

在冲击载荷作用下 结构大变形的挠度估计

华自力 余同希

(北京大学力学系)

摘要 参照 Martin 和 Ponter 关于冲击载荷作用下塑性结构大变形的最终挠度的上限定理, 从能量平衡的角度提出了一种在冲击载荷作用下结构挠度的估计方法。对刚塑性材料制成的圆板梁和圆环, 给出了最终挠度的估计表达式, 同已有的解作了比较, 讨论了支承条件的影响, 从而说明了这是一种在工程上十分实用的良好近似方法

关键词 上限, 冲击, 大变形, 结构

一、引言

在结构的塑性动力响应中, 几何大变形引起的效应是一个值得注意的次级效应。对于板的弯曲问题, 大变形会导致膜力的产生与发展, 从而使结构的承载机制发生很大的变化。而对于薄圆环受压的问题, 几何形状的改变也会严重影响承载能力。因而至少对于这两类结构, 在研究其塑性动力响应时, 忽略几何大变形效应都会导致重大的误差。但是, 计及几何大变形时寻求结构塑性动力响应的完全解一般并非易事。这方面较早的工作应推 Symonds 和 Mentel^[1] 对轴向约束的刚塑性梁承受均布冲击载荷的分析, 以及 Ting^[2] 对悬臂梁 Parkes 问题的大变形分析。前者着重研究梁中轴力的产生和发展, 以及它对最终挠度的影响; 后者并不引入显著的轴力, 因而着重体现了几何构形改变对基本方程组及其解的影响。此后, Jones^[3], Wierzbicki 和 Florence^[4], Symonds 和 Wierzbicki^[5] 等先后研究了圆板冲击响应的大变形过程, 通过采用一些简化假设得到近似的理论解, 并与有关的实验作了比较。为了避免寻求大变形时的完全解的困难, 人们也尝试建立大变形时的结构最终挠度的界限定理。首先是 Wierzbicki^[6] 针对简支可移圆板受冲击载荷的问题作了讨论。其后, Martin 和 Ponter^[7] 基于存在极值路径的材料假定, 严格地导出了冲击载荷作用下结构大变形的最终挠度的上限定理。

尽管已经有了这些研究, 但真正给出的算例只有两个, 难以进行深入讨论。本文将给出更多的典型算例, 以便进行上限解和完全解的比较, 并讨论支承条件对最终挠度的影响, 得出工程问题感兴趣的若干新结果。

二、用 Martin 和 Ponter 的方法估计挠度

假定我们所研究的结构受到冲击载荷的作用, 因而具有初始动能 K_0 , 而我们感兴趣的是结构上某一点 A 上, 沿某一方向 N 所发生的挠度 δ 。为了对最终挠度 δ_f 作出估计, 虚拟在 A 点

沿 N 方向作用一个静载荷 P , 它在结构具有 δ 时恰使结构保持塑性流动。通过通常的极限分析方法可以给出 $P = f(\delta)$, 因而通过积分可以得出在挠度由 0 增长到 δ 的过程中 P 所作的功

$$\int_0^{\delta} P d\delta = \int_0^{\delta} f(\delta) d\delta = W(\delta) \quad (1)$$

根据 Martin 和 Ponter^[3] 的理论, 在存在极值路径的材料假定下, 在结构响应的整个过程中都应满足不等式

$$W(\delta) \leq K_0 \quad (2)$$

特别地, 对于最终挠度 δ_f , 就有

$$W(\delta_f) \leq K_0 \quad (3)$$

实际上, $W(\delta)$ 必为 δ 的单调增函数, 它存在单值反函数 W^{-1} , 于是由 (3) 式可知

$$\delta_f \leq \bar{\delta}_f = W^{-1}(K_0) \quad (4)$$

在满足 Martin 和 Ponter 定理要求的条件下, $\bar{\delta}_f$ 给出最终挠度 δ_f 的一个上限。即使不严格满足这些条件, (4) 式给出的 $\bar{\delta}_f$ 也可以作为对 δ_f 的一个近似估计。

三、用能量平衡的考虑估计挠度

上面对 Martin 和 Ponter 方法的叙述参考了 Symonds^[8] 对这个问题的阐述。从这一叙述会产生这样一种疑问, 即这种方法只需要知道初始总动能 K_0 , 而与初速度的分布无关, 这显得不够合理。如果我们感兴趣的是一个圆板的中心挠度, 那么不论冲击载荷如何分布, 始终选择与 δ 相应的中心集中力作为虚拟的静载荷 P , 这就不够合理。为此, 我们从能量平衡的角度来作一些考虑。设 dW 是外力功的增量, dK 是系统动能的增量, dE 是结构内部能量耗散增量, 不失一般性, 只考虑支反力做功为零的边条件, 则对于刚塑性结构, 能量守恒给出

$$dW = dK + dE \quad (5)$$

考虑由 $\delta = 0$ 到 $\delta = \delta_f$ 的变化过程, 积分上式得到

$$W(\delta_f) = -K_0 + E(\delta_f) \quad (6)$$

其中已用到 $\delta = 0$ 时 $W(0) = E(0) = 0$ 以及 $\delta = \delta_f$ 时 $K(\delta_f) = 0$ 。

对于结构受冲击载荷的情形, $W(\delta_f) = 0$ 。于是从 (6) 式有

$$E_d(\delta_f) = K_0 \quad (7)$$

这里脚标 d 表示动载 (冲击载荷) 情形。

而对于结构准静态加载的情形, $K_0 = 0$, 于是仍然从 (6) 式有

$$E_s(\delta_f) = W_s(\delta_f) \quad (8)$$

这里脚标 s 表示准静态情形。

假设材料是率 (应变率) 无关的, 动态变形过程和准静态变形过程中材料的力学行为是一样的。当然还可能存在着二者变形模态的差异。我们的看法是, 如果按照冲击载荷的分布方式选择虚拟的静载荷, 并计算相应的外功 $W_s(\delta_f)$, 那么可以期望二者变形模态差异较小。例如对均布冲击载荷作用下的圆板, 虚拟的静载荷取为均布载荷, 并计算它在板的大变形过程中作的功, 就比取中心集中力作为虚拟的静载荷来得合理。这样, 如果动态过程与准静态过程的变形模式一致, 就有

$$E_d(\delta_f) = E_s(\delta_f) \quad (9)$$

综合 (7)、(8)、(9) 式, 就得到

$$W_{\text{静}}(\delta_l) = K_0 \quad (10)$$

或取 $W_{\text{静}}$ 的反函数 $W_{\text{静}}^{-1}$, 并有

$$\delta_l = W_{\text{静}}^{-1}(K_0) \quad (11)$$

这在形式上同(4)式没有什么两样, 但在我们的推理中, 取静载分布形式与冲击载荷的分布形式相同, 这样的 $W_{\text{静}}$ 函数与(4)式中的 W 函数可以是不同的。

下面我们来看一些例子。

1. 简支圆板

(1) 径向可移的简支圆板

Kondo 和 Pian¹⁰ 曾用广义屈服线方法, 求得径向可移的简支刚塑性圆板承受均布载荷作用, 发生大变形时的静承载能力为

$$q = \begin{cases} q_0 \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\delta}{h} \right)^2 \right] & \text{当 } \frac{\delta}{h} \leq 1 \\ q_0 \left[\frac{\delta}{h} + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{\delta} \right) \right] & \text{当 } \frac{\delta}{h} \geq 1 \end{cases} \quad (12)$$

其中 $q_0 = 6 M_0 / R^2$ 为初始极限载荷, $M_0 = (1/4) Y h^2$ 为板的塑性极限弯矩, Y 为材料的屈服应力, R 和 h 分别为板的半径和厚度, δ 为板中心挠度。

现设此圆板承受均布冲击载荷, 因而全板同时获得初速 v_0 , 则初始动能为

$$K_0 = \pi R^2 m v_0^2 / 2 \quad (13)$$

其中 m 为单位面积的板的质量。

按照我们提出的方法, 计算相应静载的外力功, 得

$$W_{\text{静}}(\delta_l) = \int_0^{\delta_l} q \cdot d\delta \cdot \pi R^2 / 3 \quad (14)$$

其中因子 $\pi R^2 / 3$ 来自锥形变形场。将(12)式代入(14)式, 并积分可得

$$W_{\text{静}}(\delta_l) = \begin{cases} 2\pi M_0 h \left[\frac{\delta_l}{h} + \frac{1}{9} \left(\frac{\delta_l}{h} \right)^3 \right] & \text{当 } \frac{\delta_l}{h} \leq 1 \\ 2\pi M_0 h \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\delta_l}{h} \right)^2 + \frac{1}{3} \ln \left(\frac{\delta_l}{h} \right) \right] & \text{当 } \frac{\delta_l}{h} \geq 1 \end{cases} \quad (15)$$

将(13)式和(15)式代入(10)式, 得出

$$\frac{m v_0^2 R^2}{M_0 h} = \begin{cases} 4 \left(\frac{\delta_l}{h} \right) + \frac{4}{9} \left(\frac{\delta_l}{h} \right)^3 & \text{当 } \frac{\delta_l}{h} \leq 1 \\ \frac{2^2}{9} + 2 \left(\frac{\delta_l}{h} \right)^2 + \frac{4}{3} \ln \left(\frac{\delta_l}{h} \right) & \text{当 } \frac{\delta_l}{h} \geq 1 \end{cases} \quad (16)$$

(2) 径向不可移的简支圆板

对这一情形, Kondo 和 Pian¹⁰ 给出

$$q = \begin{cases} q_0 \left[1 + \frac{4}{3} \left(\frac{\delta}{h} \right)^2 \right] & \text{当 } \delta/h \leq \frac{1}{2} \\ q_0 \left[2 \frac{\delta}{h} + \frac{1}{6} \left(\frac{h}{\delta} \right) \right] & \text{当 } \delta/h \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (17)$$

其中各量意义同于(12)式。重复上述步骤,可得在冲击载荷作用下圆板中心最终挠度的估计式

$$\frac{mv_0^2 R^2}{M_0 h} = \begin{cases} 4 \left(\frac{\delta_f}{h}\right) + \frac{16}{9} \left(\frac{\delta_f}{h}\right)^3 & \text{当 } \frac{\delta_f}{h} \leq \frac{1}{2} \\ \left(\frac{11}{9} + \frac{2}{3} \ln 2\right) + 4 \left(\frac{\delta_f}{h}\right)^2 + \frac{2}{3} \ln \left(\frac{\delta_f}{h}\right) & \text{当 } \frac{\delta_f}{h} \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (18)$$

此结果与Jones^[3]解的比较见图1。

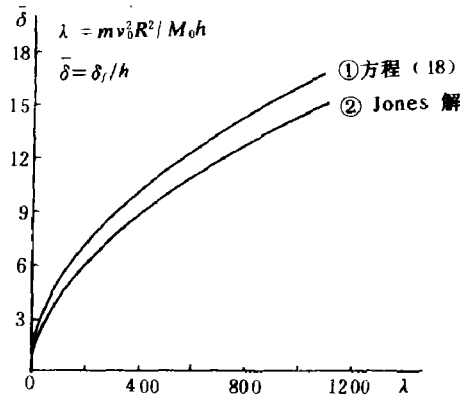


图 1

2. 固支薄圆板

Onat和Haythornthwaite^[10]曾研究过固支刚塑性圆板受均布载荷作用发生大变形时的膜力解,并由此得出静极限载荷为

$$q_s = \frac{16M_0}{R^2} \cdot \frac{\delta}{h} \quad (19)$$

同时挠度分布为

$$y(r) = \delta (1 - r^2/R^2) \quad (20)$$

其中 r 为板的径向坐标。由(19)和(20)式不难算出

$$W_s(\delta_f) = \int_0^{\delta_f} d\delta \int_0^R q_s y dr = \int_0^{\delta_f} \frac{1}{2} \pi R^2 q_s d\delta \quad (21)$$

当圆板承受均布冲击载荷时初始动能为

$$K_0 = \frac{1}{2} \pi R^2 m v_0^2 \quad (22)$$

将(19)、(21)、(22)式代入(10)式得出

$$\frac{mv_0^2 R^2}{M_0 h} = 8 \left(\frac{\delta_f}{h}\right)^2 \quad (23)$$

作为比较,由文献[4]对固支圆板承受冲击载荷的膜力解和实验研究可知,在 $R/h = 16$ 时有

$$0.54 mv_0^2 R / 8 M_0 = 8.9 (\delta_f / R)^2 \quad (24)$$

而在 $R/h=16$ 时我们的结果 (23) 式给出

$$0.54 \frac{mv_0^2 R}{8 M_0} = 8.6 \left(\frac{\delta_f}{R} \right)^2 \quad (25)$$

与 (24) 式相比, 结果极为接近。这可以从图 2 看出。在图 2 中还给出了实验结果 (参见文献 [4])。

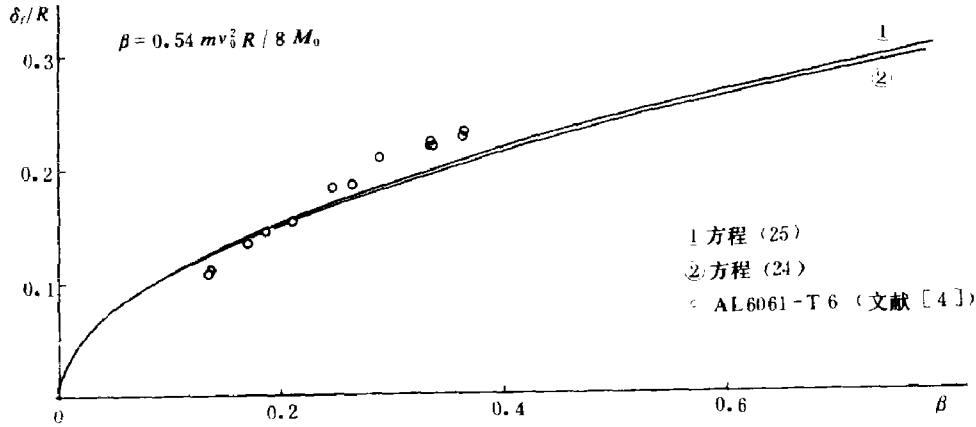


图 2

文献 [5] 曾给出刚塑性固支圆板的另一个膜力解

$$\frac{mv_0^2 R^2}{M_0 h} = 9.0135 \left(\frac{\delta_f}{h} \right)^2 \quad (26)$$

(26) 式与 (23) 式的比较见图 3。

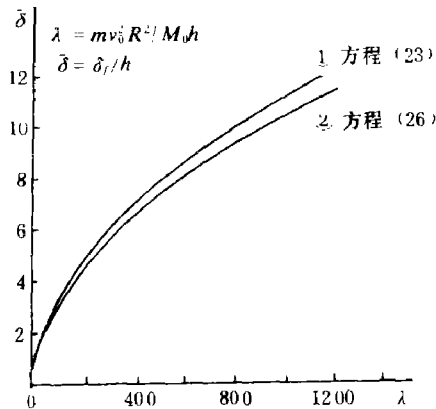


图 3

由这些例子都可看出, 用我们的方法总能得到对板的最终挠度的良好估计, 而计算又极为简单。

3. 简支梁

对于刚塑性径向不可移的简支梁中点受集中力作用的问题, 静极限载荷为

$$P_s = \begin{cases} \frac{2M_p}{L} \left[1 + 4\left(\frac{\delta}{h}\right)^2 \right] & \text{当 } \delta/h \leq \frac{1}{2} \\ \frac{2M_p}{L} \cdot 4\frac{\delta}{h} & \text{当 } \delta/h \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (27)$$

其中 $M_p = (1/4)Ybh^2$ 为梁的塑性极限弯矩， b 、 h 和 L 分别为梁的宽度、高度和半梁长， δ 为梁中点的挠度。

在冲击载荷作用下梁的初动能为 mLv_0^2 ，令其与 $W_s = \int_0^{\delta_f} P_s d\delta$ 相等，可得

$$\frac{mv_0^2 L^2}{M_p h} = \begin{cases} 2\frac{\delta_f}{h} + \frac{8}{3}\left(\frac{\delta_f}{h}\right)^3 & \text{当 } \delta_f/h \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} + 4\left(\frac{\delta_f}{h}\right)^2 & \text{当 } \delta_f/h \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (28)$$

这与文献[1]的结果

$$\frac{mv_0^2 L^2}{M_p h} = 1 + 4\left(\frac{\delta_f}{h}\right) + 4\left(\frac{\delta_f}{h}\right)^2 \quad (29)$$

的比较见图4。

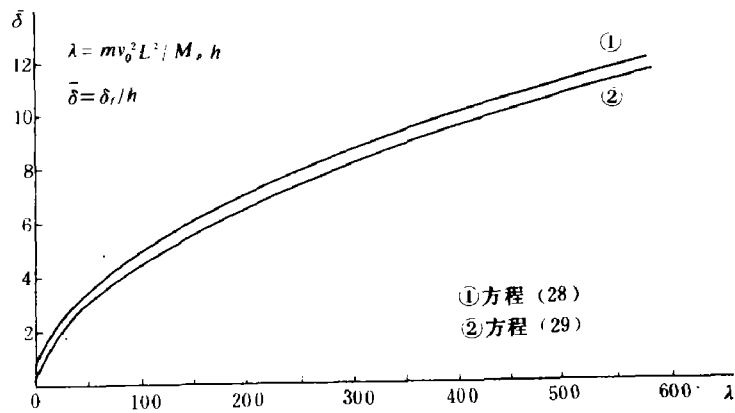


图 4

4. 固支梁

Haythornthwaite^[1]给出了刚塑性固支梁受集中力作用，发生大变形时的静极限载荷为

$$P_s = \begin{cases} \frac{4M_p}{L} \left[1 + \left(\frac{\delta}{h}\right)^2 \right] & \text{当 } \delta/h \leq 1 \\ \frac{4M_p}{L} \cdot 2\frac{\delta}{h} & \text{当 } \delta/h \geq 1 \end{cases} \quad (30)$$

其中各量意义同(27)式。

对冲击载荷作用下的固支梁，用我们的方法得到

$$\frac{mv_0^2 L^2}{M_p h} = \begin{cases} 4\left(\frac{\delta_f}{h} + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta_f}{h}\right)^2\right) & \text{当 } \delta_f/h \leq 1 \\ 4\left[\frac{1}{3} + \left(\frac{\delta_f}{h}\right)^2\right] & \text{当 } \delta_f/h \geq 1 \end{cases} \quad (31)$$

可与之比较的是 Symonds 和 Mentel^[11]的结果

$$\frac{mv_0^2 L^2}{M_p h} = 4\left(\frac{\delta_f}{h} + 1\right)^2 \quad (32)$$

以及 Symonds 和 Jones^[12]的结果

$$\frac{mv_0^2 L^2}{M_p h} = \begin{cases} 6\left[\frac{\delta_f}{h} + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta_f}{h}\right)^2\right] & \text{当 } \delta_f/h \leq 1 \\ 4\left[\frac{1}{4} + \frac{\delta_f}{h} + \left(\frac{\delta_f}{h}\right)^2\right] & \text{当 } \delta_f/h \geq \frac{3}{2} \end{cases} \quad (33)$$

图 5 比较了以上三个结果, 说明相互之间符合良好。

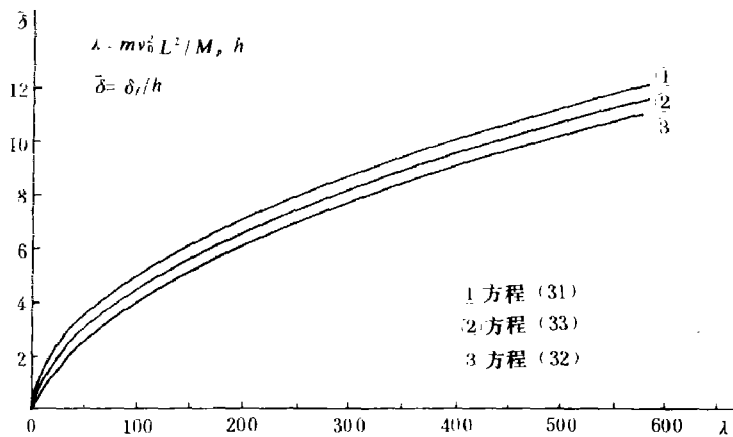


图 5

5. 受压圆环

(1) 在两刚性平板对压下的薄圆环

如图 6 所示, 对于薄圆环在此载荷条件下的大变形, DeRuntz 和 Hodge^[13]提出了四铰变形机构, 并得出承载能力为

$$P = \frac{P_0}{\sqrt{1 - (\delta/R)^2}} \quad (34)$$

因而易求出 δ 由 0 变到 δ_f 时静载作的功

$$W_s = \int_0^{\delta_f} P d\delta = \int_0^{\delta_f} \frac{P_0}{\sqrt{1 - (\delta/R)^2}} d\delta = P_0 R \arcsin\left(\frac{\delta_f}{R}\right) \quad (35)$$

其中 $P_0 = 4M_p/R$, $M_p = Ybh^2/4$ 是矩形 ($b \times h$) 截面的塑性极限弯矩, R 是圆环半径, δ 是加载刚性板相对位移之半。受圆环上下中点相碰条件的限制, (34) 和 (35) 式只适用于 $\delta \leq R/\sqrt{2}$ 。

现假设一圆环对径各受到一质量为 G 、初速为 v_0 的刚性块撞击，而刚性块的横向尺寸可以保证图 6 所示的加载位置，则由 (10) 式给出

$$P_0 R \arcsin\left(\frac{\delta_r}{R}\right) = K_0 = \frac{1}{2} G v_0^2$$

或即

$$\delta_r = R \sin\left(\frac{G v_0^2}{8 M_p}\right) \tag{36}$$

此式适用于 $G v_0^2 / 8 M_p \leq \pi/4$ ，或即

$$G v_0^2 \leq 2\pi M_p \tag{37}$$

(2) 在集中载荷对压下的薄圆环。

此时圆环仍变形为四铰机构 (图 6)，但力的作用点移到上下半圆的中点。由此推出此时圆环的承载能力为 (参考 [14])

$$P = \frac{P_0}{\sqrt{1 + 2\delta/R - (\delta/R)^2}} \tag{38}$$

其中 $P_0 = 4M_p/R$ ， M_p 意义同前， δ 则指集中力作用处相对位移之半。此式可适用于 $\delta/R \leq 1$ 。注意 (38) 式给出的 P 是随 δ 的增加而减小的。经积分求出

$$W_s = \int_0^{\delta} P d\delta = P_0 R \left[\frac{\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{1 - \delta/R}{\sqrt{2}}\right) \right] \tag{39}$$

当圆环对径各受到质量为 G 、初速为 v_0 的刚性块撞击，而刚性块横向尺寸又很小 (如子弹) 时，按 (10) 式和 (39) 式可求得

$$\delta_r = R \left[1 - \cos\left(\frac{G v_0^2}{8 M_p}\right) + \sin\left(\frac{G v_0^2}{8 M_p}\right) \right] \tag{40}$$

此式适用于 $G v_0^2 \leq 2\pi M_p$ ，即与 (37) 式相同

由 (36) 式和 (40) 式给出的最终挠度 δ_r 与参数 $G v_0^2 / 8 M_p$ 的关系见图 7。

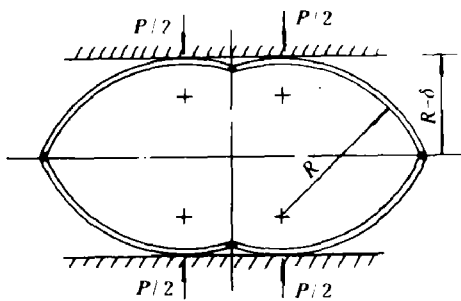


图 6

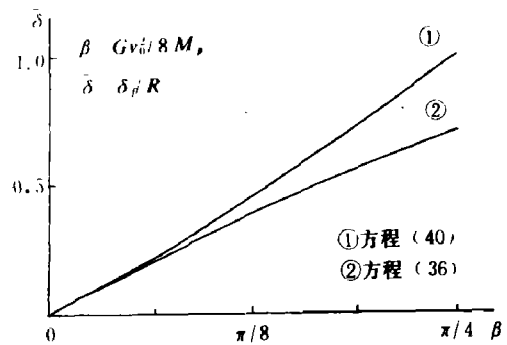


图 7

四、讨 论

1. 以上例子说明, 本文提出的方法估计冲击载荷作用下的刚塑性结构的最终(即最大)挠度简单可靠, 通常给出一个良好的挠度上界。

2. 从圆板和梁的问题可以看出, 支承条件对最终挠度有很大影响。由于我们计及结构的大变形, 所以不但简支与固支有差别, 而且径向可移的简支条件与径向不可移的简支条件也造成很大差别。

3. 从圆环的问题可以看出, 尽管都是圆环受刚性块撞击的问题, 变形模式也相同, 都可因刚性块尺寸不同造成载荷作用位置不同, 进而影响冲击载荷作用下的最终挠度。在结构大变形过程中, 载荷作用点有可能随之改变, 这一因素值得注意。

4. 对于大变形过程中 $P \sim \delta$ 关系难以通过分析得到的情形, 可以通过实验确定 $P \sim \delta$ 关系, 进而计算出 $W \sim \delta$ 关系。一旦这个关系已知, 就可以采用本文的方法来研究冲击载荷作用下的结构最终挠度。

5. 本文的方法只适用于率无关材料。对于率相关材料, 应考虑应变率效应对挠度估计加以修正。

参 考 文 献

- [1] Symonds, P.S., Mentel, T.J., Impulsive loading of plastic beams with axial constraints, *J. Mech. Phys. Solids*, **6** (1958), 186.
- [2] Ting, T.C.T., Large deformation of a rigid, ideally plastic cantilever beam, *J. Appl. Mech.*, **32** (1965), 295.
- [3] Jones, N., Impulsive loading of a simply supported circular rigid plastic plate, *J. Appl. Mech.*, **35** (1968), 59.
- [4] Wierzbicki, T., Florence, A.L., A theoretical and experimental investigation of impulsively loaded clamped circular viscoplastic plates, *Int. J. Solids Structures*, **6** (1970), 553.
- [5] Symonds, P.S., Wierzbicki, T., Membrane mode solutions for impulsively loaded circular plates, *J. Appl. Mech.*, **46** (1979), 58.
- [6] Wierzbicki, T., Bounds on large dynamic deformations of structures, *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, **96** EM 3 (1970), 267.
- [7] Martin, J.B., Ponter, A.R.S., Bounds for impulsively loaded plastic structures, *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, **98** EM 1 (1972), 107.
- [8] Symonds, P.S., Approximation techniques for impulsively loaded plastic structures, CISM, (1979).
- [9] Kondo, K., Pian, T.H.H., Large deformation of rigid-plastic circular plates, *Int. J. Solids Structures*, **17** (1981), 1043.
- [10] Onat, E.T., Haythornthwaite, R.M., The load-carrying capacity of circular plates at large deflection, *J. Appl. Mech.*, **23** (1956), 49.
- [11] Haythornthwaite, R.M., Beams with full end fixity, *Engineering*, (1957), 110.
- [12] Symonds, P.S., Jones, N., Impulsive loading of fully clamped beams with finite plastic deflections and strain-rate sensitivity, *Int. J. Mech. Sci.*, **14** (1972), 49.
- [13] Deruntz, J.A., Hodge, P.G., Crushing of a tube between rigid plates, *J. Appl. Mech.*, **30** (1963), 391.

- [14] Ghosh, S.K., Johnson, W., et al., On thin rings and short tubes subjected to centrally opposed concentrated loads, *Int. J. Mech. Sci.*, 23 (1981), 183.

A METHOD OF ESTIMATING THE LARGE DEFLECTION OF STRUCTURES UNDER IMPULSIVE LOADING

Hua Zili Yu Tongxi

(*Peking University, Department of Mechanics*)

ABSTRACT In this paper, based on equilibrium of energy, we suggest a new method of estimating the upper bound of final large plastic deflections of impulsively loaded structures. refer to the upper bound theorem of Martin and Ponter, we get approximate expressions of final deflections of rigid plastic circular plates, beams and circular rings by this method, and compare them with other solutions. Effects of boundary conditions are discussed. We believe that this is a very useful approximate method in engineering practice.

KEY WORDS upper bound, impulse, large deflections, structure.