

# 二维定常爆轰波的C-J条件与流线形状

沈石

(长沙工学院应用物理系)

丁傲

(北京理工大学力学工程系)

**摘要** 本文在W-K模型的基础上,采用自然坐标系,导出了二维定常爆轰波的声速面条件,即二维C-J条件。经典的一维C-J条件和准一维C-J条件是它的两个特例。声速面条件又可作为判定流线形状正确与否的必要条件。通过分析讨论,认为在二维定常爆轰波的有效反应区中,流线应呈先向内,后向外偏转的波纹型形。在确定声速面形状的同时,有效反应区的流场分布也随之确定。

**关键词** 二维爆轰 爆轰理论 直径效应 流线

## 一、引言

对于有限直径的柱型装药,其爆速随直径减小而下降。当直径小于其临界直径时,爆轰波将不能自持传播。这种现象称为二维爆轰的直径效应,它对于各种爆炸系列的精密设计无疑是重要的。

人们从四十年代末开始研究这个课题。在众多的物理模型中<sup>[1-4]</sup>,应用最多的是Wood-Kirkwood<sup>[5]</sup>提出的W-K模型。该模型将前导冲击波阵面的曲率半径 $R$ 作为一个独立变量,用冲击波关系式求冲击波阵面上的量,其后反应区中的流动,用带化学反应的二维定常流体力学方程组求解。W-K模型实际上是ZND模型的二维扩展,但在具体应用中,只有在小膨胀假定下,才能求解对称轴附近流场。通常研究着重于爆速 $D$ ,装药直径 $d$ 和 $R$ 之间的变化规律。

同一维平面爆轰一样,二维爆轰波的自持,定常传播条件也认为是稀疏波不能进入反应区,即存在一个声速面。本文主要讨论的就是声速面条件,即二维C-J条件和流线形状。随之可求得二维定常爆轰波的声速面形状以及各物理量沿流线的分布。

## 二、二维C-J条件

对于二维定常爆轰波,经典的一维C-J理论不再适用。而只适用于对称轴附近小膨胀区域的准一维C-J条件又不能用于研究二维定常爆轰波反应区的声速面。本文在W-K模型的基础上,在定常、无粘、无热传导和体积力的假定下,采用自然坐标系(见图1)。那么,从流体力学基本方程可得

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial l} + \rho U \frac{\partial \theta}{\partial n} + \frac{\rho U}{r} \sin \theta = 0 \quad (1)$$

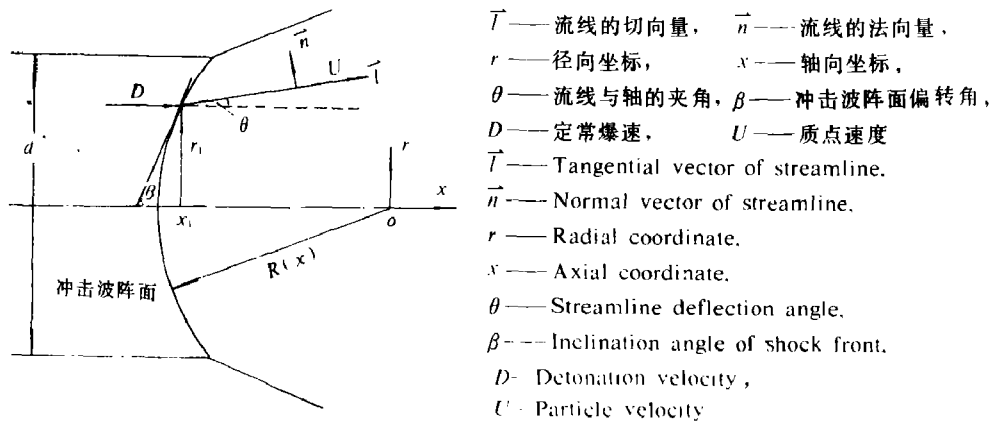


图 1 自然坐标系与柱坐标系

Fig. 1 Natural and rectangular coordinate systems

$$U \frac{\partial U}{\partial l} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} = 0 \quad (2)$$

从热力学关系式可得<sup>[6]</sup>

$$\frac{\partial p}{\partial l} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial l} + \rho c^2 \sigma \frac{\partial \lambda}{\partial l} \quad (3)$$

其中  $p$  是压力,  $\rho$  是密度,  $c$  是冻结声速,  $\sigma = \gamma Q / c^2$  是热性系数,  $Q$  是瞬时反应热,  $\gamma$  是 Grüneisen 系数,  $\lambda$  是化学反应度。从以上三式可得

$$\frac{1}{\rho U^2} \frac{\partial p}{\partial l} = \frac{(\sin \theta / r) + (\partial \theta / \partial n) - \sigma \partial \lambda / \partial l}{1 - (U/c)^2} \quad (4)$$

在声速面上, 方程 (4) 式的分母为零, 而  $\partial p / \partial l$  为有限量, 所以 (4) 式的分子必须为零。有

$$\begin{cases} U = c & (5) \\ \sigma \partial \lambda / \partial l = \sin \theta / r + \partial \theta / \partial n & (6) \end{cases}$$

(5) 式和 (6) 式为二维定常爆轰波所必须满足的声速面条件, 即二维 C-J 条件。

### 三、流线形状

要求出声速面的形状, 必须找到沿每条流线上满足二维 C-J 条件的点。这需要利用守恒方程沿流线积分。在以往的研究中, 由于只研究对称轴附近的小膨胀区域, 一般都假定流线为直线<sup>[7]</sup>。本文研究的是二维定常爆轰波反应区的全流场, 假定流线方程为

$$r = r_1 + (x - x_1) \tan \theta_1 + g \cdot (x - x_1)^2 \quad (7)$$

下标“1”表示冲击波阵面上的量。  $\theta_1$  可由冲击波关系式确定。从图 1 可知,  $\theta_1$  大于零, 只有在对称轴上或平面冲击波情况下,  $\theta_1$  才等于零。令

$$\Sigma_1 \equiv \sin \theta / r + \partial \theta / \partial n \quad (8)$$

$$\Sigma_2 = \sigma \frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{Qr}{c^2 U} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \quad (9)$$

$$\Sigma_3 = \frac{Qr}{U^3} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \quad (10)$$

声速面条件可变为

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3 \quad (11)$$

即沿任意一条流线，存在  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  三条曲线相交的一个点——声速点  $s$  (见图 2)

当  $g = 0$  时，流线为直线。本文用直线对实验测得的两种情况进行了计算。沿不同流线，在  $U = c$  (即  $\Sigma_2 = \Sigma_3$ ) 之点上， $\Sigma_1$  与  $\Sigma_2$  之差见图 3。

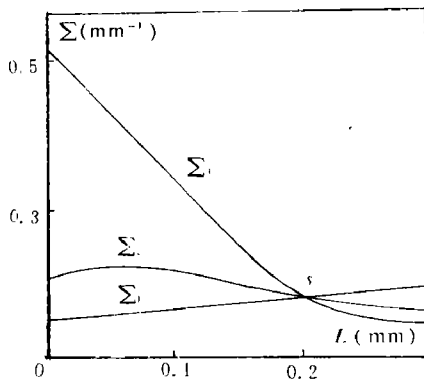


图 2 沿流线三条  $\Sigma$  曲线交于声速点  $s$ ,  $L$ : 流线长度

Fig. 2 Along a streamline, which length is  $L$ , three  $\Sigma$  curves intersect at sonic point  $s$

从 (8) 式可知， $\theta$  值变大时， $\Sigma_1$  值增大，反之， $\Sigma_1$  值减小。从图 3 可见，在直线条件下，只有在  $\theta$  值较大的区域，即小直径药柱的边缘附近，才有可能满足声速面条件 (11) 式。一般情况下， $\Sigma_1$  都小于  $\Sigma_2$ ，这说明在声速面附近， $\theta$  角应该增大，即流线应向外偏转。

当  $g \neq 0$  时，流线为二次曲线。令  $\Delta g = (dg/dr_1) dr_1$  它表示不同流线的  $g$  值的变化量，其主要影响区域在反应区后部，即声速面附近。 $\Delta g > 0$  表示流线有发散的趋势。本文对  $g$  和  $\Delta g$  在反应区中不同流线上的取值范围作了探索性计算，图 4 为典型计算结果。下面将讨论  $g$  与  $\Delta g$  取何种组合才能使得沿每条流线  $\Sigma_1$  曲线都经过相应的  $\Sigma_2 = \Sigma_3$  之点，并且  $g$  与  $\Delta g$  的变化是合理的。

1.  $g > 0, \Delta g > 0$ : 这种情况在对称轴附近区域能使  $\Sigma_1$  通过  $\Sigma_2 = \Sigma_3$  之点，但在边缘区域却很难做到这一点，而且  $g$  值随流线离开对称轴的距离的增大而增大到不合理的程度。

2.  $g > 0, \Delta g < 0$ : 从图 4 可见，这种情况在很大区域内不能使  $\Sigma_1$  曲线通过  $\Sigma_2 = \Sigma_3$  之点。

3.  $g < 0, \Delta g < 0$ : 虽然这种情况在较大区域可使  $\Sigma_1$  曲线通过  $\Sigma_2 = \Sigma_3$  之点，但在对称轴附近区域较难做到这一点。并且随着  $g$  值的下降， $\Sigma_1$  曲线与  $\Sigma_2$  曲线有两个交点，在第

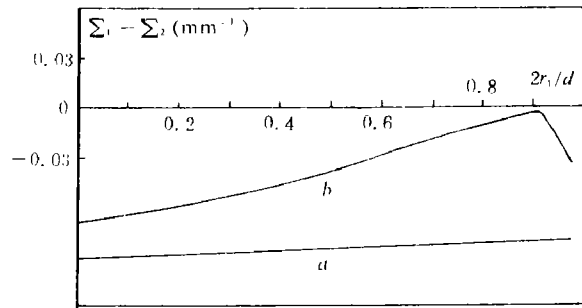


图 3 在直线假定下， $\Sigma_1$  与  $\Sigma_2 = \Sigma_3$  之差的分布

Fig. 3 Distribution of the difference between  $\Sigma_1$  and the point of the  $\Sigma_2 = \Sigma_3$  on the assumption that streamlines are straight.

a:  $d = 20.10 \text{ mm}$ , b:  $d = 10.05 \text{ mm}$

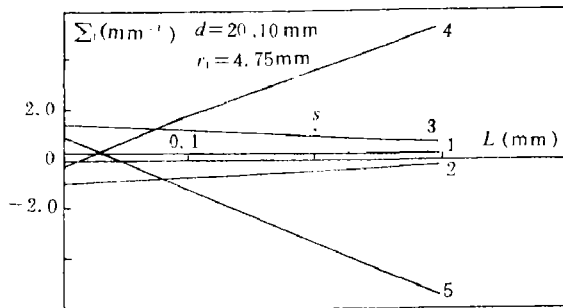


图 4  $g$  和  $\Delta g$  对  $\Sigma_1$  曲线的影响

Fig. 4 Influence of  $g$  and  $\Delta g$  on the  $\Sigma_1$  curve

1.  $g = 0, \Delta g = 0$ ,      2.  $g = 5, \Delta g = 0$
3.  $g = -5, \Delta g = 0$ ,    4.  $g = 0, \Delta g = 2.5$
5.  $g = 0, \Delta g = -2.5$

#### 四、讨 论

从二维 C-J 条件中的 (6) 式可以看出, 与一维平面爆轰波的 C-J 点不同, 二维定常爆轰波的声速面 (C-J 面) 不是化学反应结束面, 有部分化学反应将在声速面之后进行。为了区别于一维平面爆轰波的反应区, 我们将声速面与前导冲击波所围成的区域称为二维定常爆轰波的有效反应区。对于二维定常爆轰波必须满足声速面条件, 即二维 C-J 条件, 以避免后方稀疏波侵入有效反应区。

二维 C-J 条件在极限条件下将自然过渡为经典的一维 C-J 条件和准一维 C-J 条件。对于一维平面稳态爆轰波, 有  $\theta = 0, \partial\theta/\partial n = 0$ , 从二维 C-J 条件 (5) 式和 (6) 式即可得到经典的一维 C-J 条件:  $U = c, \partial\lambda/\partial t = 0$ , 在二维定常爆轰波对称轴附近的小膨胀区域, 有准一维 C-J 条件<sup>[10,11]</sup>:  $U = c, \sigma\partial\lambda/\partial t = 2\partial\omega/\partial r$ , 其中  $\omega$  为质点速度的径向分量。上式可变为:  $\sigma\partial\lambda/\partial t = (2/U)(\partial\omega/\partial r) \sim 2\partial\theta/\partial r$ 。在对称轴附近的小膨胀区域, 有  $\sin\theta/r \sim \partial\theta/\partial r, \partial\theta/\partial n \sim \partial\theta/\partial r$ , 容易看出, (5) 式和 (6) 式已变为准一维 C-J 条件。然而声速面条件对于二维定常爆轰波的反应区流场的区域和发散程度没有加以限制, 所以我们有理由将其称之为二维 C-J 条件。

流线在有效反应区中呈波纹形 (见图 5), 即在冲击波阵面处有向对称轴偏转的趋势, 这是因为前导冲击波阵面的弯曲使得离轴较远处的流线在冲击波阵面上的压力高于离轴较近处的流线上在同一  $x$  坐标值处的压力 (因为后者已进入有效反应区一段时间, 压力已下降了)。但在声速面附近, 由于侧向膨胀的结果, 使得离轴较远处的流线, 压力下降得更快, 因此流线在声速面附近又有向外偏转的趋势。值得指出的是, 对于同一流线,  $g$  和  $\Delta g$  在满足组合情

一个交点处  $U \neq c$ , 从 (4) 式可知, 这个点将对应一个压力极值点。

4.  $g < 0, \Delta g > 0$ , 这种情况在所有区域都能使  $\Sigma_1$  曲线通过  $\Sigma_2 = \Sigma_3$  点, 而且  $g$  和  $\Delta g$  的变化是连续的。

本文认为组合情况 4 是合理的。 $g < 0$  表明流线在冲击波阵面后要向对称轴偏转。这与 Bdzil 和 Xue-Lu<sup>[8,9]</sup> 的结论是一致的。 $\Delta g > 0$  表明流线在声速面附近又有向外偏转的趋势。这与前面用直线线计算时所得到的结论是一致的 (见图 3)。综合流线的这两个特点, 流线从冲击波阵面到声速面应呈波纹形 (见图 5 的实线)。

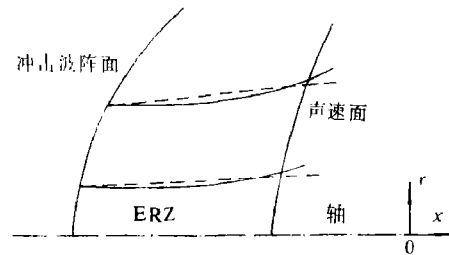


图 5 流线形状与有效反应区

Fig. 5 Shape of streamline and effective reaction zone (ERZ)

--- straight, — corrugated

况 4 的条件下, 仍有不同的取值可使  $\Sigma_1$  曲线通过  $\Sigma_2 = \Sigma_3$  之点。这表明, 二维 C-J 条件作为判定流线形状正确性的条件, 它只是必要的。流线形状的完全确定还需附加与方程  $\rho U^2 \partial \theta / \partial l + \partial p / \partial n = 0$  有关的约束条件。

在对称轴附近区域采用直流线进行计算, 虽然没有满足声速面条件, 即  $\Sigma_1$  曲线不通过  $\Sigma_2 = \Sigma_3$  之点。但流场的计算结果与用曲线的计算结果相差很小, 压力之差约为 0.3%, 反应度之差约为 0.2%, 反应区长度之差约为 1.4%。这是因为  $\Sigma_1 = \sin \theta / r + \partial \theta / \partial n$  在对称轴附近区域对  $\theta$  值的变化很敏感, 因此流线形状只需作很小的变动就能使  $\Sigma_1$  曲线通过  $\Sigma_2 = \Sigma_3$  之点。而流场中的物理量, 如压力和反应度, 对于流线斜率的微小变化是不敏感的。因此, 对于对称轴附近的流场, 用直流线进行计算, 将不会引起大的误差。

在求出沿每条流线上的声速点之后, 声速面的形状就确定了。与此同时, 沿每条流线上的各物理量的分布也随之确定。当然, 在开始计算之前, 对于给定药柱的定常爆速和前导冲击波阵面形状要用专门的实验测定。这样, 我们就得到了二维定常爆轰波的有效反应区形状以及流场分布, 这些对于爆炸系列的设计和爆轰临界条件的研究无疑是重要的。关于上述计算方法 and 实验方法, 以及某些炸药的实验和计算结果, 我们将在另一篇文章中发表。

#### 参 考 文 献

- [ 1 ] Jones, H., *Proc. Roy. Soc.*, **A189** (1947), 415.
- [ 2 ] Eyring, H., Powell, R.E., Duffrey, G.H., Darling, R.B., *Chem. Rev.*, **45** (1949), 69.
- [ 3 ] Cook, M.A., *The Science of High Explosives*, Reinhold Publishing Company, (1958), 91.
- [ 4 ] Ботховитилов, Л.Г., Взрывное Дело, Сборник № 76/33, Разрушение и Деформирование Тел при Взрывном "Плохе", (1976), 150.
- [ 5 ] Wood, W.W., Kirkwood, J.G., *J. Chem. Phys.*, **22** (11), (1954), 1920.
- [ 6 ] Fickett, W., Davis, W.C., *Detonation*, Los Alamos Series in Basic and Applied Sciences, (1979), 75.
- [ 7 ] Chan, S.K., Lownds, C.M., *Propel. Explos. Pyrotech.*, **8** (1983), 184.
- [ 8 ] Bdzil, J.B., *J. Fluid Mech.*, **108** (1981), 195.
- [ 9 ] Xue Honglu, Lu Fangyun, *Proc. Intern. Symp. on Intense Dynamic Loading and Its Effects*, (1986), 73.
- [ 10 ] Chan, S.K., *Proc. 7th Symp. (Intern.) on Detonation*, (1981), 589.
- [ 11 ] Matsui, H., Meriani, A. et al., *Proc. 8th Symp. (Intern.) on Detonation*, (1985), 548.

## C-J CONDITION AND STREAMLINE IN TWO-DIMENSIONAL STEADY-STATE DETONATION

Huan Shi

(Dept. of Applied Physics, Changsha Institute of Technology)

Ding Jing

(Dept. of Engineering Mechanics, Beijing Institute of Technology)

**ABSTRACT** In this paper, we extend W-K model to the whole flow field of two-dimen-

sional (2-D) steady-state detonation wave (SSDW). Let a natural coordinate system be attached to the shock front which travels with steady velocity  $D$  as shown in Fig. 1, we can get the following relationship on the sonic surface

$$U = c \quad (5)$$

$$\sigma \partial \lambda / \partial l = \sin \theta / r + \partial \theta / \partial n \quad (6)$$

Eqs. (5) and (6) define the sonic surface condition which must be satisfied for a 2-D SSDW.

For 1-D plane SSDW, we have  $\theta = 0$  and  $\partial \theta / \partial n = 0$ , so  $\partial \lambda / \partial l$  must be zero. Thus the sonic surface condition turns out to be the classical C-J condition. Dealing with the flow field close to the axis, Wood and Kirkwood and others pointed out that besides  $U = c$ , the condition  $\sigma \partial \lambda / \partial l = 2 \partial \omega / \partial r$  must be satisfied at the sonic point, which is called quasi-1-D C-J condition. It can be easily shown that  $\sigma \partial \lambda / \partial l = (2/U) \partial \omega / \partial r = 2 \partial \theta / \partial r$ ,  $\sin \theta \sim \theta$ ,  $\theta / r \sim \partial \theta / \partial r$  and  $\partial \theta / \partial n \sim \partial \theta / \partial r$  in the neighbourhood of the symmetry axis. Thus we can get the same relation from Eq. (6). However Eq. (6) is a more general one and not limited to the near axis flow. For this reason, we call the sonic surface condition the 2-D C-J condition.

At the same time, the sonic surface condition is a necessary one to judge whether the shape of a streamline is right or not. Through analysis and discussion, we hold that the streamline in the effective reaction zone of 2-D SSDW must take a corrugated shape which is deflected toward symmetry axis at first and toward outside near the sonic surface range. When the sonic surface is determined, the distribution of the flow field in effective reaction zone of 2-D SSDW can also be determined.

**KEY WORDS** 2-D detonation, detonation theory, diameter effect, streamline.