

弹塑性激波衰减规律的一种简便解法

李永池 魏勇

(中国科学技术大学近代力学系)

丁启财

(美国伊利诺大学芝加哥校区)

摘要 本文提出了一个求解弹塑性激波衰减规律的级数解法,给出了各未知量级数展式的通项表达式。同时给出了塑性激波后方弹性卸载区内的应力和质点速度分布规律。该方法简单方便,级数收敛得很快。

关键词 弹塑性介质, 激波衰减, 级数解法。

一、引言

弹塑性介质中激波衰减规律的研究不但是一个重要的基础理论课题,而且在工程防护、航天工程和矿山机械等实际问题中都有着重要的应用背景。所以尽管这一问题并不是新的,但人们一直在不断探求新的解法。人们的着眼点集中在两个方面:方法的广泛适用性和简单实用性。Буравцев^[1]和Nowaski^[2]曾对一维杆中塑性激波的衰减提出了一个“逐步近似法”,其前提是弹性波速远大于塑性激波速度。Lee等^[3]对激波波速为恒值、表面载荷随时间线性卸载的一维应变塑性波的衰减进行了分析。王礼立等^[4]发展了(1-3)的工作,对一维应变塑性激波的衰减提出了一个不受波速限制的逐步近似法。所有以上这些工作都有重要贡献。但综观其解题过程仍显不够简单,对工程应用来说特别是当将它归结为计算程序时仍然比较复杂。另外,这些工作的主要注意点都是对激波衰减规律本身的求解,如要得到激波后方的全流场图案,则仍需以已解出的激波迹线为部分边界再解一个混合边值问题,这显然是不方便的。本文将在发展Tuschak^{[5][6]}对弹塑性交界面分析方法的基础上,提出了一个新的弹塑性激波衰减规律的级数解法。此解法不但简单,收敛速度快,而且可同时给出全场的应力及质点速度分布规律。为突出基本方法,我们只以一维应力塑性激波的衰减为例,不考虑反向屈服效应。但容易看出这一方法在实质上也是可以加以发展和推广,去处理有反向屈服效应的弹塑性波的。

二、问题提法

以 p_r 、 E 、 $\epsilon_r = p_r / E$ 分别表示递增硬化材料的屈服压应力、弹性模量和屈服压应变,弹性和塑性加载的应力应变关系分别由下两式表示

$$dp/d\epsilon = E, \quad p - p_r = P(\epsilon - \epsilon_r), \quad (1)$$

其中压应力 p 为压应变 ϵ 间的函数 $P(\epsilon - \epsilon_v)$ 具有性质 $d^2 P/d\epsilon^2 \geq 0$ (见图 1)。杆材的弹性波速为

$$c = \sqrt{E/\rho} \tag{2}$$

其中 ρ 为材料的密度, 以 t 表示时间, x 表示波沿杆传播方向的坐标。设在 $t=0$ 时杆之左端 $x=0$ 处受到一突加至 $q_0 > p_v$, 然后连续卸载的冲击载荷 $p=q(t)$, 则在 (x, t) 平面上, 杆中将有如图 2 所示的波动图案。其中 $x=ct$ 表示弹性前驱波, $x=x(t)$ 表示未知的塑性激波迹线, 在两者之间是 $p=p_v$ 的恒应力区, 而在 $x=x(t)$ 和 t 轴之间则是连续卸载的弹性区, 此区中斜率为 $\pm c$ 的直线则分别表示追赶激波的右行弹性卸载特征线和卸载波与激波相互作用产生的左行内反射波特征线。我们的问题是: 求出塑性激波的迹线 $x=x(t)$; 求出激波 $x=x(t)$ 上应力 p 和质点速度 u 衰减规律, 并同时求出整个弹性卸载区中应力和质点速度的波动图案。

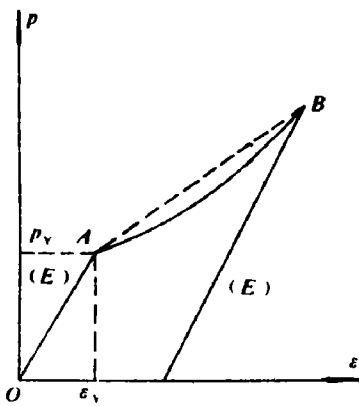


图 1

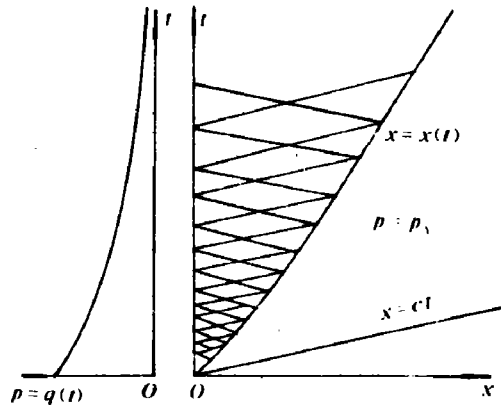


图 2

三、基本方法

以 $p(t)$ 、 $\epsilon(t)$ 和 $v(t)$ 分别表示塑性激波紧后方的压应力、压应变和质点速度, 则任一时刻激波传播速度 $x=x'(t)$ 将通过图 1 中的激波弦 AB 的斜率由下式给出

$$x'(t) = \sqrt{\frac{p(t) - p_v}{\rho(\epsilon(t) - \epsilon_v)}} \equiv g(p(t) - p_v) \tag{3}$$

其中 $g(p - p_v)$ 是由材料性质即递增硬化规律 (1) 式所决定的已知函数。激波阵面上的动量守恒条件为

$$p(t) - p_v = \rho x'(t) [u(t) - u_v], \quad (u_v = p_v / \rho c) \tag{4}$$

如记

$$\alpha = t - x/c, \quad \beta = t + x/c \tag{5}$$

则在激波后方的弹性卸载区内特征关系分别为

$$d(u + p/\rho c) = 0 \quad \text{当 } d\alpha = d(t - x/c) = 0 \tag{6}$$

$$d(u - p/\rho c) = 0 \quad \text{当 } d\beta = d(t + x/c) = 0 \quad (7)$$

由(6)、(7)式可见 $u + p/\rho c$ 和 $u - p/\rho c$ 分别是 α 和 β 的函数, 所以可写出

$$\frac{1}{2}(u + p/\rho c) = \psi(\alpha) = \psi(t - x/c) \quad (8)$$

$$\frac{1}{2}(u - p/\rho c) = \varphi(\beta) = \varphi(t + x/c) \quad (9)$$

而弹性卸载区内的应力可表达为

$$p = \rho c [\psi(t - x/c) - \varphi(t + x/c)] = \rho c [\psi(\alpha) - \varphi(\beta)] \quad (10)$$

其中 $\psi(\alpha)$ 和 $\varphi(\beta)$ 是待定的任意函数, 应由 $x=0$ 和 $x=x(t)$ 上的边界条件确定。将(8)和(9)式应用于塑性激波紧后方, 把(10)式应用于杆左端, 有

$$\frac{1}{2}[u(t) + p(t)/\rho c] = \psi(\alpha(t)) = \psi(t - x(t)/c) \quad (11)$$

$$\frac{1}{2}[u(t) - p(t)/\rho c] = \varphi(\beta(t)) = \varphi(t + x(t)/c) \quad (12)$$

$$q(t) = \rho c [\psi(t) - \varphi(t)] \quad (13)$$

方程(3)、(4)、(11)–(13)式组成五个未知函数 $x(t)$ 、 $p(t)$ 、 $u(t)$ 、 $\psi(\alpha)$ 和 $\varphi(\beta)$ 的函数-微分方程组。若记

$$s = p - p_r, \quad v = u - u_r, \quad b = q - p_r, \quad f = \psi - u_r \quad (14)$$

则可将(3)、(4)、(11)–(13)式写为

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= g(s(t)) \\ s(t) &= \rho x'(t)v(t) \\ \frac{1}{2}[v(t) + s(t)/\rho c] &= f(t - x(t)/c) \\ \frac{1}{2}[v(t) - s(t)/\rho c] &= \varphi(t + x(t)/c) \\ b(t) &= \rho c [f(t) - \varphi(t)] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

设函数 $x(t)$ 、 $s(t)$ 、 $v(t)$ 、 $f(t)$ 、 $\varphi(t)$ 、 $b(t)$ 、 $f(t - x(t)/c)$ 、 $\varphi(t + x(t)/c)$ 和 $g(s(t))$ 都可在 $t=0$ 展开为 Taylor 级数, 即设

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x_n t^n, & x'(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{n!} t^n, & s(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n!} t^n \\ v(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} v_n t^n, & f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n!} t^n, & \varphi(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n}{n!} t^n \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} h(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} b_n t^n, & f(\alpha(t)) &\equiv F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{n!} t^n \\ \varphi(\beta(t)) &\equiv \Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n}{n!} t^n, & g(s(t)) &\equiv G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n}{n!} t^n \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

则由复合函数求导的链锁法则容易证明

$$\left. \begin{aligned} G_0 &= g_0 \\ G_n &= \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \\ \sum k_i = n \\ l \\ \sum k_i = n \\ k=1}} \frac{n! g_n}{i_1! i_2! \dots i_l!} \left(\frac{s_1}{1!}\right)^{i_1} \left(\frac{s_2}{2!}\right)^{i_2} \dots \left(\frac{s_l}{l!}\right)^{i_l} \quad (n \geq 1) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

其中

$$g_n = \left. \frac{d^n g}{ds^n} \right|_{s=(1,0)}, \quad s_n = \left. \frac{d^n s}{dt^n} \right|_{t=0} \quad (18)$$

注意, g_n 完全是由材料性质和外载峰压所决定的。为了易于理解, 我们列出 $G_1 \dots G_4$ 的表达式

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= g_1 s_1, & G_2 &= [g_1 s_2 + g_2 s_1^2], & G_3 &= [g_1 s_3 + 3g_2 s_1 s_2 + g_3 s_1^3] \\ G_4 &= [g_1 s_4 + 4g_2 s_1 s_3 + 3g_2 s_2^2 + 6g_3 s_1^2 s_2 + g_4 s_1^4] \end{aligned} \right\} \quad (17)'$$

对函数 $f(\alpha(t)) \equiv F(t)$ 和 $\varphi(\beta(t)) \equiv \Phi(t)$ 级数展式的系数 F_n 和 Φ_n 可有与 (17) 完全类似的式子, 只需分别以 f 和 φ 代替 (17) 中的 g 、以 α 和 β 代替 (17) 中的 s 即可得

$$F_0 = f(\alpha_0), \quad F_n = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \\ \sum k_i = n \\ l \\ \sum k_i = n \\ k=1}} \frac{n! f_n}{i_1! i_2! \dots i_l!} \left(\frac{\alpha_1}{1!}\right)^{i_1} \left(\frac{\alpha_2}{2!}\right)^{i_2} \dots \left(\frac{\alpha_l}{l!}\right)^{i_l}, \quad (n \geq 1) \quad (19)$$

$$\Phi_0 = \varphi(\beta_0), \quad \Phi_n = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \\ \sum k_i = n \\ l \\ \sum k_i = n \\ k=1}} \frac{n! \varphi_n}{i_1! i_2! \dots i_l!} \left(\frac{\beta_1}{1!}\right)^{i_1} \left(\frac{\beta_2}{2!}\right)^{i_2} \dots \left(\frac{\beta_l}{l!}\right)^{i_l}, \quad (n \geq 1) \quad (20)$$

而且由函数 $\alpha(t) = t - x(t)/c$ 和 $\beta(t) = t + x(t)/c$ 的定义显然有

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha(0) = 0, & \alpha_1 &= 1 - \frac{x_1}{c}, & \alpha_n &= -x_n/c, & (n \geq 2) \\ \beta_0 &= \beta(0) = 0, & \beta_1 &= 1 + x_1/c, & \beta_n &= x_n/c, & (n \geq 2) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

将级数展开式 (16) 代入方程组 (15), 得一组用 t 的幂级数表达的恒等式如下

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} G_n t^n / n!, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{n!} t^n = \rho \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{n!} t^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{n!} t^n \right]$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{n!} t^n + \frac{1}{\rho c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n!} t^n \right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{n!} t^n \\ \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{n!} t^n - \frac{1}{\rho c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n!} t^n \right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n}{n!} t^n \\ \frac{1}{\rho c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (f_n - \varphi_n) t^n \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

其中 G_n 、 F_n 和 Φ_n 分别由 (17)、(19) 和 (20) 式给出。比较 (22) 式两边 t 的零次幂的系数，得

$$\left. \begin{aligned} x_1 = G_0 = g(s_0), \quad s_0 = \rho x_1 v_0 \\ \frac{1}{2} [v_0 + s_0 / \rho c] = f_0, \quad \frac{1}{2} [v_0 - s_0 / \rho c] = \varphi_0 \\ f_0 - \varphi_0 = \frac{1}{\rho c} b_0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

这是关于 x_1 、 s_0 、 v_0 、 f_0 和 φ_0 的线性代数方程组，解之并按计算次序写出其解，有

$$\left. \begin{aligned} s_0 = b_0, \quad x_1 = g(s_0), \quad v_0 = s_0 / \rho x_1 \\ f_0 = \frac{s_0}{2\rho c} (1 + c/x_1), \quad \varphi_0 = \frac{s_0}{2\rho c} (c/x_1 - 1) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

类似地，比较方程组 (22) 式两边 t 的系数、 t^2 的系数，可分别得 x_2 、 s_1 、 v_1 、 f_1 、 φ_1 的线性代数方程组和 x_3 、 s_2 、 v_2 、 f_2 、 φ_2 的线性代数方程组，其解可分别由 (25) 和 (27) 式表达

$$\left. \begin{aligned} s_1 = b_1 \delta_1, \quad x_2 = g_1 s_1, \quad v_1 = \frac{s_1}{\rho c} \eta \\ f_1 = \frac{s_1}{2\rho c \alpha_1} (\eta + 1), \quad \varphi_1 = \frac{s_1}{2\rho c \beta_1} (\eta - 1) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

其中

$$\eta = \frac{c}{x_1} (1 - \rho v_1 g_1), \quad \delta_1 = \frac{2}{[(\eta + 1)/\alpha_1] - [(\eta - 1)/\beta_1]} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} s_2 = b_2 \delta_2 + \delta_1^*, \quad x_3 = g_1 s_2 + g_2 s_1^2, \quad v_2 = \frac{s_2}{\rho c} \eta + \eta \\ f_2 = \frac{s_2}{2\rho c \alpha_1^2} (\eta + 1) + f_1^*, \quad \varphi_2 = \frac{s_2}{2\rho c \beta_1^2} (\eta - 1) + \varphi_1^* \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 = \frac{1}{x_1} [-v_0 g_2 s_1^2 - 2v_1 x_2], \\ f_1^* = \frac{1}{\alpha_1^2} (\eta_1 / 2 - \alpha_2 f_1), \quad \varphi_1^* = \frac{1}{\beta_1^2} (\eta_1 / 2 - \beta_2 \varphi_1) \\ \delta_2 = \frac{2}{[(\eta + 1)/\alpha_1^2] - [(\eta - 1)/\beta_1^2]} \quad \delta_1^* = \rho c \delta_2 (\varphi_1^* - f_1^*) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

一般地, 若比较 (22) 式两边 t^n 的系数, 则可以得 x_{n+1} 、 s_n 、 v_n 、 f_n 和 φ_n 的线性代数方程组, 解之并按计算次序可写出

$$\left. \begin{aligned} s_n &= h_n \delta_n + \delta_{n-1}^* \\ x_{n+1} &= \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \\ \sum k_i = i \\ \sum k_i = n \\ i=1}} \frac{n! g_i}{i_1! i_2! \dots i_l!} \left(\frac{s_1}{1!}\right)^{i_1} \left(\frac{s_2}{2!}\right)^{i_2} \dots \left(\frac{s_l}{l!}\right)^{i_l} \\ v_n &= \frac{s_n}{\rho c} \eta + \eta_{n-1} \\ f_n &= \frac{s_n}{2\rho c \alpha_1^n} (\eta + 1) + f_{n-1}^*, \quad \varphi_n = \frac{s_n}{2\rho c \beta_1^n} (\eta - 1) + \varphi_{n-1}^* \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \eta_{n-1} &= -\frac{1}{x_1} \left\{ v_0 \sum_{\substack{2 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \\ \sum k_i = i \\ \sum k_i = n \\ i=1}} \frac{n! g_i}{i_1! i_2! \dots i_l!} \left(\frac{s_1}{1!}\right)^{i_1} \left(\frac{s_2}{2!}\right)^{i_2} \dots \left(\frac{s_l}{l!}\right)^{i_l} + \sum_{i=1}^{n-1} C_n^i x_{i+1} v_{n-i} \right\} \\ f_{n-1}^* &= \frac{1}{\alpha_1^n} \left\{ \frac{1}{2} \eta_{n-1} - \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \\ \sum k_i = i \\ \sum k_i = n \\ i=1}} \frac{n! f_i}{i_1! i_2! \dots i_l!} \left(\frac{\alpha_1}{1!}\right)^{i_1} \left(\frac{\alpha_2}{2!}\right)^{i_2} \dots \left(\frac{\alpha_l}{l!}\right)^{i_l} \right\} \\ \varphi_{n-1}^* &= \frac{1}{\beta_1^n} \left\{ \frac{1}{2} \eta_{n-1} - \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \\ \sum k_i = i \\ \sum k_i = n \\ i=1}} \frac{n! \varphi_i}{i_1! i_2! \dots i_l!} \left(\frac{\beta_1}{1!}\right)^{i_1} \left(\frac{\beta_2}{2!}\right)^{i_2} \dots \left(\frac{\beta_l}{l!}\right)^{i_l} \right\} \\ \delta_n &= \frac{2}{\frac{\eta+1}{\alpha_1^n} - \frac{\eta-1}{\beta_1^n}} \\ \delta_{n-1}^* &= \rho c \delta_n (\varphi_{n-1}^* - f_{n-1}^*) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

仔细观察公式 (29) 和 (30) 可以发现, 公式 (30) 的右端只出现 x_n 、 s_{n-1} 、 v_{n-1} 、 f_{n-1} 和 φ_{n-1} 以及各量更低阶的系数, 因而可以由这些已算出的量, 由公式 (30) 依次算出 η_{n-1} 、 f_{n-1}^* 、 φ_{n-1}^* 、 δ_n 和 δ_{n-1}^* , 然后通过公式 (29) 依次计算出 s_n 、 x_{n+1} 、 v_n 、 f_n 和 φ_n 。因此公式 (29) (连同 (30) 式) 便是级数解 (16) 式的通项表达式。尽管这些通项表达式中有一些形式上似乎很复杂, (如 x_{n+1} 、 η_{n-1} 、 f_{n-1}^* 和 φ_{n-1}^* 的表达式), 但用计算程序是很容易完成计算的、容易验证, 当 $n=0, 1, 2$ 时, 即得到前面的公式 (24)、(25)–(26) 和 (27)–(28)。而且容易看出, 一旦函数 f 和 φ 的各阶系数都确定下来, 即函数 $\psi(\alpha)$ 和 $\varphi(\beta)$ 确定下来, 就立即可由公式 (8) 和 (9) 把弹性卸载区内应力 p 和质点速度 u 的分布规律确定下来。

四、算例

设材料具有如下形式的递增应力应变关系^[7]

$$\rho = \begin{cases} E\varepsilon, & \text{当 } \varepsilon \leq \varepsilon_Y \\ \rho_Y + \frac{a(\varepsilon - \varepsilon_Y)}{b - (\varepsilon - \varepsilon_Y)}, & \text{当 } \varepsilon > \varepsilon_Y \end{cases} \quad (31)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} E &= 1.257 \times 10^3 \text{ GPa}, & a &= -1.2799 \text{ GPa}, \\ b &= -0.8886, & \rho &= 7.8 \text{ g/cm}^3, & \rho_Y &= 1.76 \text{ GPa} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

并设杆端的应力时程曲线为

$$q(t) = q_0 e^{-t/T} \quad (33)$$

其中

$$q_0 = 5.0 \text{ GPa}, \quad T = 1000 \mu\text{s} \quad (t \text{ 的单位亦取 } \mu\text{s}) \quad (34)$$

用第3节所述方法对塑性激波衰减及全流场图案进行了计算，结果示于图3-5。

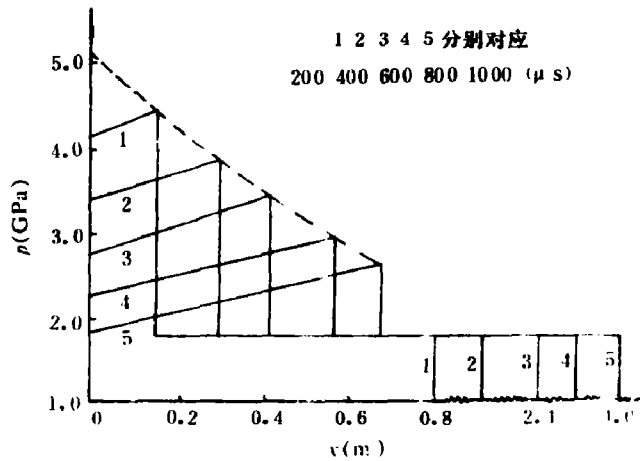


图 3

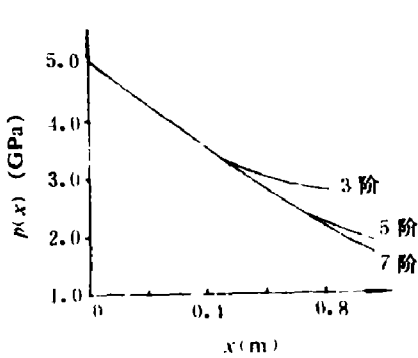


图 4

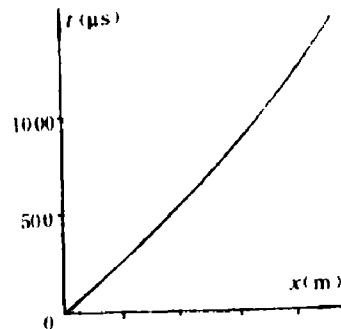


图 5

图3给出了 $t=200\mu\text{s}$ 、 $400\mu\text{s}$ 、 $600\mu\text{s}$ 、 $800\mu\text{s}$ 、 $1000\mu\text{s}$ 时塑性激波位置、激波上的塑性应力以及激波后方弹性卸载区中应力在杆中的分布规律,所有结果都对应于7阶近似。由此也不难画出塑性激波应力随距离的衰减曲线,如图3中的虚线所示。

为了说明该方法的收敛特性,在图4中给出了塑性激波应力随距离衰减规律 $p(x)$ 的3阶、5阶和7阶近似的计算结果。由图中3条曲线可以发现,在杆端附近各条曲线重合得很好,随着距离的增大低阶近似结果越来越偏离高阶近似结果,但5阶近似和7阶近似在整个 $x\leq 1000\text{mm}$ 的范围内几乎都是重合的。至于图5中所给出的 $x-t$ 平面上的塑性激波迹线 $x=x(t)$,则收敛得更快,5阶和7阶近似结果几乎区别不开来,因此只画出了7阶近似结果。这说明,该级数解法的收敛速度是相当快的。而且由于公式(29)和(30)极易编成简单的计算程序,所以给出更高阶近似并不带来什么困难。

五、结 论

本文给出了一个求解杆中塑性激波衰减规律的级数解法,该方法的特点是:

- 1) 思想简明,方法简单,收敛速度较快,易于通过计算程序完成计算,便于工程应用
- 2) 在求解塑性激波衰减规律和激波迹线的同时,也求得了整个弹性卸载区内的应力和质点速度分布规律,这也更便于工程应用。
- 3) 方法的基本思想也适用于求解有反向屈服效应影响的一维应变塑性波传播的问题及其它可能出现弹塑性交界面的波传播问题,但需对方法做些局部修正。这些工作将在它处发表

本工作是在国家自然科学基金数学—物理字83—62号的资助下完成的,特此致谢

参 考 文 献

- [1] Бывантин, А. И., Вест. Ленингр. Гос. Унив., 1 (1970), 93.
- [2] Nowinski, W. K., Stress Waves in Non-elastic Solids, William Clawes and Sons, Ltd., London, (1978), 69.
- [3] Lee, E. H., Liu, D. T., An Example of the Influence of Yield on High Pressure Wave Propagation, in "Stress Waves in Anelastic Solids", Kolsky, H., Prager, W., ed. (1964), 239.
- [4] 王礼立, 胡时胜, 王肖钧, 在弹塑性介质中传播的平面激波的衰减, 中国科学技术大学学报 13(1) (1983)
- [5] Tuschak, P. A., Determination of the Unloading Boundary in longitudinal Elastic-Plastic Stress Wave Propagation, *J. A. M.* 38 (4) (1971), 888.
- [6] Tuschak, P. A., A Note on the Unloading Boundary in Elastic-Plastic Stress Wave Propagation, *J. A. M.* 40 (1) (1973), 292.
- [7] Cristescu, N., Dynamic Plasticity, North-Holland Publ. Co., Amsterdam (1967).

**A SIMPLE AND CONVENIENT SOLUTION
FOR THE ATTENUATION OF AN
ELASTIC-PLASTIC SHOCK WAVE**

Li Yongchi Wei Yong

(University of Science and Technology of China)

T. C. T. Ting

(University of Illinois at Chicago, U. S. A.)

ABSTRACT A series solution for the attenuation of an elastic-plastic shock wave and expressions for the general terms of the series are given in this paper. Distributions of stress and particle velocity in the elastic unloading region behind the plastic shock wave are given as well. The method is quite simple and convenient, moreover, the series is quickly convergent.

KEY WORDS elastic-plastic media, attenuation of shock waves, series solution.