第8卷 第4期　　爆 炸 与 冲 击　　Vol. 8, No. 4
1988年10月　　EXPLOSION AND SHOCK WAVES　　Oct., 1988

层状介质中受冲击载荷的裂纹问题

程 靳
(哈尔滨工业大学工程力学系)

摘要 本文对由不同正交异性材料组成的层状结构中受冲击载荷的Ⅲ型裂纹动力学问题给出了解的一般表示。文中利用结合面的边界条件,将问题中所有各量用单一未知函数表示,用积分变换方法将受冲击力作用问题化为对偶积分方程,并用Copson方法[1]给出了解。本文方法也可以应用到裂纹表面受任意动载荷的情况。

关键词 冲击,层裂,断裂动力学。

含裂纹层状板的静力学问题已有很多人进行了研究,但对于这类动力学问题研究的还很不够,一般多限于半无限体中的半无限长裂纹定常扩展问题[2-3]或各向同性体问题。对于由不同的正交异性材料组成的层板中含有限尺寸裂纹的动力学问题,人们研究的还很少。本文以Ⅲ型裂纹动力学问题为例,对弹性常数不同、厚度也不同的正交异性体组合的层板问题给出了一般解法。层板中的裂纹必需与表面平行。文中对裂纹表面受突加载荷问题给出了解,对于裂纹表面受复杂载荷问题,也完全可以利用本文方法进行求解。

一、双层板问题

设材料由双层板组成,上、下两层材料的厚度及材料常数分别为h_1、$E_{44}^{(1)}$、$E_{55}^{(1)}$、$\rho^{(1)}$及h_2、$E_{44}^{(2)}$、$E_{55}^{(2)}$、$\rho^{(2)}$,每一层材料均为正交各向异性体。正交异性体反平面问题的运动方程为

$$E_{55}^{(j)}\frac{\partial^2 w^{(j)}}{\partial x^2}+E_{44}^{(j)}\frac{\partial^2 w^{(j)}}{\partial y^2}=\rho^{(j)}\frac{\partial^2 w^{(j)}}{\partial t^2} \tag{1}$$

式中$j=1,2$;w为沿z方向的位移。本文中右上角括号内的数字j表示第j层板中相应的量。将(1)式对t作Laplace变换,再对x作Fourier变换,得

$$E_{44}^{(j)}\frac{\partial^2 \bar{w}^{(j)*}}{\partial y^2}-[E_{55}^{(j)}s^2+\rho^{(j)}p^2]\bar{w}^{(j)*}=0 \tag{2}$$

式中p、s分别为Laplace变换和Fourier变换的参变量。各量右上角的$*$号代表该量的Laplace变换,上面加一横的量代表该量的Fourier变换。方程(2)实质上已经是常微分方程,其解为

$$\bar{w}^{(j)*}(s,y,p)=A_1^{(j)}(s,p)e^{-\beta^{(j)}y}+A_2^{(j)}(s,p)e^{\beta^{(j)}y} \tag{3}$$

式中$A_1^{(j)}$、$A_2^{(j)}$为待定函数,它们需要由具体问题的边界条件(及初始条件)确定。$\beta^{(j)}(s,p)$由下式确定

$$\beta^{(j)}(s,p)=(1/E_{44}^{(j)})[E_{55}^{(j)}s^2+\rho^{(j)}p^2]^{1/2} \tag{4}$$

1987年12月6日收到原稿,1988年6月1日收到修改稿。

应指出，前面的Fourier 变换是余弦变换，因此（3）式的Fourier 变换反演为

$$w^{(j)*}(x,y,p)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}[A_1^{(j)}\exp(-\beta^{(j)}y)+A_2^{(j)}\exp(\beta^{(j)}y)]\cos(sx)ds \tag{5}$$

由正交异性体的物理方程可得应力为

$$\tau_{yz}^{(j)*}(x,y,p)=\frac{2}{\pi}E_{44}^{(j)}\int_0^{\infty}[-A_1^{(j)}\exp(-\beta^{(j)}y)+A_2^{(j)}\exp(\beta^{(j)}y)]\cdot\beta^{(j)}\cos(sx)ds \tag{6}$$

设在两层板交界处有一长为2a的裂纹，取裂纹中心为坐标原点，x轴沿交界面，y轴垂直于界面。由于层板上、下表面是自由的，因而有

$$\tau_{yz}^{(1)*}(x,h_1,p)=\tau_{yz}^{(2)*}(x,-h_2,p)=0 \quad -\infty<x<\infty \tag{7}$$

将（6）式代入（7）式得

$$A_2^{(1)}(s,p)=A_1^{(1)}(s,p)\exp(-2\beta^{(1)}h_1),\ A_2^{(2)}(s,p)=A_1^{(2)}(s,p)\exp(2\beta^{(2)}h_2) \tag{8}$$

在两种材料结合面$y=0$上，有

$$\tau_{yz}^{(1)*}(x,0,p)=\tau_{yz}^{(2)*}(x,0,p) \quad -\infty<x<\infty \tag{9}$$

将（6）式代入（9）式得

$$-E_{44}^{(1)}\beta^{(1)}A_1^{(1)}+A_{44}^{(1)}\beta^{(1)}A_2^{(1)}+E_{44}^{(2)}\beta^{(2)}A_1^{(2)}-E_{44}^{(2)}\cdot\beta^{(2)}A_2^{(2)}=0 \tag{10}$$

四个待定函数$A_1^{(1)}$、$A_2^{(1)}$、$A_1^{(2)}$、$A_2^{(2)}$必须满足（8）、（10）式的三个方程，因此它们可用单一未知函数来表达

$$\left.\begin{aligned}&A_1^{(1)}(s,p)=f_1A(s,p),\quad A_2^{(1)}(s,p)=f_1[\exp(-2\beta^{(1)}h_1)]A(s,p)\\&A_1^{(2)}(s,p)=f_1f_2A(s,p),\quad A_2^{(2)}(s,p)=f_1f_2[\exp(2\beta^{(2)}h_2)]A(s,p)\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&f_1=[1+\exp(-2\beta^{(1)}h_1)-f_2(1+\exp(2\beta^{(2)}h_2)]^{-1}\\&f_2=\frac{E_{44}^{(1)}\beta^{(1)}[\exp(-2\beta^{(1)}h_1)-1]}{E_{44}^{(2)}\beta^{(2)}[\exp(2\beta^{(2)}h_2)-1]}\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

将（11）式代入（5）（6）式,双层板中弹性动力学反平面问题位移与应力用Laplace 变换表达的一般解为

$$\left.\begin{aligned}&w^{(1)*}(x,y,p)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}[\exp(-\beta^{(1)}y)+\exp(\beta^{(1)}y-2\beta^{(1)}h_1)]f_1A\cos(sx)ds\\&w^{(2)*}(x,y,p)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}[\exp(-\beta^{(2)}y)+\exp(\beta^{(2)}y+2\beta^{(2)}h_2)]f_1f_2A\cos(sx)ds\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned}\tau_{yz}^{(1)*}(x,y,p)&=\frac{2}{\pi}E_{44}^{(1)}\int_0^\infty[\exp(\beta^{(1)}y-2\beta^{(1)}h_1)-\exp(-\beta^{(1)}y)]\beta^{(1)}f_1A\cos(sx)ds\\ \tau_{yz}^{(2)*}(x,y,p)&=\frac{2}{\pi}E_{44}^{(2)}\int_0^\infty[\exp(\beta^{2}y+2\beta^{(2)}h_2)-\exp(-\beta^{(2)}y)]\beta^{(2)}f_1f_2A\cos(sx)ds\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

在（13）（14）式中仅有 $A(s,p)$ 是未知的。显然，所论问题已化为确定单一未知函数 $A(s,p)$ 的问题。

设裂纹上、下表面在 $t=0$ 时刻突然受到突加载荷 $\tau_{yz}=-\tau_0$ 作用，在 $t>0$ 时此载荷继续作用，本问题边界条件可写为

$$\left.\begin{aligned}&\tau_{yz}^{(1)}(x,0,t)=\tau_{yz}^{(2)}(x,0,t)=-\tau_0H(t) && |x|<a\\ &w^{(1)}(x,0,t)-w^{(2)}(x,0,t)=0 && |x|\geqslant a\\ &\tau_{yz}^{(1)}(x,h_1,t)=\tau_{yz}^{(2)}(x,-h_2,t)=0 && -\infty<x<\infty\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

式中 $H(t)$ 为Heavyside单位阶跃函数。由（15）式的第三式知，我们可以利用(13)、(14)式给出的一般解。现将（15）式的前两式对 t 作Laplace变换，得

$$\left.\begin{aligned}&\tau_{yz}^{(1)*}(x,0,p)=\tau_{yz}^{(2)*}(x,0,p)=-\tau_0/p && |x|<a\\ &w^{(1)*}(x,0,p)-w^{(2)*}(x,0,p)=0 && |x|\geqslant a\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

将（13）（14）式代入（16）式中，所论问题即化为如下的对偶积分方程

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty A(s,p)\cos(sx)ds=0 && x\geqslant a\\ &\int_0^\infty sg(s,p)A(s,p)\cos(sx)ds=\frac{\pi\tau_0}{2E_{44}^{(1)}p} && 0<x<a\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

其中

$$g(s,p)=(1/s)f_1\beta^{(1)}[1-\exp(-2\beta^{(1)}h_1)]\quad(18)$$

文献［4］曾对各向同性材料组成的层板中相应的问题进行了求解，文献［5］对正交异性板的相应问题亦进行了研究，但没有求解对偶积分方程。这里我们对对偶积分方程(17)进行求解。显然，若能通过对偶积分方程（17）求得 $A(s,p)$，则由（11）式可得 $A_1^{(1)}$、$A_2^{(1)}$、$A_1^{(2)}$，$A_2^{(2)}$，从而可得本问题的应力和位移。

引入如下函数

$$f(x)=\frac{\pi\tau_0}{2E_{44}^{(1)}p}+\int_0^\infty s[1-g(s,p)]A(s,p)\left(\frac{\pi sx}{2}\right)^{1/2}J_{-1/2}(sx)ds\quad(19)$$

式中 $J_{-1/2}(sx)$ 是第一种 $-1/2$ 阶Bessel函数。注意到

$$\cos(sx)=(\pi sx/2)^{1/2}J_{-1/2}(sx)\quad(20)$$

将（19）式代入对偶积分方程（17），可得一组新的对偶积分方程

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty sA(s,p)\left(\frac{\pi sx}{2}\right)^{1/2}J_{-1/2}(sx)ds=f(x) && 0<x<a\\&\int_0^\infty A(s,p)\left(\frac{\pi sx}{2}\right)^{1/2}J_{-1/2}(sx)ds=0 && x>a\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

再引入如下定义的辅助函数 $l(t)$

$$A(s,p)\left(\frac{\pi sx}{2}\right)^{1/2}=s^{1/2}\int_0^a l(t)J_0(st)dt\tag{22}$$

式中 $J_0(st)$ 为零阶Bessel函数，$l(t)$ 满足极限 $\lim\limits_{t\to0^+}t^{-1}l(t)=0$。将（22）式分部积分可得

$$A(s,p)\left(\frac{\pi sx}{2}\right)^{1/2}=s^{-1/2}\left\{-l(t)J_{-1}(s)+\int_0^1 t\frac{d}{dt}\left[t^{-1}l(t)\right]J_{-1}(st)dt\right\}\tag{23}$$

式中 J_{-1} 为 -1 阶Bessel函数。利用如下Bessel积分

$$\int_0^\infty J_\lambda(at)J_n(bt)t^{1+n-\lambda}dt=\begin{cases}0 & 0<a<b\\ \dfrac{b^n(a^2-b^2)^{\lambda-n-1}}{2^{\lambda-n-1}a^\lambda\Gamma(\lambda-n)} & 0<b<a\end{cases}\tag{24}$$

式中 Γ 为Gamma函数。将（23）式代入对偶积分方程（21）式，并利用（24）式，可得

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x}}{\Gamma(1/2)}\int_0^x\frac{d}{dt}\left[\frac{l(t)}{t}\right]\frac{dt}{(x^2-t^2)^{1/2}}.\tag{25}$$

方程（25）是Abel型积分方程，其解人们早已研究得很充分，并可写为

$$l(t)=\frac{\sqrt{2}t}{\Gamma(1/2)}\int_0^t\frac{\sqrt{x}f(x)dx}{(t^2-x^2)^{1/2}}\tag{26}$$

利用如下等式

$$\int_0^t x^{\nu+1}J_\nu(sx)\frac{dx}{(t^2-x^2)^{1-\alpha}}=2^{\alpha-1}\Gamma(s)s^{-\alpha}t^{\alpha+\nu}J_{\alpha+\nu}(st)$$

将（19）式代入（26）式，经适当变化后可得如下第二类Fredholm积分方程

$$N^*(\xi,p)+\int_0^1 K(\xi,\eta,p)N^*(\eta,p)d\eta=\sqrt{\xi}\tag{27}$$

相应的，（23）式成为

$$A(s,p)=\frac{\pi\tau_0a^2}{2E_{44}^{(1)}p}\int_0^1\sqrt{\xi}N^*(\xi,p)J_0(sa\xi)\,d\xi\tag{28}$$

式中 N^* 是第二类Fredholm积分方程（27）式的解，，而（27）式的积分核为

$$K(\xi,\eta,p)=\sqrt{\xi\eta}\int_0^\infty s\left[g\left(\frac{s}{a},p\right)-1\right]J_0(s\xi)J_0(s\eta)ds\tag{29}$$

上面的（28）式即为本问题的解。将（28）式求得的 $A(s,p)$ 代入（13）（14）式即得

两种材料中的位移场及应力场。需要说明，前面的 Fourier 变换之所以用余弦变换，是因为这一类问题是 x 的偶函数。

二、多层板问题

设有 $m+n$ 层不同正交异性材料及不同厚度板组成的多层复合板，其中含有一个长为 2a 的裂纹，裂纹与板面平行。取裂纹中心为坐标原点，y 轴与板面垂直。在裂纹面的上部（$y>0$）有 m 层板，各板厚依次为 h_1、h_2、…、h_m，裂纹面下部有 n 层纹，各板厚依次为 h_{m+1}、h_{m+2}、…、h_{m+n}。裂纹处于第一层板及第 $m+1$ 层板交界面上。现在我们研究这种多层板中Ⅲ型裂纹的动力学问题。

层板上表面（第 m 层板的上表面）及下表面（第 $m+n$ 层板的下表面）是自由的，用 Laplace 变换式可将这一条件写为

$$\tau_{yz}^{(m)*}\left(x,\sum_{i=1}^{m}h_i,p\right)=\tau_{yz}^{(m+n)*}\left(x,-\sum_{i=m+1}^{m+n}h_i,p\right)=0 \qquad -\infty<x<\infty \tag{30}$$

式中右上角括号内的数字代表板的号数，* 号代表 Laplace 变换。在各层的交界面（不包括含裂纹面）τ_{yz} 相等，而且位移应连续，因而有

$$\left.\begin{aligned}&\tau_{yz}^{(j)*}\left(x,\sum_{i=1}^{j}h_i,p\right)=\tau_{yz}^{(j+1)*}\left(x,\sum_{i=1}^{j}h_i,p\right) \qquad -\infty<x<\infty\\&w^{(j)*}\left(x,\sum_{i=1}^{j}h_i,p\right)=w^{(j+1)*}\left(x,\sum_{i=1}^{j}h_i,p\right) \qquad -\infty<x<\infty\\&j=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$$\left.\begin{aligned}&\tau_{yz}^{(j)*}\left(x,-\sum_{i=m+1}^{j}h_i,p\right)=\tau_{yz}^{(j+1)*}\left(x,-\sum_{i=m+1}^{j}h_i,p\right) \qquad -\infty<x<\infty\\&w^{(j)}\left(x,-\sum_{i=m+1}^{j}h_i,p\right)=w^{(j+1)*}\left(x,-\sum_{i=m+1}^{j}h_i,p\right) \qquad -\infty<x<\infty\\&j=m+1,\ m+2,\ \cdots,\ m+n-1\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

在含裂纹的界面（$y=0$）上，有

$$\tau_{yz}^{(1)*}(x,0,p)=\tau_{yz}^{(m+1)*}(x,0,p) \qquad -\infty<x<\infty \tag{33}$$

（30）式有二个方程，（31）式有$2(m-1)$个方程，（32）式有$2(n-1)$个方程，（33）式有一个方程，因此共有$2(m+n)-1$个方程，而且这些方程都是独立的。由（5）、（6）式知，每块正交异性板有二个未知函数 $A_1^{(j)}$ 与 $A_2^{(j)}$。本问题裂纹上部有 m 层板，裂纹下部有 n 层板，因此共有 $m+n$ 层板。$m+n$ 层板共有未知函数 $2(m+n)$ 个，但它们必须满足（30）～（33）式的 $2(m+n)-1$ 个独立方程。将（5）、（6）式代入（30）～（33）式，得如下线性代数方程组

$$-A_1^{(m)}\exp\left\{-\beta^{(m)}\sum_{i=1}^{m}h_i\right\}+A_2^{(m)}\exp\left\{\beta^{(m)}\sum_{i=1}^{m}h_i\right\}=0$$

$$-A_1^{(m+n)}\exp\left\{\beta^{(m+n)}\sum_{i=m+1}^{m+n}h_i\right\}+A_2^{(m+n)}\exp\left\{-\beta^{(m+n)}\sum_{i=m+1}^{m+n}h_i\right\}=0$$

$$E_{44}^{(j)}\beta^{(j)}\left\{-\exp\left[-\beta^{(j)}(-1)^b\sum_{i=a}^{j}h_i\right]A_1^{(j)}+\exp\left\{\beta^{(j)}(-1)^b\sum_{i=a}^{j}h_i\right\}A_2^{(j)}\right.$$

$$+E_{44}^{(j+1)}\beta^{(j+1)}\left\{\exp\left[-\beta^{(j+1)}(-1)^b\sum_{i=a}^{j}h_i\right]A_1^{(j+1)}\right.$$

$$\left.-\exp\left[\beta^{(j+1)}(-1)^b\sum_{i=a}^{j}h_i\right]A_2^{(j+1)}\right\}=0$$

$$\exp\left[-\beta^{(j)}(-1)^b\sum_{i=a}^{j}h_i\right]A_1^{(j)}+\exp\left[\beta^{(j)}(-1)^b\sum_{i=a}^{j}h_i\right]A_2^{(j)}$$

$$-\exp\left[-\beta^{(j+1)}(-1)^b\sum_{i=a}^{j}h_i\right]A_1^{(j+1)}-\exp\left[\beta^{(j+1)}(-1)^b\sum_{i=a}^{j}h_i\right]A_2^{(j+1)}=0$$

$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1,\ m+1,\ m+2,\ \cdots,\ m+n-1$；当$j<m$时，$a=1$，$b=0$；当$j>m$时，$a=m+1$，$b=1$。

$$E_{44}^{(1)}\beta^{(1)}\left[-A_1^{(1)}+A_2^{(1)}\right]=E_{44}^{(m+1)}\beta^{(m+1)}\left[-A_1^{(m+1)}+A_2^{(m+1)}\right] \tag{34}$$

上面是$2(m+n)-1$个方程组成的线性代数方程组，未知量是$2(m+n)$个，因此所有这些未知量可利用（34）式用单一未知函数来表达

$$A_i^{(j)}=(\Delta_i^{(j)}/\Delta_1^{(1)})A_1^{(1)},\quad i=1,2;\ j=1,2,\cdots,\ m+n \tag{35}$$

式中$\Delta_i^{(j)}$为方程组（34）的系数行列式。将（35）式代入（5）、（6）式，得

$$w^{(j)*}(x,y,p)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{\Delta_1^{(j)}}{\Delta_1^{(1)}}\exp(-\beta^{(j)}y)+\frac{\Delta_2^{(j)}}{\Delta_1^{(1)}}\exp(\beta^{(j)}y)\right]A_1^{(1)}(s,p)\cos(sx)ds \tag{36}$$

$$\tau_{yz}^{(j)*}(x,y,p)=\frac{2}{\pi}E_{44}^{(j)}\int_0^\infty\left[-\frac{\Delta_1^{(j)}}{\Delta_1^{(1)}}\exp(-\beta^{(j)}y)\right.$$

$$\left.+\frac{\Delta_2^{(j)}}{\Delta_1^{(1)}}\exp(\beta^{(j)}y)\right]\beta^{(j)}A_1^{(1)}(s,p)\cos(sx)ds \tag{37}$$

可见，由不同正交异性材料组成的多层复合板，其反平面弹性动力学问题最终也化为确定单一未知函数$A(s,p)$的问题。

设层板在$t<0$时处于静止，在$t=0$时刻突然受到突加载荷作用，$t>0$时此载荷继续作用。其边界条件可表为

$$\left.\begin{aligned}&\tau_{yz}^{(1)}(x,0,t)=\tau_{yz}^{(m+1)}(x,0,t)=-\tau_0H(t) && |x|<a\\ &w^{(1)}(x,0,t)-w^{(m+1)}(x,0,t)=0 && |x|\geq a\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

将（38）式对t作Lapace变换，得

$$\left.\begin{aligned}&\tau_{yz}^{(1)*}(x,0,p)=\tau_{yz}^{(m+1)*}(x,0,p)=-\tau_0/p && |x|<a\\ &w^{(1)*}(x,0,p)-w^{(m+1)*}(x,0,p)=0 && |x|\geq a\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

将(36)(37)式代入边界条件的Laplace变换式(39)中(在(39)的第一式中只利用$\tau_{yz}^{(1)*}(x,0,p)$

$=-\tau_0/p$，因为$\tau_{yz}^{(1)*}(x,0,p)=\tau_{yz}^{(m+1)*}(x,0,p)$已由（33）式满足），得对偶积分方程

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty\Big[1-\frac{\Delta_2^{(1)}}{\Delta_1^{(1)}}\Big]\beta^{(1)}A_1^{(1)}(s,p)\cos sx)ds=\frac{\pi\tau_0}{2E_{44}^{(1)}p} && 0<x<a\\ &\int_0^\infty\Big[\frac{\Delta_1^{(1)}}{\Delta_1^{(1)}}+\frac{\Delta_2^{(1)}}{\Delta_1^{(1)}}-\frac{\Delta_1^{(m+1)}}{\Delta_1^{(1)}}-\frac{\Delta_2^{(m+1)}}{\Delta_1^{(1)}}\Big]A_1^{(1)}(s,p)\cos(sx)ds=0 && x\geqslant a\end{aligned}\right\}\tag{40}$$

对偶积分方程（40）是不规范的，为了进行求解，我们将（40）式化为如下形式的对偶积分方程

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty sg(s,p)A(s,p)\cos(sx)ds=\frac{\pi\tau_0}{2E_{44}^{(1)}p} && 0<x<a\\ &\int_0^\infty A(s,p)\cos(sx)ds=0 && x\geqslant a\end{aligned}\right\}\tag{41}$$

式中

$$A(s,p)=[1+(\Delta_2^{(2)}/\Delta_1^{(1)})-(\Delta_1^{(m+1)}/\Delta_1^{(1)})-(\Delta_1^{(m+1)}/\Delta_1^{(1)})]A_1^{(1)}(s,p)\tag{42}$$

$$g(s,p)=\frac{[\Delta_1^{(1)}-\Delta_2^{(2)}]\beta^{(1)}}{s[\Delta_1^{(1)}+\Delta_2^{(1)}-\Delta_1^{(m+1)}-\Delta_1^{(m+1)}]}$$

可以看出，对偶积分方程（41）与（17）式形式完全相同，唯一的区别仅在于$g(s,p)$不同。由对偶积分方程（17）的求解过程（18）～（29）式可以看出，不同的$g(s,p)$并不影响求解过程，因而我们可以用与前面完全相同的方法求得对偶积分方程（14）的解为

$$A(s,p)=\frac{\pi\tau_0a^2}{2E_{44}^{(1)}p}\int_0^1\sqrt{\xi}N^*(\xi,p)J_0(sa\xi)d\xi\tag{44}$$

式中J_0为第一类零阶 Bessel 函数，N^*是如下经典的第二类 Fredholm 积分方程的解

$$N^*(\xi,p)+\int_0^1K(\xi,\eta,p)N^*(\eta,p)d\eta=\sqrt{\xi}\tag{45}$$

其积分核为

$$K(\xi,\eta,p)=\sqrt{\xi\eta}\int_0^\infty s\Big[g\Big(\frac{s}{a},p\Big)-1\Big]J_0(s\xi)J_0(s\eta)ds\tag{46}$$

至此，问题已解。将求得的$A(s,p)$代入（42）、（36）、（37）式，即解得τ_{yz}^*及w^*，求出它们的反演，即为应力τ_{yz}及位移w。

三、几点说明

1．本文仅给出层板中受突加载荷作用问题的解。于对裂纹表面受其它复杂载荷作用问题，仍可用本文方法求解。由上面的求解过程可以看出，对不同问题仅是应力边界的值不同，因而仅影响对偶积分方程（17）、（41）的右端，求解方法不变。限于篇幅，这里不能对这一类问题一一给出解。

2．本文给出的解中含有经典的第二类 Fredholm 积分方程，这并不影响本文的意义。因为众所周知，凡是用第二类 Fredholm 积分方程表达的式子，都很容易用来作数值计算，其 Laplace 变换反演也是很容易的，这方面早已有通用程序。对于本文所论问题，只要具

体的给出各层材料的物理常数及层厚，则可以给出其具有足够精度的解的值。由于本文目的在于给出一般情况下的解，而且具体问题中层板的层数、厚度及材料常数可以有无穷多种组合，因此具体给出这些含裂纹层板在突加载荷下的解的数值，不是本文的目的。事实上，利用本文的解，很容易算出任何含裂纹层板受冲击问题的解，这只需进行简单的数值计算即可。

3.本文仅讨论裂纹表面受动载问题的解。实际问题中裂纹表面是自由表面，不受载荷。这只需要利用叠加原理，在本文解中叠加一个相应的无裂纹问题的应力场即可。

4.本文与文献[4，5]不同点在于本文所论之层板是由不同厚度的不同正交异性材料所组成。文中不仅导出了这一类问题的对偶积分方程，而且详细地进行了求解，并且这一求解过程具有较普遍的意义。

5.本文适用于任意种不同材料、不同厚度正交异性板组合的层板。裂纹可处于任意层界面上或层内（在层内时，只需设第一及第 $m+1$ 层材料相同即可），但裂纹必须与表面平行。由各向同性体组成的含裂纹层板受冲击问题，可作为本文的特例。

参 考 文 献

[1] Copson, E.T., *Proc. Glas. Math. Asso.*, 5 (1961), 19.

[2] Atkinson, C.A., *Archires of mechanics*, 27 (1975), 639.

[3] Черепанов,Г. П., Механика.Разрушения Коипозиционных Намериалов, Москва, (1983).

[4] 程 靳，层状材料的裂纹动力学问题，哈工大学报，(4) (1986)，12.

[5] Cheng Jin Stress field in a orthotropic Laminated medium with a crack subject to impact loads. *Proc. ISCMS.*, (1986), 653.

CRACK IN LAMINATED MEDIA UNDER IMPACT LOADING

Cheng Jin

(Harbin Institute of Technology)

ABSTRACT In the present paper the general representations for the solution of the dynamical crack problems of the laminated media consist of different orthotropic layer are derived. Using conditions of the welding surface, we express all the quantities in terms of a single unknown function. Using method of integral transform, we formulate the impact loading problem as dual integral equations. Using the Copsons method, the solution is derived. The method in the paper is not difficult to generalize for the case of an arbiritrary loading applied to the crack.

KEY WORDS impact, slabbing, dynamic of fracture.