad (\xi \leq z < l)$$

代入 (5)、(6) 式得

$$M(x) = \begin{cases} F(l-x) - \frac{1}{6} m \dot{V} (l-\xi)(2l+\xi-3x) & 0 \leq x < \xi \\ F(l-x) - \frac{1}{6} m \dot{V} \frac{(l-x)^2}{l-\xi} (2l+x-3\xi) & \xi \leq x < l \end{cases} \quad (10)$$

$$Q(x) = \begin{cases} F - \frac{1}{2} m \dot{V} (l-\xi) & 0 \leq x < \xi \\ F - \frac{1}{2} m \dot{V} \frac{l-x}{l-\xi} (l+x-2\xi) & \xi \leq x < l \end{cases} \quad (11)$$

由 (7)、(9)、(10)、(11) 式, 在铰点  $x = \xi$  应有

$$\begin{cases} F(l-\xi) - (1/3)m\dot{V}(l-\xi)^2 = Y b \delta (a_1 \xi + a_0) \\ F - (1/2)m\dot{V}(l-\xi) = -Y b \delta a_1 \end{cases} \quad (12)$$

解得

$$\xi = \frac{Fl - Yb\delta(2la_1 + 3a_0)}{F + Yb\delta a_1} \quad (13)$$

$$\dot{V} = \frac{2(F + Yb\delta a_1)^2}{3mYb\delta(la_1 + a_0)} \quad (14)$$

不难看出, 梁的不运动部分的弯矩分布

$$M(x) = M_p(x) \quad 0 < x < \xi$$

当  $\xi < x < l$  时, 附录中证明解(13)、(14)式使  $M(x)$  满足  $0 < M(x) < M_p(x)$ , ( $\xi < x < l$ ), 因而全梁不违背屈服条件, 该解满足前面给出的刚塑性完全解的条件。

### 2. 剪力与弯矩图

当塑性铰位于梁中间某点  $\xi$  时, 根据 (10)、(11)、(13)、(14) 式可以作出剪力和弯矩分布图如图 3。

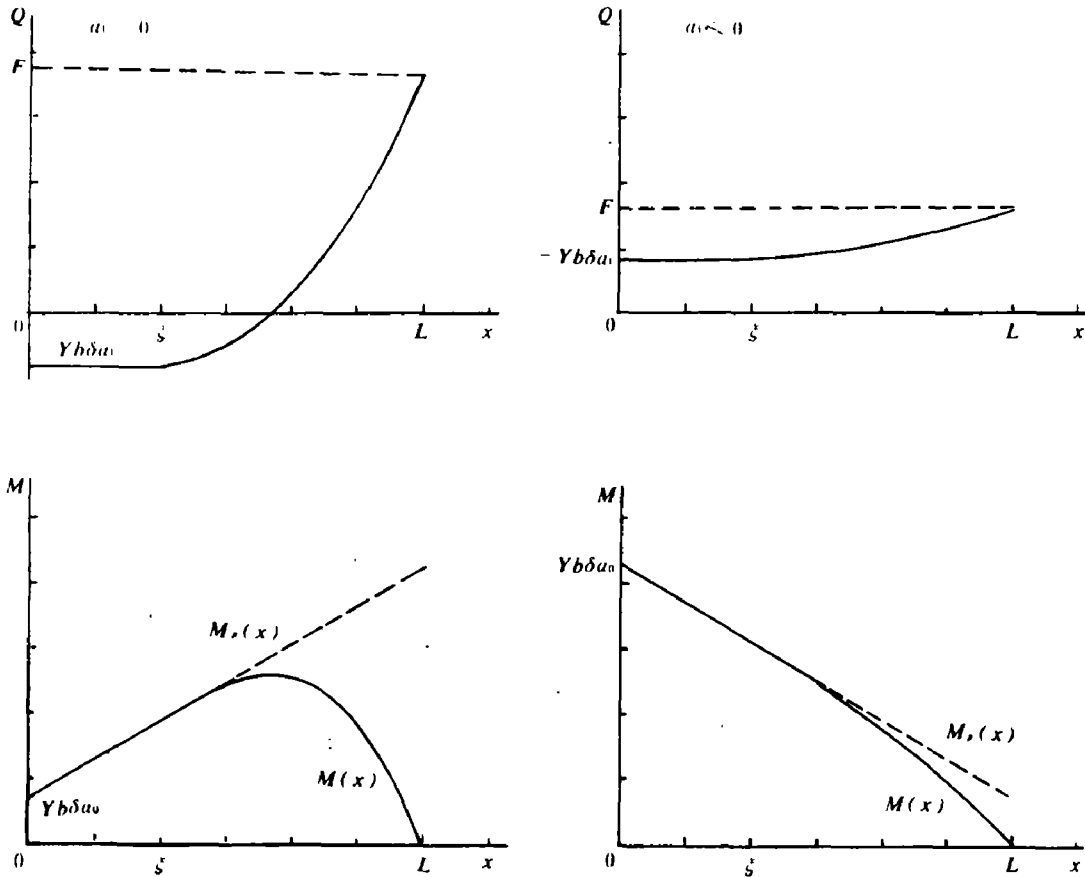


图 3

### 3. 机构演变过程

(1) 铰在梁中间某处,  $\xi$  满足  $0 < \xi < l$ , 由 (13) 式得

$$0 < \frac{Fl - Yb\delta(2la_1 + 3a_0)}{F + Yb\delta a_1} < l \quad (15)$$

根据(15)式及  $h(l) = la_1 + a_0 > 0$ , 可以证明

$$F + Yb\delta a_1 > 0$$

所以从(15)式得到

$$F > \frac{Yb\delta(2la_1 + 3a_0)}{l} = F_2$$

当  $F \rightarrow F_2$  时,  $\xi \rightarrow 0$ ; 又由(13)式看出当  $F \rightarrow \infty$  时,  $\xi \rightarrow l$ 。所以, 当  $F_2 < F < \infty$  时, 在梁中间某处形成一个固定铰。

(2) 铰在梁根部

当  $F < F_2$  时, 可以在根部 A 形成一个固定铰, 在(12)式的第一式中令  $\xi = 0$ , 有

$$\dot{V} = \frac{3(Fl - Yb\delta a_0)}{ml^2} \quad (16)$$

为实现该机构, 必须  $\dot{V} > 0$ , 从(16)式可以推出

$$F > Yb\delta a_0/l = F_1$$

$F_1$  就是此悬臂梁的(静)塑性极限载荷。又根据(3)式

$$\left. \frac{dM}{dx} \right|_{x=0} < \left. \frac{dM_p}{dx} \right|_{x=0}$$

得到  $F < F_2$ 。

综上所述我们有: 当  $0 < F < F_1$  时, 全梁保持刚性, 不运动; 当  $F_1 < F < F_2$  时, 在根部成铰; 当  $F_2 < F < \infty$  时, 在梁中间某点成铰。

成铰位置  $\xi$  与载荷大小  $F$  的关系见图4。

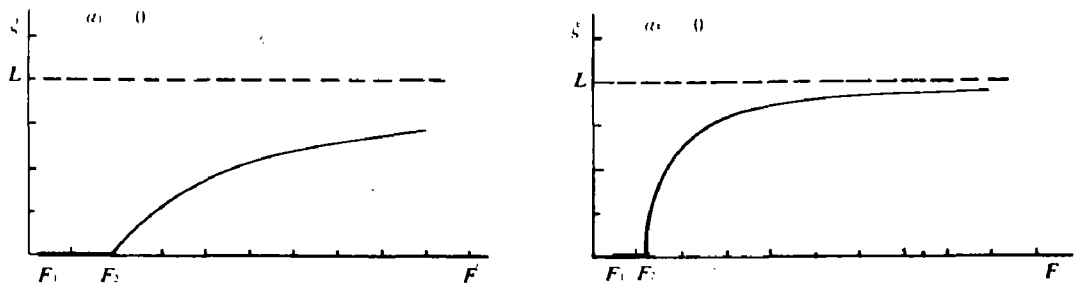


图 4

#### 四、变矩形截面梁举例

图5中悬臂梁横截面为矩形, 高度  $h$  是常数, 宽度  $b$  沿梁长方向线性变化

$$b(x) = \beta_1 x + \beta_0 \quad (17)$$

则极限弯矩也沿梁长方向线性变化

$$M_b(x) = \frac{1}{4} Y H b(x) = \frac{1}{4} Y H (\beta_1 x + \beta_0) \quad (18)$$

设体密度为  $\rho$ , 则线密度

$$m(x) = \rho h b(x) = \rho h (\beta_1 x + \beta_0) \quad (19)$$

如果自由端受到阶跃载荷  $F$  的作用, 根据 (4)、(5)、(6)、(19) 式有

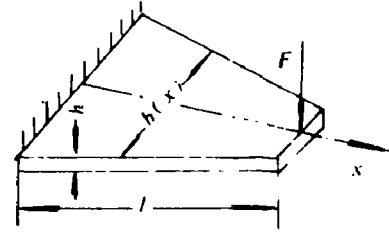


图 5

$$M(x) = \begin{cases} F(l-x) - \frac{1}{12} \rho h \dot{V} (l-\xi) [\beta_1 (3l^2 + 2l\xi + \xi^2 - 2x(2l+\xi)) + 2\beta_0(2l+\xi - 3x)] & 0 < x < \xi \\ F(l-x) - \frac{1}{12} \rho h \dot{V} \frac{(l-x)^2}{l-\xi} [\beta_1 (3l^2 + 2lx + x^2 - 2\xi(2l+x)) + 2\beta_0(2l+x - 3\xi)] & \xi < x < l \end{cases} \quad (20)$$

$$Q(x) = \begin{cases} F - \frac{1}{6} \rho h \dot{V} (l-\xi) [\beta_1 (2l+\xi) + 3\beta_0] & 0 < x < \xi \\ F - \frac{1}{6} \rho h \dot{V} \frac{l-x}{l-\xi} [\beta_1 (2(l^2+lx+x^2) - 3\xi(l+x)) + 3\beta_0(l+x - 2\xi)] & \xi < x < l \end{cases} \quad (21)$$

仿前例步骤解得

$$\xi = \frac{-(2H\beta_1\beta_0 + Hl\beta_1^2 + 4F\beta_0) + (l\beta_1 + \beta_0)R}{\beta_1(H\beta_1 + 4F)} \quad (22)$$

$$\dot{V} = \frac{3\beta_1(H\beta_1 + 4F)^3}{2\rho h(l\beta_1 + \beta_0)^3 [4H^2\beta_1^2 + 28HF\beta_1 + 16F^2 + (H\beta_1 - 4F)R]} \quad (23)$$

其中:  $H = YH$ ,  $R = (16F^2 - 8HF\beta_1 - 2H^2\beta_1^2)^{1/2}$ .

同样仿前例可以证明, 该解是刚塑性完全解。

类似的分析还可以给出机构演变过程: 当  $0 < F < F_1$  时, 全梁保持刚性, 不运动; 当  $F_1 < F < F_2$  时, 在根部成铰; 当  $F_2 < F < \infty$  时, 在梁中间某点成铰。其中

$$F_1 = \frac{YH^2\beta_0}{4l}, \quad F_2 = \frac{YH^2(3l^2\beta_1^2 + 8l\beta_1\beta_0 + 6\beta_0^2)}{4l(l\beta_1 + 2\beta_0)}$$

## 五、变矩形截面梁受冲击载荷举例

图 5 悬臂梁自由端附有集中质量  $G$ , 初始时刻具有  $y$  方向的速度  $V_0$ 。

设在时刻  $t$ , 一个移行铰运动到  $x = \xi$ , 梁自由端速度  $V = V(t)$ , 则由 (4) 可以推出

$$\dot{v}(z) = \frac{z-l}{(l-\xi)^2} V \dot{\xi} + \frac{z-\xi}{l-\xi} \dot{V}, \quad \xi \leq z \leq l \quad (24)$$

将(24)式代入(5)、(6)式,并把(5)、(6)式中 $F$ 改为 $-G\dot{V}$ ,再根据(7)式可解出

$$\dot{V} = \frac{g_1(\xi)}{g(\xi)} \quad (25)$$

$$\dot{\xi} = \frac{g_2(\xi)}{\rho h V g(\xi)} \quad (26)$$

其中

$$g_1(\xi) = -3YH(3\beta_1^2\xi^2 + 2l\beta_1^2\xi + 8\beta_1\beta_0\xi + l^2\beta_1^2 + 4l\beta_1\beta_0 + 6\beta_0^2)$$

$$g_2(\xi) = -3YH[12G(l\beta_1 + \beta_0) + \rho h(l-\xi)(\beta_1^2\xi^2 + 2l\beta_1^2\xi + 4\beta_1\beta_0\xi + 3l^2\beta_1^2 + 8l\beta_1\beta_0 + 6\beta_0^2)]$$

$$g(\xi) = 2(l-\xi)[6G(3\beta_1\xi + l\beta_1 + 4\beta_0) + \rho h(l-\xi)(\beta_1^2\xi^2 + 4l\beta_1^2\xi + 6\beta_1\beta_0\xi + l^2\beta_1^2 + 6l\beta_1\beta_0 + 6\beta_0^2)]$$

(25)和(26)两式相除再积分可得

$$V = -\frac{36YHGV_0(l\beta_1 + \beta_0)}{g_2(\xi)} \quad (27)$$

类似Parkes问题[1],由(25)、(26)、(27)式还可解出响应时间、移行铰运动规律、最终位移等。

可以证明该解满足刚塑性完全解的各个条件。

作为讨论,我们可以看出在变矩形截面梁的两个例子中,如果自由端宽度 $b(l) = l\beta_1 + \beta_0 = 0$ ,即自由端是尖的,那么由(22)式知(当 $F > F_c$ 时) $\xi = l$ ,即固定铰成在自由端,由(27)式看出 $V \equiv 0$ ,即积分是奇异的,这说明理想的尖端是无法传递能量的。

## 六、结 论

1.如果梁是变截面的,那么当它受到阶跃载荷或冲击载荷时,不仅极限弯矩分布不均匀,惯性力的阶数要高一些,更重要的是,成铰处的剪力可以不为零。本文的分析,拓广了人们从等截面直梁的分析建立起来的塑性铰的概念。关于拉一弯、弯一扭等复合应力状态下的广义塑性铰,曾由余同希等人讨论过文献[3、4],其概念与本文是一致的。

2.由三个例子可以看出,对于沿梁长方向截面大小单调变化的情况,如果自由端截面小,则全梁剪力不变号,弯矩是单调变化的;如果自由端截面大,则剪力变号一次,弯矩在梁中间某点达到极值,而这一点并不是塑性铰所在的位置。

## 附 录

证明  $0 \leq M(x) \leq M_p(x), \xi \leq x \leq l$ .

根据(10)、(14)式可知  $\frac{d^2 M}{dx^2} < 0$ ,即  $\frac{dM}{dx}$  单调下降,而

$$\left. \frac{dM}{dx} \right|_{x=l} = -F < 0, \quad \left. \frac{dM}{dx} \right|_{x=\xi} = Y b \delta a_1$$

当  $a_1 < 0$  时一定有  $\frac{dM}{dx} < 0$ , 即  $M(x)$  单调下降, 所以  $M(x) \geq M(l) = 0$ 。当  $a_1 > 0$  时,  $M(x)$  在  $\xi < x < l$  中某点取唯一极大值, 所以

$$M(x) \geq \min_{\xi < x < l} M(x) = M(l) = 0$$

令  $F(x) = M(x) - M_b(x)$ , 则有  $F(\xi) = F'(\xi) = 0$  而  $F''(x) = \frac{d^2 M}{dx^2} < 0$ , 所以  $F'(x)$  单调下降, 可知

$$F'(x) < F'(\xi) = 0$$

于是  $F(x)$  单调下降, 有  $F(x) < F(\xi) = 0$ 。

综上所述我们有  $0 < M(x) < M_b(x)$ 。

#### 参 考 文 献

- [1] Parkes, E. W., The permanent deformation of a cantilever struck transversely at its tip, *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 228, (1955), 462.
- [2] Johnson, W., *Impact Strength of Material*, Edward Arnold, London, 1972, Ch. 6.
- [3] Yu, T. X., Johnson, W., *Advances in Aerospace Structures and Materials—1*, eds. Wang, S. S., Renton, W. J., ASME, (1981), 175-180.
- [4] 余同希, 华云龙, 弯扭联合作用下梁对突加载荷的塑性动力响应, *振动与冲击*, (3)(1986), 1.

## THE PLASTIC HINGE IN BEAMS OF VARIABLE CROSS-SECTION UNDER INTENSE DYNAMIC LOADING

Zhou Qing Yu Tongxi

#### Abstract

The dynamic plastic response of rigid-perfectly plastic beams to intense dynamic loading is studied. It is shown that in beams of variable cross-section the shear force at the plastic hinge may not be equal to zero in general. Examples are given for both cases of step-loading and impulsive loading.