

# 惰性介质中拉氏量计的 简单分析方法

白春华

本文提出了对惰性介质中拉氏量计结果的二种简单分析方法,其中包括简单波区的分析方法和复合波区的分析方法。它们分别基于一个截面上的一个和二个量的测量结果,通过简单计算,即可以得到该截面上质点速度、压力、比容、比内能等量的变化历史。与拉格朗日分析方法比较表明:本文的分析方法对于计算惰性介质质点运动状态具有简单性,而且具有较好的计算精度。

## 一、引言

在一九七〇年, Fowles 和 Williams<sup>[1]</sup>首先提出了分析一组拉格朗日量计测量结果的方法,即拉格朗日分析方法。后来通过 Cowperthwaite<sup>[2]</sup>, Grady<sup>[3]</sup>及 Seaman<sup>[4]</sup>等人的发展,使这种方法不断完善。到目前为止,这种方法已广泛应用到惰性介质<sup>[4,5]</sup>和反应介质<sup>[6,7]</sup>的冲击波作用过程。Seaman<sup>[4]</sup>对这种方法在惰性介质中应用已做了较全面论述,在惰性介质中与在反应介质中一样,都须引入联系几个截面实验结果的径线(Pathline),它是人为地在几条实验曲线上取相应点而构成的。通过沿这些径线求微分,才可对不定常方程进行积分从而求出其它各量。在一些情况下,惰性介质中的流场比反应介质中的流场更简单,例如:有时可把惰性介质中的流场看成是等熵流场,等等。这时,应用拉格朗日分析方法将会带来误差。

本文提出了一种简单分析冲击波后惰性介质中拉氏量计结果的方法。这种方法基于一个截面上的拉氏量计的测量结果,通过简单计算即可得到该截面上速度、压力、比容和比内能等量的变化历史。本文分别对简单波区和复合波区两种方法进行了描述,并与拉格朗日分析方法进行了比较。

## 二、简单波区的分析方法

在材料性能研究中,经常会采用飞片实验方法。这时,埋入被测材料中的拉氏量计将会记录到这样一种质点状态变化历史,即前面是一个均匀区,随后是一个简单波区,再后是复合波区。假设一个压力计(速度计也一样)的记录结果如图1所示。 $ab$ 段为均匀区状态, $bc$ 段为简单波区的状态,这里没有考虑复合波区。我们首先假设:惰性介质受冲击波作用后的流场为等熵流场。并且假设图1记录的是质点 $j$ 状态变化过程, $d$ 、 $e$ 分别为质点 $j$ 在 $t$ 时刻和 $t_{i+1}$ 时刻的状态点。图中引入的 $f$ 点满足下面条件。即 $f$ 点的压力与 $e$ 点压力相等, $f$ 点



这里, 此式表示的是质点  $j$  状态从  $d$  到  $e$  间断跳跃满足的关系式。当把时间步长取得足够小时, 假想的间断面传播速度近似满足下式<sup>[8]</sup>

$$D_i = \frac{1}{2}(u_i + c_i + u_{i+1} + c_{i+1}) \quad (5)$$

其中, 声速  $c_{i+1}$  由下式确定

$$c_{i+1} = \sqrt{\frac{p_{i+1} - p_i}{\rho_{i+1} - \rho_i}} \quad (6)$$

这样, 当已知一个量的拉氏量计的测量结果 (压力或速度) 时, 由 (4)、(5)、(6) 式从初始点出发即可求解其它量 (包括  $\rho$ 、 $E$ 、 $c$  及  $u$  或  $p$ ) 的变化历史。我们把初始点定义在冲击波阵面上, 冲击波阵面上状态的确定是比较容易的。例如: 可用一种改进的电磁速度计同时测得质点速度历史和冲击波速度及阵面上质点速度<sup>[9]</sup>, 再进一步计算, 就可得到冲击波阵面上的其它各量。

Seaman<sup>[4]</sup> 利用拉氏分析方法研究了飞片撞击砂石时, 冲击波后介质质点状态变化过程, 并得到了质点压力 ( $p$ ) 与比容 ( $v$ ) 的关系曲线, 见图 2 所示。在相同条件下, 我们只基于其中一个截面上 (第二个截面) 质点速度实验结果, 用本文的简单分析方法同样也得到了波后简单波区的质点压力和比容的关系 (见图 2)。计算的时间步长为 0.05 微秒, 初始状态为均匀区状态。由图 2 可见, 用本文简单分析方法得到的  $p-v$  曲线基本上介于拉氏分析方法对前驱波两种不同处理方法所得到的结果之间, 这说明用本文的简单分析方法计算简单波区的质点状态具有较好的精度。

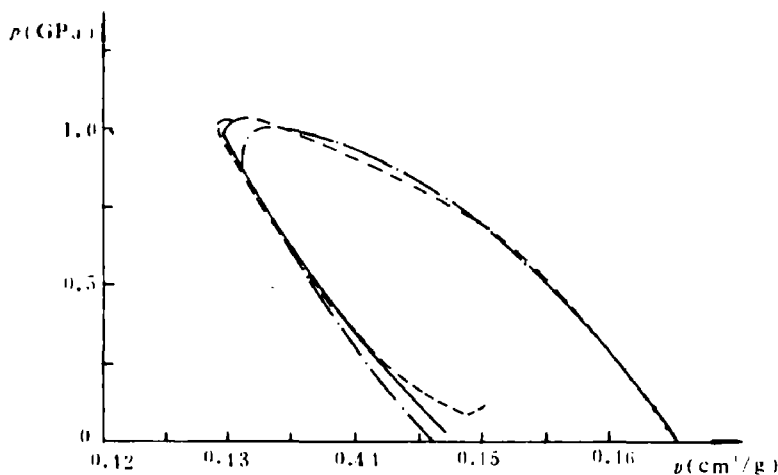


图2 简单波区方法与拉氏分析方法比较  
--- 文献[4]解 —·— 文献[4]解 —— 本文解。

### 三、复合波区的分析方法

复合波流场是实际中更常见的情况。在通常的隔板实验中, 埋入被测材料中的拉氏量计记录的将是一个复合波区质点状态变化过程。假设图 3 中两条曲线是由拉氏量计测得的复合波区质点速度 ( $u$ ) 和压力 ( $p$ ) 两个量的变化历史。这里仍把冲击波后流场看成是等熵流场。

在图中两条曲线上的相同标记点代表同一质点  $j$  同一时刻的压力和速度状态点，即  $d$  和  $e$  分别代表  $t_i$  时刻和  $t_{i+1}$  时刻质点  $j$  的速度和压力点。这里引入的  $f$  点有两个量（压力和速度）与  $e$  点相等， $f$  点的时间与  $d$  点相等，我们仍把这样得到的  $f$  点定义为质点  $j+1$  在  $t_i$  时刻的状态点。因为复合波区有

$$\left. \begin{aligned} \text{沿 } \frac{dx}{dt} = u + c, \quad u + \int \frac{dp}{\rho c} = a \\ \text{沿 } \frac{dx}{dt} = u - c, \quad u - \int \frac{dp}{\rho c} = \beta \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

这里， $a$  和  $\beta$  是变化的，但在等熵条件下，若已知两个点速度 ( $u$ ) 和压力 ( $p$ ) 相等，由上式可知：这两点其它量也相等。因此， $e$ 、 $f$  两点状态是相同的。与上面简单波区推导方法相类似，我们也可以得到复合波区质点  $j$  状态由  $d$  到  $e$  的间断跳跃也满足关系式 (4)。在 (4) 式中的三个方程中，由实验可以得到两个量，即速度  $u$  和压力  $p$ 。这时，依 (4) 式从初始点出发，即可逐步计算出该质点的比容和比内能等量的变化历史。这里的初始状态仍定义在波阵面上，由实验测得的压力和速度结果的前沿量及冲击波关系式，即可确定初始点状态。

Seaman<sup>[4]</sup> 还用拉氏分析方法得到了用隔板实验持续加载多孔铝时，复合波流场中压力 ( $p$ ) 与比容 ( $v$ ) 的关系曲线，见图 4 所示。我们把他得到的第二个截面上质点速度和压力历

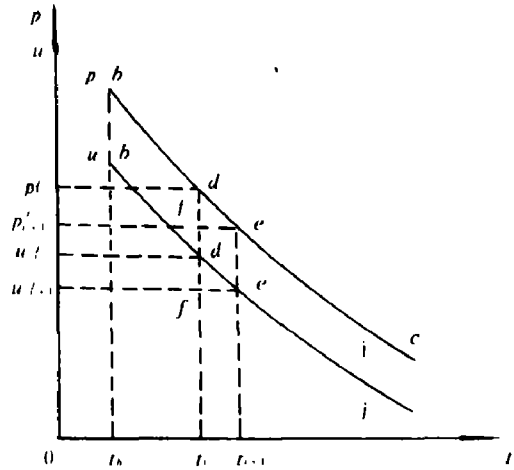


图3 复合波区分析方法示意图

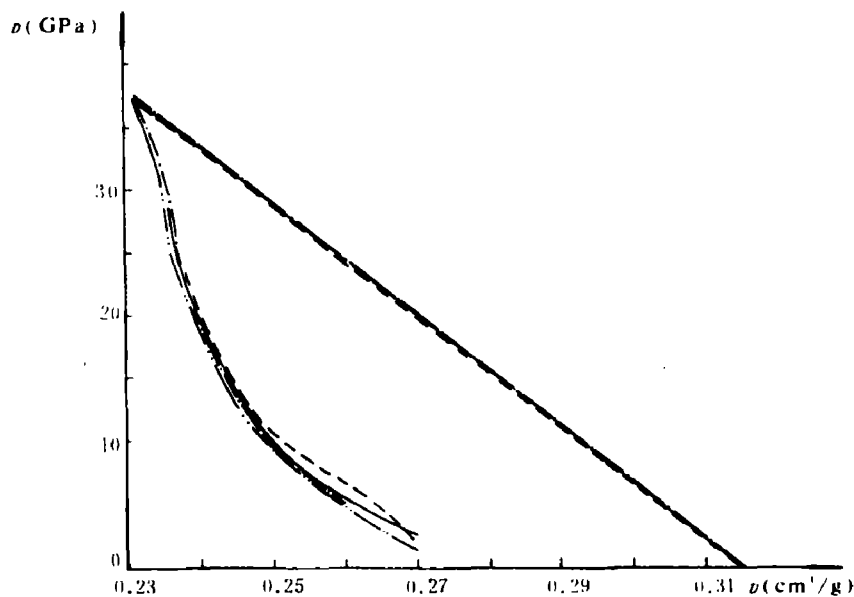


图4 复合波区方法与拉氏分析方法比较

—·— 1 截面文献 [4] 解    - - - 2 截面文献 [4] 解    - · - · - 3 截面文献 [4] 解    — 2 截面本文解

史作为本文简单分析方法的已知条件。计算的时间步长取为0.05微秒，初始状态为波阵面上状态，计算得到的压力( $p$ )与比容( $v$ )的曲线见图4所示。把两种方法所得的结果相比较，使我们看到：两种方法所得结果很接近，在开始一段符合很好，在压力衰减百分之五十范围内，最大相对误差小于百分之五。

#### 四、其它几个问题讨论

##### 1. 用解析解验证简单波区的分析方法

假设某种介质满足下面形式的状态方程

$$p = c_0^2 (\rho - \rho_0) + (\gamma - 1) \rho e \quad (8)$$

其中， $\rho_0$ 、 $c_0$ 为常态下的密度和声速。介质的状态参数 $\gamma$ 由下式确定<sup>[8]</sup>

$$\gamma = 4\lambda - 2(1 - \rho_0/\rho)\lambda^2 - 1 \quad (9)$$

其中， $\lambda$ 为冲击波实验关系式( $D = c_0 + \lambda u$ )的参数。在简单波区，由状态方程(8)式可得到质点压力( $p$ )和速度( $u$ )满足下面解析式

$$p = \left[ \frac{u - u_0}{2c_a/(\gamma - 1)} + 1 \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}} \left( \frac{\gamma p_a + \rho_0 c_0^2}{\gamma} \right) - \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \quad (10)$$

其中， $p_a$ 、 $c_a$ 为冲击波阵面上的压力和声速， $\gamma$ 由冲击波阵面上状态来确定。把石蜡作为一个例子进行计算，其初始参数为 $\rho_0 = 0.9 \text{ g/cm}^3$ ， $c_0 = 2.96 \text{ km/s}$ ， $\lambda = 1.53$ 。当任给一条质点速度变化历史( $u-t$ )时，依(10)式即可求出相应的质点压力历史( $p-t$ )，见图5“1”线所示。再假设介质状态方程未知，我们基于同一条质点速度历史，且从相同初始状态出发，用本文简单波区的分析方法进行计算，时间步长为0.1微秒，所得压力历史见图5中“2”线所示。“1”线和“2”线比较表明：在2微秒时间内，最大相对误差为1.5%。且由图还看出：误差由小变大，这是因为间断跳跃计算过程与实际连续变化过程的误差随计算次数增加而积累产生的。

##### 2. 时间步长对计算精度的影响

正如前面所说，用本文这种间断跳跃

关系式计算时，将会带来误差。下面我们来考查跳跃幅度，即时间步长对计算结果的影响情况。图5中“2”线是由时间步长取为0.1微秒时的结果，与解析解相比，具有很好的精度。当我们把时间步长取为0.4微秒时，依本文这种简单方法计算得到的压力历史曲线见图5中“3”线所示。在2微秒时间内，与解析解相比，最大相对误差为5.1%，这说明：在其它条件不变条件下，取小步长可提高计算精度。

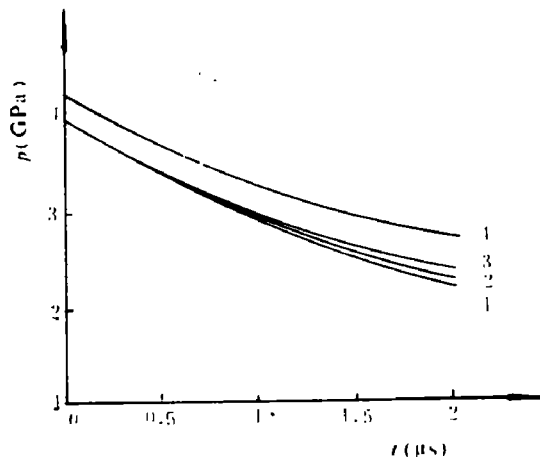


图5 简单波区方法讨论

1. 解析解 2. 本文解  
3. 扩大步长解 4. 摄动解

### 3. 稳定性

由于本文提出的这种简单分析方法是建立在实验拉氏量计结果基础之上的。在实验测试中,系统和随机误差在所难免。因此,有必要讨论本文的方法对实验数据扰动的稳定性。图5中的“4”线是把已知的输入质点速度曲线向上摄动百分之五之后得到的结果,把这条曲线与不扰动的“2”线比较,可以看到:两条曲线基本上是平行的。2微秒时间内,压力绝对误差从0.24 GPa到0.46 GPa变化。下表1是复合波区分析方法对文献<sup>[4]</sup>中实验数据四种不同摄动情况所得的结果。从结果中可看到:这种方法对于四种摄动具有较好的稳定性。因此,可以得到结论:本文这种对拉氏量计结果的分析方法对于实验中仪器、装置及数据处理等产生的系统误差及随机误差带来的扰动仍能得到稳定的结果。

表1 复合波区分析方法摄动解

|          |                  | 不 摄 动  |        | 压力向上摄动<br>5%(速度不变) |        | 速度向下摄动<br>5%(压力不变) |        | 压力向上摄动5%<br>速度向下摄动5% |        |
|----------|------------------|--------|--------|--------------------|--------|--------------------|--------|----------------------|--------|
| <i>v</i> | 最大、最小值<br>(cm/g) | 0.2336 | 0.2619 | 0.2376             | 0.2646 | 0.2412             | 0.2672 | 0.2448               | 0.2697 |
|          | 最大、最小<br>绝对误差值   |        |        | 0.004              | 0.027  | 0.053              | 0.076  | 0.078                | 0.0112 |
| <i>E</i> | 最大、最小<br>值(kJ/g) | 1.46   | 1.10   | 1.462              | 1.1026 | 1.328              | 1.006  | 1.329                | 1.007  |
|          | 最大、最小<br>绝对误差值   |        |        | 0.002              | 0.0026 | 0.094              | 0.132  | 0.093                | 0.131  |

注:“绝对误差值”是相对于不摄动结果。

本文工作曾得到丁敏、梁云明、朱建上、李维新、黄正平、赵衡阳、沈石的指导和帮助,在此表示衷心感谢。

### 参 考 文 献

- [1] Fowles, R., Williams, R. F., *J. Appl. Phys.*, **41**(1) (1970), 360.
- [2] Cowerthwaite, M. et al., *J. Appl. Phys.*, **42** (1) (1971), 456.
- [3] Grady, D. E., *J. Geophys. Res.*, **78**(8) (1973), 1299.
- [4] Seaman, L., *J. Appl. Phys.*, **45**(1974) 4303.
- [5] 孙孝兰, 对一维有机玻璃粒子速度测量波形的拉格朗日分析, *爆炸与冲击*, **5** (4) (1985), 45.
- [6] Cowerthwaite, M., Rosenberg, J. T., *UCRL-13760*, (1979), 7.
- [7] Jiao, Q., Ding, J. et al., 8th Inte. symp. Detonation Preprint, Vol. 1, (1985), 509.
- [8] 李维新, 一维不定常流动与冲击波, 私人通信, (1983).
- [9] 梁云明, 直接测量物质的状态方程——电磁法改进, *力学学报*, **15** (3) (1983).

**A SIMPLE AND CONVENIENT ANALYTICAL  
METHOD FOR LAGRANGE GAUGE RECORDS  
IN INERT MEDIUM**

Bai Chunhua

**Abstract**

In this paper, we have developed a simple and convenient analytical method for Lagrange gauge records in inert medium. This method is suitable both for the simple wave region and the complex wave field. On the basis of the Lagrange gauge records at only one section, we can easily obtain the histories of the particle, velocity, pressure, specific volume and specific internal energy. The comparison with the method of usual Lagrange analysis shows that the method is convenient and accurate in calculating the histories of particle variables in inert medium.