

拉断后射流对钢靶的随机侵彻*

丁雁生

(中国科学院力学研究所)

摘要 聚能破甲弹的金属射流断裂后发生径向随机发散, 导致破甲深度显著下降。本文分析了径向随机发散的规律, 得出描述拉断后射流对钢靶随机侵彻深度的一阶非线性常微分方程, 并给出了大炸高条件下的简化解。

关键词 聚能装药; 侵彻; 随机过程; 拉断射流; 钢靶。

为了充分发挥聚能破甲弹对钢靶的侵彻能力, 要选择一个适当的炸高, 以求射流延伸得尽可能长。通常, 在这样的炸高下, 侵彻后期射流已经拉断。因此, 估算侵彻深度需要研究拉断后射流的侵彻规律。另外, 近年来出现了间隙装甲, 估算聚能破甲弹对这种靶板的侵彻深度也需要考虑拉断后射流的侵彻。

改变炸高 H 时, 侵彻深度 P_{max} 的变化如图 1 所示。炸高较小时, 侵彻深度与炸高成正比, 这可以用不可压缩流体理论解释; 炸高较大时, 侵彻深度增长比正比律慢, 这可用拉断后射流侵彻的不定常效应^[1]解释; 当炸高超过一定值后, 侵彻深度大幅度下降, 以至射流丧失了侵彻能力。本文尝试应用郑哲敏同志在一九八一年底的报告中所阐述的随机走动 (*Random Walk*) 处理拉断后射流侵彻问题的想法, 分析拉断后射流对钢靶的侵彻深度, 特别是大炸高条件下侵彻深度大幅度下降的现象。

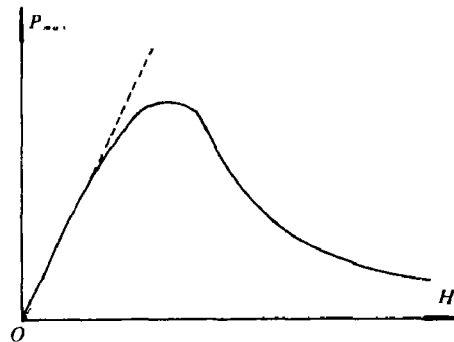


图 1 穿深—炸高曲线示意图

一、现象与模型

聚能破甲弹形成的金属射流在自由飞行中不断伸长并逐步拉断^[2,4]。从高速摄影、闪光 X

1987年12月24日收到原稿。*本文于1983年12月完成。

射线摄影和改变炸高的破甲试验中观察到以下有关拉断后射流运动及侵彻的重要现象^[3]。

1. 拉断后射流颗粒沿弹的轴向作匀速运动,即射流颗粒的轴向速度 u_j 是逐渐下降的。就一号试验弹而言,相邻颗粒速度差的平均值约为0.1公里/秒,颗粒总数近六十。
2. 射流颗粒在飞行中长度不变,所有拉断后颗粒长度之和即射流最大长度。
3. 炸高很大时,拉断射流不能命中靶板同一位置,而是散乱地击中破甲弹轴线附近的靶板,其发散的半锥角小于 2° 至 3° 。

由此估计拉断后射流侵彻钢靶有两个特点:第一,不定常效应;第二,命中点随机发散的影响。本文引用对连续射流定常侵彻作不定常修正的模型^[1]处理前一特点,采用径向随机发散模型处理后一特点。径向随机发散模型可以概括为:射流颗粒沿轴向作匀速运动;由于药型罩、装药的不对称性、射流颗粒在飞行中空气动力特性的不对称性,使得射流颗粒发生径向随机位移。于是,不同射流颗粒不能命中靶板同一位置,导致拉断后射流对钢靶的侵彻深度与连续射流相比显著下降。

二、问题的提法与基本假设

采用径向随机发散模型计算拉断后射流侵彻钢靶的深度,需要解决以下三个问题

1. 如何描写一个射流颗粒在空气中自由飞行时产生的径向随机发散;
2. 如何估计一个射流颗粒随机命中靶板时对穿深的贡献;
3. 如何计算多个射流颗粒随机侵彻钢靶对穿深的总贡献。

为了进行定量讨论,提出如下基本假设

- (1) 射流颗粒自拉断处起即以某一平均速度 v 沿径向随机偏离轴线,该颗粒轴向速度为 u_j 时,其偏离轴线的半锥角 $\alpha=v/u_j$ 。
- (2) 射流颗粒的径向随机位移与柱坐标的 θ 角无关。
- (3) 射流颗粒只有径向随机位移,不计其翻转、卷曲运动。
- (4) 一个射流颗粒的穿深可用连续侵彻公式计算,但要引进侵彻系数 η 作不定常效应修正^[1]。
- (5) 在前边飞行的射流颗粒的随机发散对后续射流的随机发散没有影响。

三、关于拉断后射流侵彻深度的微分方程

取一柱坐标系,对称轴 Z 与聚能破甲弹轴线重合,方向与射流飞行方向一致,原点在装药底平面上。爆震波到达装药底面时,时间 t 为零。

图2在 $t-Z$ 平面上描述了射流侵彻钢靶的概况。射流的轴向运动,在图2中用一族直线方程

$$Z = u_j t + b(u_j) \quad (u_{jmin} \leq u_j \leq u_{jmax}) \quad (1)$$

表示。射流拉断位置用 $Z_b(t)$ 曲线标出,其参数形式为

$$\left. \begin{aligned} Z_b &= Z_b(u_j) \\ t_b &= t_b(u_j) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

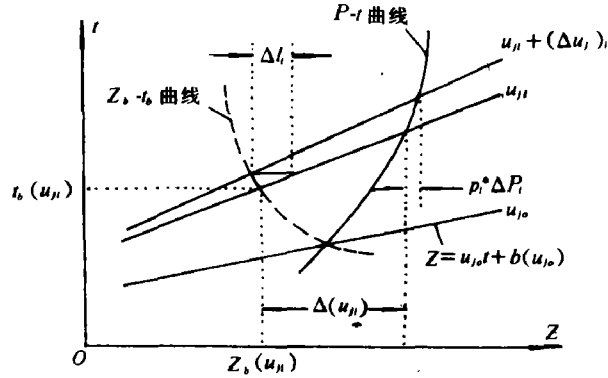


图 2 $t - Z$ 图

式中 Z_b 是速度为 u_j 的射流微元开始拉断的位置, t_b 为该微元开始拉断的时间。当给定相邻颗粒轴向速度差 $(\Delta u_j)_i$ 时, 第 i 个颗粒的长度 $(\Delta l)_i$ 为

$$(\Delta l)_i = - \left[t_b(u_{j1}) + \left(\frac{db}{du_j} \right)_i \right] (\Delta u_j)_i \quad (3)$$

式中 $(\Delta u_j)_i < 0$ 。

由假设 (4), 第 i 个颗粒命中靶板时的侵彻深度 $(\Delta P)_i$ 为

$$(\Delta P)_i = \eta \frac{u_i}{u_{j1} - u_i} (\Delta l)_i \quad (4)$$

式中 u_i 为第 i 个颗粒侵彻钢靶的孔底速度。当采用不可压缩流体侵彻理论时, $u_i - u_{j1}$ 满足下式

$$\frac{u_i}{(u_{j1} - u_i)} = \sqrt{\rho_i / \rho_j} \quad (5)$$

式中 ρ_j 、 ρ_i 分别表示射流和靶板密度。若需考虑靶板强度, $u_i - u_{j1}$ 关系可取相应的形式^[1,3]。

射流对钢靶的侵彻过程在图 2 用穿深—时间曲线 $P(t)$ 表示。由于有 (1) 式, $P(t)$ 曲线亦可用 $P(u_j)$ 描写。图 2 中 $Z_b - t_b$ 曲线与 $P-t$ 曲线的交点对应于拉断后射流侵彻的起点, 其速度记作 u_{j0} , 侵彻深度 $P(u_{j0})$ 记作 P_0 , 侵彻速度记作 u_0 。本文讨论 $u_j \leq u_{j0}, P(u_j) > P_0$, 即拉断后射流侵彻的情况。

在假设 (1)、(2) 成立时, 运用概率论推知, 射流颗粒在空气中自由飞行时的径向发散服从正态分布, 并求得轴向速度为 u_j 的颗粒有效命中孔底平面上 $r \leq R^*$ 域的概率 $p^*(u_j)$ 为

$$p^*(u_j) = 1 - \exp \left\{ - \frac{a^2(u_j)}{\Delta^2(u_j)} \right\} \quad (6)$$

式中 $\Delta(u_j)$ 为该颗粒自拉断到命中孔底的飞行距离; $a(u_j) = R^* / \sqrt{2} \alpha(u_j)$, 而 $\alpha(u_j)$ 为该颗粒偏离轴线的半发散角, R^* 为有效命中域半径。

在假设 (3)、(4)、(5) 成立时, 拉断射流侵彻深度 $P(u_j)$ 满足下述一阶常微分方程 (推导见附录)。

$$\frac{dP}{du_j} + \eta \frac{u}{u_j - u} \left[t_b(u_j) + \frac{db}{du_j} \right] p^*(u_j) = 0 \quad (7)$$

$$(u_j \leq u_{j0}, \quad P(u_j) \geq P_0)$$

式中 $p^*(u_j)$ 按 (6) 式计算。该方程表明, $P(u_j)$ 与射流参数 b 、 t_b 、反映连续侵彻特性的孔底速度 $u(u_j)$ 、反映拉断侵彻特性的参数 η 、 α 及拉断射流由形成至孔底的飞行距离 $\Delta(u_j)$ 等六个物理量有关。当已知射流速度分布和拉断位置曲线时, 其中 η 、 $\alpha(u_j)$ 两参数可由同种弹、同种靶, 不同炸高的 $P-t$ 曲线利用 (6)、(7) 式推算出来。

为了简化计算, 我们用平均半发散角 α^* 代替 $\alpha(u_j)$, 亦即假设不同射流颗粒有相同的平均径向偏离速度。这时, 利用两个不同炸高下的侵彻总深度 P_{max} 值就可以定出 η 与 $\alpha^* = R^*/\sqrt{2} \alpha^*$ 。

四、炸高很大时的简化解

考虑炸高很大时聚能破甲弹对均质厚钢靶的侵彻问题, $t-Z$ 图如图 3 所示。这里, 拉断后

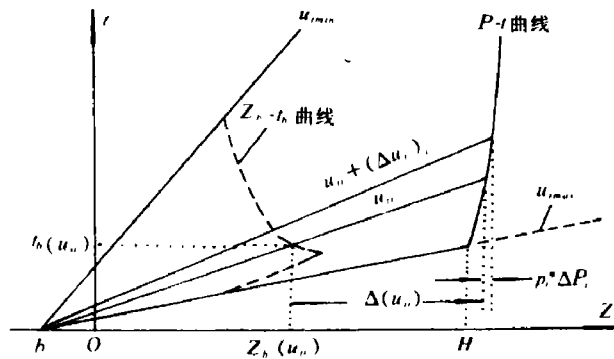


图 3 大炸高情况的 $t-Z$ 图

射流飞行距离 $\Delta(u_j)$ 为

$$\Delta(u_j) = H + P(u_j) - Z_b(u_j) \quad (8)$$

炸高很大时有 $H \gg P(u_j)$, H 比 $Z_b(u_j)$ 随 u_j 变化而波动的值大许多。所以, (8) 式中 $P(u_j)$ 项可以忽略, $Z_b(u_j)$ 项可用常数 Z_b^* 代替, 即 $Z_b(u_j) \approx Z_b^*$ 。于是, (6) 式改写为

$$p^*(u_j) = 1 - \exp \left\{ - \left[\alpha^* / (H - Z_b^*) \right]^2 \right\} \equiv p^* \quad (9)$$

此式表明, 在炸高很大时不同射流颗粒命中 R^* 域的概率近似相同, 均为 p^* 。

另外, 炸高很大时射流在碰靶前已经全部拉断, 亦即 $u_{j0} = u_{max}$ 。

若采用不可压缩流体模型的 $u-u_j$ 关系 (5), 积分 (7) 式得

$$P_{max} = -\eta p^* \sqrt{\frac{\rho_i}{\rho_t}} \int_{u_{jmax}}^{u_{jmin}} \left(l_b(u_j) + \frac{db}{du_j} \right) du_j$$

由 (3) 式及第一节中指出的实验现象 (2) 知, 积分式

$$- \int_{u_{jmax}}^{u_{jmin}} \left(l_b(u_j) + \frac{db}{du_j} \right) du_j$$

即射流最大长度 L^* 。引进一个新参数 $P_M = \eta \sqrt{\rho_i / \rho_t} L^*$, 则有

$$P_{Max} = P_M \left[1 - e^{-\left(\alpha^* / (H - Z_i^*) \right)^2} \right] \quad (10)$$

这就是炸高很大条件下获得的关于侵彻深度的简化解。

三种实验弹的实验结果及根据 (10) 式绘制的 $P_{max}-H$ 曲线由图 4、5、6 表示, 其 P_M 、 α^* 、 Z_i^* 值列于表 1。

表 1

| 弹 种 | P_M (cm) | α^* (cm) | Z_i^* (cm) |
|-----------|------------|-----------------|--------------|
| 一号弹 | 46 | 63 | 13 |
| 二号弹 (60°) | 39 | 57 | 3 |
| 二号弹 (40°) | 36 | 53 | 3 |

由图 4、5、6 可以看出, 当 $H > Z_i^* + \alpha^* / 2$ 时, 按 (10) 式计算的 $P_{max}-H$ 曲线与实验数据基本相符; 当 $H \leq Z_i^* + \alpha^* / 2$ 时, (10) 式不适用。

对于一号弹, 用速度分布及拉断位置实验数据积分 (3) 式, 算得射流最大长度 $L^* \approx 1030$ 毫米, 由 $P_M = \eta \sqrt{\rho_i / \rho_t} L^*$ 推算 $\eta = 0.45$, 与文献 [1] 估算的 $\eta = 0.4$ 很接近。如果取 $R^* = 10$ 毫米, 则 $\alpha^* \approx 37'$, 这与实验粗测的 α^* 不大于 $2^\circ \sim 3^\circ$ 相近^(*)。

在假设所有射流颗粒长度相等的近似条件下, 由概率论推知穿深 P_{max} 服从正态分布, 其方差 σ^2 可表为

$$\sigma^2 = \frac{1 - P^*}{N p^*} P_{max}^2 \quad (11)$$

式中 N 为参与拉断后侵彻的射流颗粒数, p^* 已如前述。(11) 式的推导见附录。以一号弹为

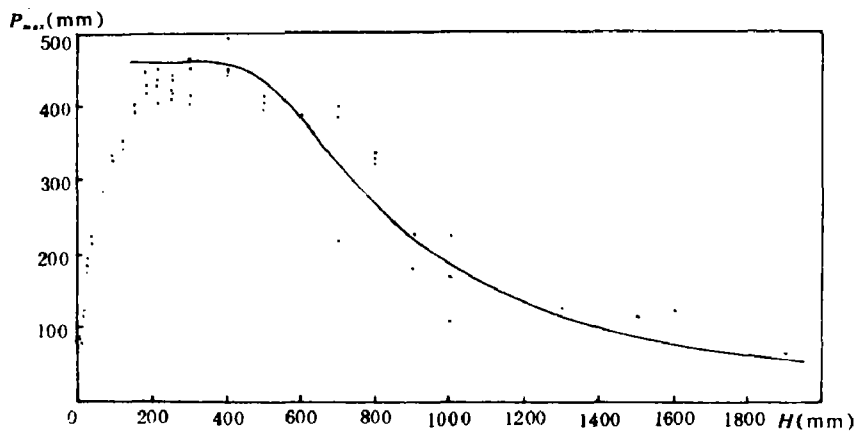
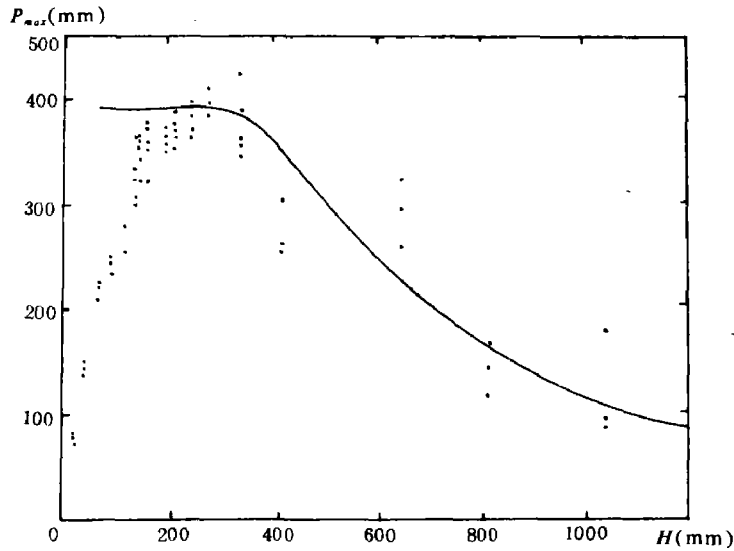
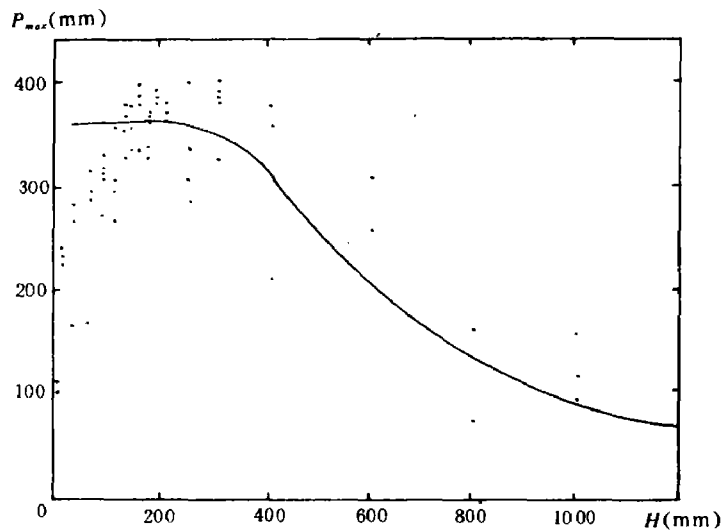


图 4 一号实验弹的穿深—炸高曲线

(*) α^* 实质上是径向随机发散所服从的正态分布的方差。该分布的期望值为零, 故最大半发散角的估计值可取 $3\alpha^*$, 即 $1^\circ 50'$ 。

图5 二号实验弹(60°)的 P_{max} - H 曲线图6 二号实验弹(40°)的 P_{max} - H 曲线

例, 取 $N=50$, 当 $H=1000$ 毫米时, $p^* \sim 0.4$, $\sigma/P_{max} \sim 17\%$, 意即96%的实验点在平均值附近 $\pm 2\sigma/P_{max} \sim \pm 34\%$ 范围内跳动; 当 $H=2000$ 毫米时, $p^* \sim 0.1$, $\sigma/P_{max} \sim 40\%$, 意味着96%的实验点在平均值附近 $\pm 80\%$ 范围内跳动。由此可以理解, P_{max} - H 曲线为什么会有很大的散布。

五、结 论

1. 在炸高很大的条件下给出了计算聚能破甲弹侵彻均质厚钢靶的穿深 P_{max} 的公式

$$P_{max} = P_M \left[1 - e^{-\left(\frac{a^*}{H-Z_0}\right)^2} \right]$$

此式与实验相符，证实采用径向随机发散模型，并假设拉断后射流颗粒的径向随机发散服从正态分布是有根据的；还说明处理不连续侵彻问题，用侵彻系数 η 作不定常效应修正也是成功的。

2. 提出了计算随机侵彻深度 $P(u_j)$ 的一阶常微分方程

$$\frac{dP}{du_j} + \eta \frac{u}{u_j - u} \left[t_b(u_j) + \frac{db}{du_j} \right] \left[1 - e^{-\left(\frac{a^*}{\Delta(u_j)}\right)^2} \right] = 0$$

$$(u_j \leq u_{j0}, \quad P(u_j) \geq P_0)$$

可供计算聚能破甲弹侵彻钢靶及其他金属靶深度时参考。方程中的两个参数 η 和 a^* 的取值有待积累经验。

本工作是根据郑哲敏同志的意见在谈庆明同志指导下进行的。段祝平、刘宝光同志曾提出重要的意见，高举贤、刘小苹、俞善炳等同志参加讨论，吴学贵同志提供了实验数据，特此致谢。

附 录

随机侵彻深度方程的推导及方差估计

附录中的符号、基本假设均见正文。

(一) 一个射流颗粒的径向发散

考察自速度 u_{j0} 向 u_j 减少方向数的第 i 个射流颗粒在空气中运动的情形（正文图 2）。当 $t = t_b(u_{ji})$ 时，第 i 个颗粒刚形成，位于 $Z_b(u_{ji})$ 处的轴线上。该颗粒沿轴向运动 Δ_i 距离于 $t = t_b(u_{ji}) + \Delta_i/u_{ji}$ 时命中第 $i-1$ 个颗粒侵彻形成的孔底平面上某点 $A(r, \theta)$ 。 Δ_i 的表达式为

$$\Delta_i = H - Z_b(u_{ji}) + P(u_{ji-1})$$

显然， Δ_i 是随颗粒不同而变化的。现选择命中点 A 偏离轴线的距离 r 作为这个随机过程的特征量，记作 r_i 。

若将第 i 个颗粒在 t 时刻的径向偏离速度记作 $v_i(t)$ ，则随机变量 r_i 可表为

$$r_i = \int_{t_b(u_{ji})}^{t_b(u_{ji}) + \Delta_i/u_{ji}} v_i(t) dt = \bar{v}_i \frac{\Delta_i}{u_{ji}}$$

这里运用了积分中值定理。式中 \bar{v}_i 即正文假设 (1) 提出的第 i 个颗粒随机偏离轴线的平均速度。引进一个新的随机参数——平均半发散角 $\bar{\alpha}_i$

$$\bar{\alpha}_i = \bar{v}_i / u_{ji}$$

r_i 即表为

$$r_i = \bar{\alpha}_i \Delta_i \quad (A)$$

用 $E \langle \xi \rangle$ 表示随机变量 ξ 的数学期望, $D \langle \xi \rangle$ 表示其方差。于是

$$E \langle r_i \rangle = \Delta_i E \langle \bar{\alpha}_i \rangle$$

$$D \langle r_i \rangle = E \langle r_i^2 \rangle - (E \langle r_i \rangle)^2 = \Delta_i^2 D \langle \bar{\alpha}_i \rangle$$

由正文假设 (2) 推得

$$E \langle \bar{v}_i \rangle = 0, \quad D \langle \bar{v}_i \rangle = E \langle \bar{v}_i^2 \rangle - (E \langle \bar{v}_i \rangle)^2 \neq 0$$

所以

$$E \langle \bar{\alpha}_i \rangle = \frac{E \langle \bar{v}_i \rangle}{u_{ji}} = 0, \quad D \langle \bar{\alpha}_i \rangle = \frac{E \langle \bar{v}_i^2 \rangle - (E \langle \bar{v}_i \rangle)^2}{u_{ji}^2} \neq 0$$

用 $\bar{\alpha}_i^2$ 表示 $D \langle \bar{\alpha}_i \rangle$, 可得

$$E \langle r_i \rangle = 0, \quad D \langle r_i \rangle = \bar{\alpha}_i^2 \Delta_i^2 \quad (B)$$

这样, 我们给出了随机变量 r_i 的两个数字特征。但是, r_i 服从什么分布需要推导。

由于第 i 个颗粒在径向作随机运动, 因此它在孔底平面上命中点呈随机分布。概率论中描写这种随机运动的是扩散过程。在一维情形, 扩散过程的概率转移分布密度函数 $f(x, \tau; y, t)$ 满足 Колмогоров 第二方程^[5]

$$\frac{\partial f(x, \tau; y, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left[a(y, t) f(x, \tau; y, t) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[b(y, t) f(x, \tau; y, t) \right]$$

式中 $a(y, t)$ 反映质点的平均速度, $b(y, t)$ 与质点动能成比例。本文讨论的命中点 $A(r, \theta)$ 的分布密度 $f_i(r, t)$ 也应满足这个方程。由于正文假设 (2), Колмогоров 第二方程应取轴对称形式; 并且径向发散的平均速度 \bar{v}_i 的数学期望为零, 即 $a_i(r, t) = 0$; 又由正文假设 (1) 有 $b_i(r, t) = b_i$ 。于是 Колмогоров 第二方程写成如下形式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial t} &= \frac{b_i}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f_i}{\partial r} \right) \\ \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f_i(r, t) r dr d\theta &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (C)$$

式中 r, θ 为柱坐标的矢径与角度, b_i 为扩散系数。方程 (C) 的解为

$$f_i(r, t) = \frac{1}{2\pi b_i t} e^{-(r^2/2b_i t)}$$

若用 σ_i^2 表示 $b_i t$, 即得

$$f_i(r, t) = \frac{1}{2\pi\sigma_i^2} e^{-(r^2/2\sigma_i^2)} \quad (D)$$

(D) 式恰好是正态分布的表达式, σ_i^2 为正态分布的方差。这说明在假设 (1)、(2) 成立时, 射流颗粒在空气中自由飞行时的径向发散可用正态分布描写。考虑到 (B) 式, 正态分

布 的方差应为

$$\sigma_i^2 = \bar{a}_i^2 \Delta_i^2 \quad (E)$$

(二) 第 i 个颗粒对侵彻深度的贡献

由命中孔底的分布密度函数 $f_i(r, t)$ 即可求第 i 个颗粒命中某个区域 $r \leq R$ 的概率 p_i :

$$p_i = \int_0^{2\pi} \int_0^R f_i(r, t) r dr d\theta$$

将 (D)、(E) 式代入即得

$$p_i = 1 - e^{-\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{R}{\bar{a}_i \Delta_i}\right)^2}$$

由于偏离轴线较远的颗粒只能在靶板上散乱地打出一些浅坑, 因此估算穿深时应当只考虑偏离轴线较近的射流颗粒, 亦即 R 应当有一个适当的大小, 用 R^* 表示。称 $r \leq R^*$ 为有效命中域, R^* 为有效命中域半径。于是, 有效命中率 p_i^* 为

$$p_i^* = 1 - e^{-\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{R^*}{\bar{a}_i \Delta_i}\right)^2} \quad (F)$$

设对第 i 个颗粒做 M 次随机试验, 其中 K 次命中 R^* 域, 有效命中率 $p_i^* = K/M$ 。其中第 k 次试验获得穿深 $\Delta P_{i,k}$, 命中 R^* 域时 $\Delta P_{i,k} = \Delta P_i$, 未命中时 $\Delta P_{i,k} = 0$ 。于是, i 颗粒对穿深的随机贡献 $\Delta P_i'$ 的期望与方差为

$$E \langle \Delta P_i' \rangle = \sum_{k=1}^M \Delta P_{i,k} \cdot \frac{1}{M} = p_i^* \Delta P_i$$

$$D \langle \Delta P_i' \rangle = \sum_{k=1}^M (\Delta P_{i,k} - E \langle \Delta P_i' \rangle)^2 \cdot \frac{1}{M} = p_i^* (1 - p_i^*) (\Delta P_i)^2 \quad (G)$$

式中 p_i^* 由 (F) 式计算, ΔP_i 用正文 (3)、(4)、(5) 式计算。

(三) 多个射流颗粒对侵彻深度的总贡献

设参与拉断后侵彻的射流颗粒总数为 N 。由正文假设 (5) 知, 它们各自对穿深的随机贡献 $\Delta P_i'$ ($i = 1, 2, \dots, N$) 是互相独立的。这些颗粒侵彻的总深度取决于 N 个独立随机变量 $\Delta P_i'$ 之和, 其期望及方差为

$$E \langle \sum_{i=1}^N \Delta P_i' \rangle = \sum_{i=1}^N E \langle \Delta P_i' \rangle = \sum_{i=1}^N p_i^* \Delta P_i \quad (H)$$

$$D \langle \sum_{i=1}^N \Delta P_i' \rangle = \sum_{i=1}^N D \langle \Delta P_i' \rangle = \sum_{i=1}^N p_i^* (1 - p_i^*) (\Delta P_i)^2$$

于是第 i 个颗粒达到的侵彻深度 P_i 应为

$$P_i = P(u_m) + \sum_{k=1}^i p_i^* \Delta P_k$$

$$= P_0 + \sum_{k=1}^i p_i^* \eta \frac{u_k}{u_{j,k} - u_k} \left[t_b(u_{j,k}) + \frac{db}{du_j} \Big|_{u_{j,k}} \right] (\Delta u_j)_k$$

或者
$$\frac{P_i - P_{i-1}}{(\Delta u_j)_i} = -\eta \frac{u_i}{u_{j,i} - u_i} \left[t_b(u_{j,i}) + \frac{db}{du_j} \Big|_{u_{j,i}} \right] p_i^* \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

为绕过确定颗粒数 N 的困难, 可以不失普遍性地假设拉断后射流颗粒的速度是连续的, 拉断后射流由无穷个微元组成, 亦即假设同时有 $N \rightarrow \infty$ 及 $(\Delta u_j)_i \rightarrow 0$, 于是上式化为

$$\frac{dP}{du_j} + \eta \frac{u}{u_j - u} \left[t_b(u_j) + \frac{db}{du_j} \right] p^*(u_j) = 0 \quad (u_j \leq u_{j0}, P(u_j) \geq P_0) \quad (I)$$

同理, 由 (F) 式得

$$p^*(u_j) = 1 - e^{-\frac{1}{2} (R^*/\bar{a}(u_j) \Delta u_j)^2} \quad (J)$$

(I)、(J) 式称为拉断后射流对钢靶的随机侵彻深度方程。

(四) 多个射流颗粒随机侵彻的概率分布

用 $W(S, N)$ 表示 N 个射流颗粒中有 S 个有效命中靶板的概率, j 表示命中颗粒的标号, 其全概率分布情况列表于下。

| S | $W(S, N)$ | j | 可能的种数 |
|-----|---|--|-------------------------------|
| 0 | $\prod_{i=1}^N (1 - p_i)$ | $j \in \emptyset$ | $C_N^0 = 1$ |
| 1 | $\frac{p_j}{1 - p_j} \prod_{i=1}^N (1 - p_i)$ | $j \in \mathcal{Q}$ | $C_N^1 = N$ |
| 3 | $\frac{p_{j_1}}{1 - p_{j_1}} \cdot \frac{p_{j_2}}{1 - p_{j_2}} \cdot \prod_{i=1}^N (1 - p_i)$ | $j_1, j_2 \in \mathcal{Q}$ $j_1 \neq j_2$ | $C_N^3 = \frac{N(N-1)}{2}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| m | $\prod_{l=1}^m \frac{p_{j_l}}{1 - p_{j_l}} \cdot \prod_{i=1}^N (1 - p_i)$ | $j_l \in \mathcal{Q} (l=1, 2, \dots, m)$ $j_1 \neq j_2 \neq \dots \neq j_m$ | $C_N^m = \frac{N!}{m!(N-m)!}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| N | $\prod_{i=1}^N p_i$ | $j_l \in \mathcal{Q} (l=1, 2, \dots, N)$ $j_1 \neq j_2 \neq \dots \neq j_N$ | $C_N^N = 1$ |

$$\sum_{S=0}^N W(S, N) = 1 \quad \sum_{S=0}^N C_N^S = 2^N$$

附表: N 个射流颗粒随机命中靶板的全概率分布

(\mathcal{Q} 表示数集 $1, 2, \dots, N$; \emptyset 表示空集)

当已知 p_i^* 及 ΔP_i 时, 以穿深 $P = \sum_{j=1}^S \Delta P_j$ 为横坐标, 以概率 $W(S, N)$ 为纵坐标, 可以绘制 N 个颗粒随机侵彻的 $W-P$ 图。显然, 这是一个十分繁杂的计算离散型分布的问题。参与拉断侵彻的颗粒总数最多可达五、六十个。在 N 值较大时, 严格计算 $W(S, N)$ 几乎是不可能的。但是采用一些简化条件可以近似估算它。

考虑炸高很大的情况。由正文 (9) 式知, 这时 p_i^* 为常数, 用 p^* 表示。若再假设所有颗粒长度相等, 即 $(\Delta l)_i = \Delta l^*$, 这时按不可压缩流体模型估计, 所有颗粒对穿深的贡献也相等, 即 $\Delta P_i = \eta \sqrt{\rho_i / \rho_r} \Delta l^* = \Delta P^*$ 。由此推知 $W(S, N)$ 蜕变为二项分布

$$W(S, N) = C_N^s (1 - p^*)^{N-s} (p^*)^s$$

当 N 值很大时，二项分布又趋于正态分布。因此，我们可以用正态分布粗略估计炸高很大时射流侵彻厚钢靶深度的散布。

将 p^* 、 ΔP^* 代入(H)式，得

$$\bar{P}_{max} = E \left\langle \sum_{i=1}^N \Delta P_i \right\rangle = N p^* \Delta P^*$$

$$\sigma^2 = D \left\langle \sum_{i=1}^N \Delta P_i \right\rangle = N p^* (1 - p^*) (\Delta P^*)^2$$

于是

$$\frac{\sigma}{\bar{P}_{max}} = \sqrt{\frac{1 - p^*}{N p^*}} \quad (K)$$

按照正态分布，约有68%的 P_{max} 数据应在区间 $[\bar{P}_{max} - \sigma, \bar{P}_{max} + \sigma]$ ，约有96%的 P_{max} 的数据应在区间 $[\bar{P}_{max} - 2\sigma, \bar{P}_{max} + 2\sigma]$ 内。

参 考 文 献

- [1] 郑哲敏，关于射流侵彻的几个问题，五二研究所《科技参考资料》，(1977)。
- [2] 二〇四所，聚能破甲机理实验数据汇编(1972. 10. —1976. 8.)。
- [3] 二〇四所，聚能破甲机理及实验研究，北京工业学院聚能破甲进修班讲义，(1976. 3.)。
- [4] 郑哲敏，破甲弹射流稳定性研究，中国科学院力学研究所报告，(1977. 1.)。
- [5] 王梓坤，概率论基础及其应用，科学出版社，(1979)。

RANDOM PENETRATION OF BROKEN JET INTO STEEL TARGET

Ding Yansheng

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

ABSTRACT After the metal jet of the shaped-charge has been broken, a random radial divergency of the jet segments is produced, so that the penetration depth is reduced notably. In this paper the random radial divergency is analysed. A first-order nonlinear differential equation is presented to describe the random penetration depth of the broken jet and its simplified solution for quite a greater standoff is obtained.

KEY WORDS shaped-charge, penetration, random process, broken jet, steel target.