

冲击波绕过外凸壁面后物理参数的简化计算

齐世福 张友龙
(工程兵工程学院)

摘要 冲击波在折转角为 α 的斜坡上绕射时,由于外凸壁面的影响,在壁面附近形成了一个多波作用的复合区,准确地确定各区中的物理参数无论是在理论分析上还是在实际应用方面都是非常有意义的。但是,对于这样一个多波作用的复合区,欲准确求解各区中之物理参数,乃是相当复杂的。本文提出了一种求解的简化计算方法,经上机计算,其计算值与实测值相当吻合。谨供从事爆炸力学研究的同行参考。

关键词 外凸壁面;折转角;多波作用复合区。

1. 流动模型与基本假设

1. 流动模型

压力为 p_1 的空气冲击波在折转角为 α 的斜坡壁面上绕射时,实验中观察到的流动图象(高速摄影照片)可用图1表示。根据流动状态的差异,我们将其流动区域划分为(0)、(1)、(2)、(3)、(4)五个区(见图1)。其中,(0)区为未扰动区;(1)

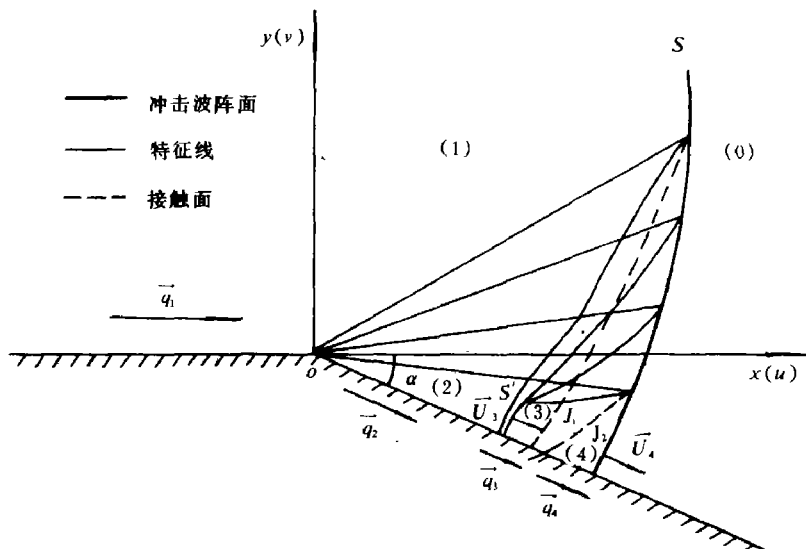


图1 流动图象

1988年3月23日收到原稿,5月28日收到修改稿。

区为冲击波扰动后的区域; (2) 区为 Prandtl - Meyer Flows 后的区域; (3) 区为反射压缩波形成的冲击波 S' 与接触面 J_1 之间的区域; (4) 区为冲击波 S 绕过拐角后与壁面接触的冲击波阵面与接触面 J_2 之间的区域。此外, q 表为质点流速, 下标为所在区域; S 与 S' 分别表为冲击波与反射压缩波形成的冲击波, U_3 与 U_4 分别表其波阵面速度; J_1 与 J_2 分别表为绕射前后质点接触面, $J_1 J_2$ 可视为一间断面。

2. 基本假定

- (1) 壁面为理想刚性壁;
- (2) 气体为多方气体 (Polytropic Gases), 取 $r = 1.4$ (r 为绝热指数);
- (3) 冲击波阵面 S 与反射冲击波阵面 S' 均与斜坡壁面正交。

2. 各区物理参数的确定

1. (1) 区参数

该区域中各参数可据 (0) 区的已知条件, 按照冲击波过渡关系式确定, 此不赘述。

2. (2) 区参数

(1) 区到 (2) 区是通过中心稀疏波 (右伸 Mach 波) 过渡的, 属于 Prandtl - Meyer Flows 的一种情况, 因而该区参数可用相应的解析式^[1] 或用速度图法^[2] (Hodograph Method) 确定, 故亦不赘述。

3. (3) 区和 (4) 区参数

确定 (3) 区和 (4) 区中各参数, 是求解多波作用复合区各物理参数的关键, 亦为本文研究的重点。

(1) 分析。因两冲击波阵面 (S 与 S') 均与斜坡壁面正交, 于是, (2) 区到 (3) 区的过渡以及 (0) 区到 (4) 区的过渡均可视为正冲击波过渡。由正冲击波过渡性质知, (2) 区与 (3) 区及 (0) 区与 (4) 区两区参数之间均满足质量守恒、动量守恒及能量守恒三个基本关系式。由于 (3) 区到 (4) 区是通过接触面过渡的, 因此, 两区之间应满足压力相等、质点速度相同两个基本关系式。但是, 两个冲击波在壁面处的压力及波阵面速度均未知, 且 (3) 区中 ρ_3 、 ρ_3 、 v_3 及 (4) 区中 ρ_4 、 ρ_4 、 v_4 亦未知, 即有八个未知数: ρ_3 、 ρ_4 、 U_3 、 U_4 、 ρ_3 、 ρ_4 、 v_3 (或 q_3) 和 v_4 (或 q_4)。按照上述分析可列出八个方程式 (为便于解析, 将图 1 中坐标 xOy 按顺时针旋转 α 角度), 即

(2) 区到 (3) 区

$$\rho_3 v_3 = \rho_2 v_2 \quad (1)$$

$$\rho_3 + \rho_3 v_3^2 = \rho_2 + \rho_2 v_2^2 \quad (2)$$

$$v_2 v_3 = \mu^2 v_2^2 + (1 - \mu^2) c_2^2 \quad (3)$$

(0) 区到 (4) 区

$$\rho_0 v_0 = \rho_4 v_4 \quad (4)$$

$$\rho_4 + \rho_4 v_4^2 = \rho_0 + \rho_0 v_0^2 \quad (5)$$

$$v_0 v_4 = \mu^2 v_0^2 + (1 - \mu^2) c_0^2 \quad (6)$$

(3) 区到 (4) 区

$$q_3 = q_4 \quad (7)$$

$$p_3 = p_4 \quad (8)$$

式中, $\mu^2 = (r-1)/(r+1)$; ρ —密度; c —音速; p —压力; q —质点速度; v —质点相对

对于波阵面的流速(相对速度)。各参数之下标均表为所在区域。

上述八个未知数对应八个方程式,理论上是可以求解的。但由于方程组的非线性关系,直接解此方程组不仅繁琐,而且容易出错,故有必要寻求一种简单易行、能够求出确切答案的解析方法。

(2) 简化计算方法与步骤。详细研究分析这八个关系式,并加以推导变换,最终可得到一个只含一个未知数 M_2 (M_2 为相对 Mach 数) 的一元方程式

$$\left[M_2^2 \frac{p_2}{p_0} + \left(1 - \frac{p_2}{p_0} \right) \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} \right]^{1/2} - \left[M_3^2 \frac{p_2}{p_0} + \left(1 - \frac{p_2}{p_0} \right) \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} \right]^{-1/2} + \frac{c_2}{c_0} \left(M_2 - \frac{1}{M_2} \right) + \frac{q_2}{(\mu^2 - 1)c_0} = 0 \quad (9)$$

根据(9)式,在已知(0)区参数(c_0 、 p_0 、 r)及(1)、(2)两区参数条件下即可求出相对 Mach 数 M_2 。然后,按照有关关系式,可依次确定(3)、(4)两区之物理参数。(9)式的推导过程及(3)、(4)区各参数的具体确定方法如下叙述。

由图1得知,(3)区到(2)区过渡时,(3)区为波前,(2)区为波后;(0)区到(4)区过渡时,(0)区为波前,(4)区为波后。按照多方气体冲击波关系式^[2]有

$$\begin{cases} p_3 = [(1 + \mu^2)M_2^2 - \mu^2]p_2 & (10) \\ p_4 = [(1 + \mu^2)M_0^2 - \mu^2]p_0 & (11) \end{cases}$$

其中, $M_0 = \frac{|v_0|}{c_0}$, $M_2 = \frac{|v_2|}{c_2}$, $M_3 = \frac{|v_3|}{c_3}$ 均为相对马赫数。

由接触面条件($p_3 = p_4$)得

$$M_0 = \left[M_2^2 \frac{p_2}{p_0} + \left(1 - \frac{p_2}{p_0} \right) \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} \right]^{1/2} \quad (12)$$

气流相对速度为

$$v_i = u_i - U_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (13)$$

根据前面的假定得知,(2)、(3)、(4)区中靠近壁面处的气流质点均平行于其斜壁面运动,则有 $u_i = q_i$ ($i = 2, 3, 4$),其中 u_i 为平行于 x 轴(图1坐标按顺时针旋转 α 角)的气流速度。考虑到冲击波 S' 及(3)区气流运动规律,(2)、(3)区相对速度可分别取为

$$\begin{cases} v_2 = q_2 + U_3 & (14) \\ v_3 = -q_3 + U_3 & (15) \end{cases}$$

从而有

$$\begin{cases} u_3 = U_3 - v_3 & (16) \\ u_4 = U_4 + v_4 & (17) \end{cases}$$

用(3)、(6)两式导出的 v_3 、 v_4 代入上式,得

$$\begin{cases} u_3 = U_3 - \mu^2 v_2 + (1 - \mu^2) \frac{c_2^2}{v_2} & (18) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_4 = U_4 + \mu^2 v_0 + (1 - \mu^2) \frac{c_0^2}{v_0} & (19) \end{cases}$$

又据接触面 (J_1, J_2) 条件知: $q_3 = -q_4$, 即 $u_3 = -u_4$, 可得到

$$\mu^2 v_2 + (1 - \mu^2) \frac{c_2^2}{v_2} - U_3 = U_4 + \mu^2 v_0 + (1 - \mu^2) \frac{c_0^2}{v_0} \quad (20)$$

在 (0) 区中, 根据流动模型知 $q_0 = 0$ (静止), 即 $v_0 = -U_3$ 。因 $U_3 < 0$, 则 $v_0 > 0$ 。由 $M_0 = |v_0| / c_0$ 知, $v_0 = -M_0 c_0$, $U_3 = -v_0 = M_0 c_0$ 。

在 (2) 区中, $v_2 = q_2 + U_3$, 显然 $v_2 > 0$, 据 $M_2 = |v_2| / c_2$ 有 $v_2 = M_2 c_2$, 则 $U_2 = v_2 - q_2 = M_2 c_2 - q_2$ 。将 $v_0 = -M_0 c_0$, $v_2 = M_2 c_2$, $U_3 = M_2 c_2 - q_2$, $U_4 = M_0 c_0$ 代入 (20) 式, 同时考虑到 (12) 式, 然后稍加整理即得 (9) 式。

(3)、(4) 两区物理参数的具体确定方法是: 在已知 (0) 区参数以及求出 (1)、(2) 两区参数的前提下, 按 (9) 式求出 M_3 , 再按 (12) 式求出 M_0 , 进一步可求出 v_0 、 v_2 、 U_3 、 U_4 、 u_3 、 u_4 , 尔后按 (10)、(11) 式分别求出 p_3 和 p_4 。最后, 据 $\rho_0 v_0 = \rho_4 v_4$ 及 $\rho_2 v_2 = \rho_3 v_3$ 两个关系式, 即可确定 ρ_3 和 ρ_4 。

此外, 尚须说明: 因篇幅所限, 本文仅考虑了 $p_1 \geq 4.9034 \times 10^5 \text{ Pa}$ 的情况。当 $p_1 < 4.9034 \times 10^5 \text{ Pa}$ 时, (1) 区的气体流动 Mach 数小于 1, 对于这种情况的计算可参阅有关书籍, 鉴于篇幅及应用价值, 本文未加介绍。

3. 简化计算结果评价

根据上述简化计算方法, 我们曾按照空气初参数为 $p_0 = 9.8067 \times 10^4 \text{ Pa}$, $\rho_0 = 1.226 \text{ kg/m}^3$, $r = 1.4$ 、 $c_0 = \sqrt{r \cdot p_0 / \rho_0} = 334.664 \text{ m/s}$ 的条件 ((0) 区为静止状态), 对 $5 \leq p_1 / p_0 \leq 30$ 及 $0^\circ \leq \alpha \leq 30^\circ$ 的各种情况上机计算, 得到了一系列令人满意的计算结果, 取得了近 4000 个数据, 现摘录其中一部分, 见表 1。以供参考。

为验证这种简化计算结果的正确性, 我们将其计算值与同样条件下的实验值^[3]进行了比较 (见图 2)。图中 M_0 、 M_3 分别表示未受扰动、已受扰动时冲击波的 Mach 数, 发现两者十分接近, 计算结果精确度较高。从图上可以看出, 在小角度时两条曲线拟合的很好 (趋于重合), 即使是大角度情况, 其误差也很小。这事实说明, 此种简化计算方法不仅具有计算简便、避免因繁琐解析带来的误差甚至错误, 而且计算结果精度亦较高, 十分接近实测值。因此, 它具有较好的使用价值, 可供有关从事这方面研究人员参考。

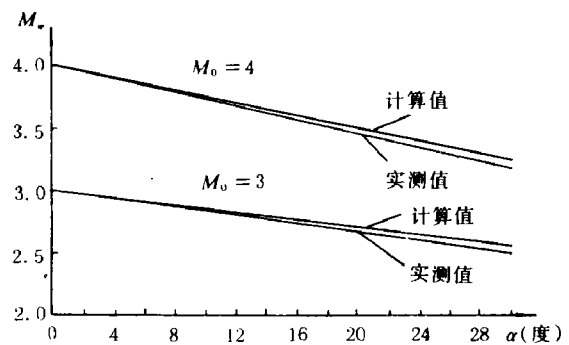


图2 简化计算结果 (计算值) 与实测值的比较

表 1 冲击波绕过外凸壁面后的物理参数

P_1/P_0	α (度)	ρ_2/ρ_0	ρ_3/ρ_0	U_2/c_0	U_3/c_0	ρ_2/ρ_0	ρ_3/ρ_0	ρ_4/ρ_0
5	0	5.0000	5.0000	0.0258	2.1044	2.8179	2.8181	2.8181
	10	2.8790	1.7708	0.2323	2.0572	1.8999	2.7151	2.7505
	20	1.7399	1.3720	0.3019	1.9724	1.3259	2.5040	2.6255
	30	0.9972	3.8531	0.2958	1.8562	0.8909	2.1843	2.4478
10	0	10.0000	10.0000	0.5582	2.9519	3.8121	3.8124	3.8124
	10	6.0923	9.2701	0.7293	2.8441	2.6760	3.6039	3.7079
	20	3.5512	8.2992	0.7998	2.6938	1.8199	3.2792	3.5523
	30	1.9304	7.1387	0.7776	2.5023	1.1775	2.8154	3.3361
20	0	20.0000	20.0000	1.1913	4.1575	4.6534	4.6536	4.6538
	10	11.8756	18.1355	1.3730	3.9608	3.2071	4.3301	4.5499
	20	6.6202	15.8823	1.4339	3.7089	2.1127	3.8723	4.4005
	30	3.3972	13.3166	1.3694	3.4996	1.3118	3.2425	4.1881
30	0	30.0000	30.0000	1.6310	5.0848	5.0272	5.0275	5.0277
	10	17.5479	26.9681	1.8302	4.8227	3.4279	4.6486	4.9384
	20	9.5797	23.3986	1.8863	4.4943	2.2246	4.1251	4.8095
	30	4.7885	19.3995	1.7899	4.0952	1.3556	3.4133	4.6220

本文曾得到苏挺英教授的热情指导和大力帮助，在此深表谢意。

参 考 文 献

- [1] 张连玉, 爆炸气体动力学基础(上册), 北京工业学院(1983)。
 [2] Courant, R., Friedrichs, K.O., *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience Publishers Inc., New York, (1976)。
 [3] Shew, B.W., *Journal of Fluid Mechanics*, 29 (1967), 304.

**A SIMPLIFIED CALCULATION OF PHYSICAL PARAMETERS
OF A PLANAR SHOCK WAVE FLOWING AROUND
AN OUT BUMPED SURFACE**

Qi Shifu Zhang Youlong

(Engineering Institute of Engineers Corps)

ABSTRACT While a planar shock wave is diffracting around an oblique plane with a turning angle α , a multi-wave-interaction region is formed nearby the plane because of the effect of the out bumped surface. It is very meaningful to analysis and determine the physical parameters of each region. However it is quite complicated to find exactly, in such a multi-wave-interaction region. In this article, the author suggests a simplified method for finding the answer. This method has been proved by the computer. The computer's calculated results completely in accord with the experimental values. The method can be used as a reference for those who are researching the dynamics of explosion.

KEY WORDS out bumped surface, turning angle, multi-wave-interaction region.