

# 冲击波阵面上粘度的一种唯象描述

刘仓理

(西南流体物理研究所)

**摘要** 本文从粘度的基本定义出发, 导出了冲击波阵面上粘度系数、应变率和粘应力的一种唯象表达式。并以45#钢和LY-12铝材料实验测量的冲击波剖面为例, 计算出在这些材料中冲击波阵面上的上述参量及平均粘度系数。所得结果与W. C. Moss<sup>[1]</sup>和张若棋<sup>[6]</sup>等给出的结果进行了比较和讨论。

**关键词** 粘度系数 应变率 粘应力

## 1. 前言

在冲击加载过程中材料的应变率和粘度系数是研究材料动态响应特性和本构关系的两个重要参量。近年来, D. E. Grady<sup>[1]</sup>, J. R. Asay<sup>[2,3]</sup>, W. C. Moss<sup>[4]</sup>, 张万甲<sup>5</sup>和张若棋<sup>6</sup>等利用不同的模型对冲击载荷下材料的粘度系数和应变率等进行了研究。

在文献〔1〕中利用“冲击不变量”假设, 导出了冲击波阵面上最大应变率和雨贡纽压力的四次方成正比例。这一结果与在文献〔3〕中对金属材料的冲击加载实验结果是一致的。在文献〔5〕中利用一维平面加载下材料层裂片中“拘留波”幅度衰减曲线确定出材料的平均粘度系数。在文献〔4〕中利用Mie-Grüneisen状态方程导出了冲击波阵面上应变率和粘度系数的表达式, 然而, 其中的待定参量未能确定出, 因而, 不能进行具体的计算。在文献〔6〕中利用位错动力学模型计算了LY-12铝中冲击波阵面上的应变率和粘度系数等参量, 但是, 模型中参数较多, 计算方法复杂。

由上看出, 由于粘度系数等参量的研究出发点不同, 因而其研究模型不尽统一。本文从粘度系数、应变率和粘应力的基本定义出发, 利用某些近似假设条件, 导出了稳态冲击波阵面上粘度系数, 粘应力和应变率的一种唯象表达式; 并给出了近似确定其中待定参量的一种方法及平均粘度系数的计算公式。此外, 利用上述近似方法, 还确定出Moss<sup>[4]</sup>公式中的待定参量。并利用文献〔3, 5〕中所给出的实验波剖面, 计算出45#钢和LY-12铝材料中冲击波剖面上的粘度系数, 应变率和粘应力, 以及平均粘度系数。计算结果表明, 由本文导出公式计算的结果与文献〔2, 5, 6〕所给出的结果相比较, 符合程度相当好。

## 2. 粘度系数等参量唯象表达式的推导

### 1) 粘应力、应变率和粘度系数表达式的推导

在一维平面冲击加载下, 定态波阵面上各点的状态可用瑞利线表示, 而其各点上所对应的平衡态, 在一级近似下, 可用雨贡纽线表示。一般认为, 在不计其他影响因素的条件下, 瑞利线和雨贡纽线之间在同一应变 $e$ 时的应力差是由粘度所致(参见图1)。再由粘应力和应变的定义, 则有

1988年4月21日收到原稿, 7月20日收到修改稿。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{v, s} &= \sigma_R - \sigma_H \\ \sigma_{v, s} &= \eta \dot{\epsilon} \\ e &= 1 - \frac{\rho_0}{\rho} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中,  $\sigma_{v, s}$  为粘应力,  $\sigma_R$  为瑞利线上的应力,  $\sigma_H$  为雨贡纽线上的应力,  $\eta$  为粘度系数,  $\dot{\epsilon}$  为应变率,  $e$  为工程应变,  $\rho_0$  为材料的初始密度,  $\rho$  为材料在冲击加载过程中的当地密度。

若设材料在冲击加载的终态为  $(\sigma_f, e_f)$ , 当不考虑材料的弹性时, 瑞利线方程和雨贡纽线方程分别可用(2)式和(3)式表示

$$\sigma_R = \rho_0 D^2 e \quad (2)$$

$$\sigma_H = \rho_0 C_0^2 e / (1 - Se)^2 \quad (3)$$

式中,  $D$  为冲击加载终态所对应的冲击波速度,  $C_0$  和  $S$  为  $D = C_0 + Su$  关系中的常数。由  $D = C_0 + Su$  可得

$$D/C_0 = 1/(1 - Se_f)$$

将此式、(2)式和(3)式代入(1)式则有

$$\sigma_{v, s} = \frac{2S\sigma_f}{e_f} e(e_f - e) \left[ 1 - \frac{S}{2}(e + e_f) \right] / (1 - Se)^2 \quad (4)$$

为了计算方便, 对(4)式中的部分式子进行近似处理, 即令

$$f(e) = \left[ 1 - \frac{S}{2}(e + e_f) \right] / (1 - Se)^2$$

由于  $f(e)$  在  $[0, e_f]$  范围内为单调函数, 在  $(0, e_f)$  范围内对  $f(e)$  展开, 可有以下式

$$f'(e) = \left( 1 - \frac{S}{2}e_f \right) \left( 1 + \frac{3}{2}Se \right)$$

不难证明, 在  $[0, e_f]$  范围内,  $f'(e)$  和  $f(e)$  的误差为

$$f(e) = f'(e) + O(e^2)$$

故有  $f(e) \approx f'(e)$ , 把此式代入(4)式可有

$$\sigma_{v, s} \approx \frac{2S\sigma_f}{e_f} \left( 1 - \frac{S}{2}e_f \right) e(e_f - e) \left( 1 + \frac{3}{2}Se \right) \quad (5)$$

(5)式即为所导出的冲击波阵面上粘应力的唯象表达式。

在本构关系研究中, 粘度系数和应变率之间存在如下关系<sup>[2]</sup>

$$\eta = A \dot{\epsilon}^\alpha \quad (6)$$

式中,  $A$  为与材料有关的常数,  $\alpha$  为大于零的常数。考虑到粘应力的定义(1)式, 把(6)式代入(5)式, 则有

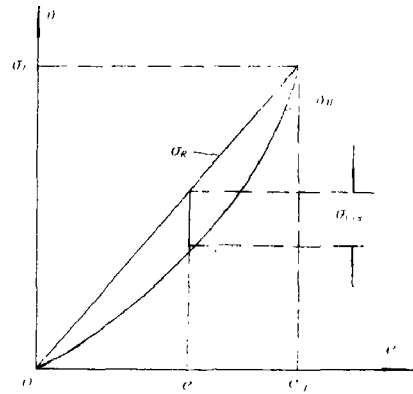


图1 冲击载荷下材料的瑞利线和雨贡纽线

Fig. 1. Rayleigh and Hugoniot curves of material

$$\dot{e} = \left[ \frac{2S\sigma_t}{Ae_t} \left(1 - \frac{S}{2}e_t\right) e(e_t - e) \left(1 + \frac{3}{2}Se\right) \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (7)$$

(7) 式即为所导出的冲击波阵面上应变率的唯象表达式

把(7)式代入(6)式, 即可确定出在冲击波阵面上粘度系数的唯象表达式

$$\eta = A \left[ \frac{2S\sigma_t}{Ae_t} \left(1 - \frac{S}{2}e_t\right) e(e_t - e) \left(1 + \frac{3}{2}Se\right) \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (8)$$

(5) 式、(7) 式和(8) 式为本文导出的在冲击波阵面上有关量的唯象表达式。在对有关的量进行计算时, 除已知  $\sigma_t$ 、 $e_t$ 、 $S$  和  $C_0$  等参数外, 还有  $A$  和  $\alpha$  两个待定参量需要确定

### 2) 参量 $A$ 和 $\alpha$ 的确定

由(5) 式可求得在冲击波阵面上粘应力的极大值条件

$$e^* = \frac{2-3Se_t}{9S} \left\{ \left[ 1 + 18Se_t / (2-3Se_t)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right\} \quad (9)$$

即当波阵面上的应变取  $e^*$  值时, 所对应的粘应力有极大值  $\sigma_{\max}^*$ 。对于有限应变, 由(9) 式进行计算发现,  $e^*$  和  $e_t$  之间存在着近似的线性关系  $e^* = Be_t$ , 其中,  $B$  为与材料有关的常数。对于铁,  $B=0.54$ ; 铜,  $B=0.53$ ; LY-12 铝,  $B=0.53$ ; 钨合金,  $B=0.53$ 。因此, 对于金属材料, 取  $B \approx 0.53$ 。把上述结果代入粘应力的表达式中, 可近似得到

$$\sigma_{\max}^* = \frac{S\sigma_t}{2e_t} \left(1 - \frac{S}{2}e_t\right) \left(1 + \frac{4}{5}Se_t\right) e_t^2 \quad (10)$$

由此式并考虑到(1) 式和(6) 式, 可得到在波阵面上极大应变率的如下近似关系

$$\dot{e}_{\max} \approx e_t \dot{e} \quad (11)$$

我们注意到在文献〔3〕中, 对金属材料实验确定的这一关系为

$$\dot{e}_{\max} \approx \sigma_t^2 \dot{e} \quad (12)$$

由此, 确定出待定参量  $\alpha$  值

$$\alpha = 0.5 \quad (13)$$

下面, 来确定参量  $A$ 。若取冲击波阵面的宽度为  $\Delta t$ , 则  $\Delta t = \int_0^{e_t} \dot{e}^{-1} de$ 。为了计算方便, 取  $\Delta t = e_t / \bar{\dot{e}}$ , 其中, 波阵面上的平均应变率  $\bar{\dot{e}} = (1/e_t) \int_0^{e_t} \dot{e} de$ 。把(7) 式代入该式, 经积分整理后, 可得到

$$A = \left\{ \frac{S^2 \sigma_t^2 e_t^2}{15} \Delta t \left(2 + 3Se_t + \frac{185}{84} S^2 e_t^2\right) \left(1 - \frac{S}{2}e_t\right) \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \quad (14)$$

于是, 若已知  $\sigma_t$ 、 $S$ 、 $\Delta t$  等参数, 则可按(14) 式确定参量  $A$  值。

至此, 我们导出了由(5) 式、(7) 式、(8) 式、(13) 式和(14) 式构成的在波阵面上粘度系数、粘应力和应变率的完备的唯象表达式:

### 3) W. C. Moss 模型中待定参量 $\delta$ 的确定

W. C. Moss<sup>[4]</sup> 利用 Mie-Grüneisen 状态方程导出在冲击波阵面上的应变率的表达式为

$$\dot{e} = [(2S\rho_0 C_0 / \delta)(e_t - e)e]^2 \quad (15)$$

式中,  $\delta$  为待定参量。由于在文献(4)中没有给出确定  $\delta$  值的方法, 因而不能应用(15)式进行具体计算。我们利用在第2节中所述方法, 确定出  $\delta$  值为

$$\delta = \left[ \frac{2}{15} \Delta t S^2 \rho_0 C_0^4 e_f^3 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

把(16)式代入(15)式, 得到W. C. Moss给出的有关量的表达式为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \frac{30}{\Delta t e_f^3} [e(e_f - e)]^2 \\ \eta &= \frac{\Delta t S C_0^2 e_f}{15} [e(e_f - e)]^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

对(17)式求极大值, 则有  $\dot{\epsilon}_{\max} = 30/16 \cdot te_f$ ,  $e^* = 0.5e_f$ 。粘应力的极大值为

$$\sigma_{v_{1s, \max}} = \frac{1}{2} S \rho_0 C_0^2 e_f^2$$

#### 4) 波阵面上平均粘度系数的确定

波阵面上的平均粘度系数为  $\bar{\eta} = \bar{\sigma}_{v_{1s}} / \bar{\dot{\epsilon}}$ , 其中

$$\bar{\sigma}_{v_{1s}} = \frac{1}{e_f} \int_0^{e_f} \sigma_{v_{1s}} de, \quad \bar{\dot{\epsilon}} = \frac{1}{e_f} \int_0^{e_f} \dot{\epsilon} de$$

利用本文所导出的有关表达式, 积分求得的  $\bar{\eta}$  表达式为

$$\bar{\eta} = \frac{1}{3} S \sigma_f \left(1 - \frac{S}{2} e_f\right) \left(1 + \frac{3}{4} S e_f\right) \Delta t \quad (18)$$

利用W. C. Moss导出的有关表达式, 求得相应的表达式为

$$\bar{\eta} = \frac{1}{3} S \rho_0 C_0^2 e_f \Delta t \quad (19)$$

### 3. 计算结果及讨论

利用本文所导出的公式和W. C. Moss的公式, 分别对张万甲<sup>[5]</sup>给出的45#钢和J. R. Asay<sup>[1]</sup>给出的LY-12铝的实验波剖面进行计算。计算中所用的初始参数如表1所示。

表1 计算用初始参数  
Table 1 Parameters used in calculation

参 数	$\rho_0$ (g/cm <sup>3</sup> )	$e_f$	$C_0$ (mm/ $\mu$ s)	$S$	$\Delta t$ ( $\mu$ s)
45# 钢	7.85	0.045	3.8	1.58	0.054
LY-12 铝	2.78	0.090	5.25	1.39	0.029
LY-12 铝	2.78	0.2332	5.25	1.39	0.003

将表1所列数据分别代入相应的表达式, 确定出待定参量  $A$  和  $\delta$  的值分别为: 对45#钢,  $A = 0.17$  [GPa·( $\mu$ s)<sup>1/2</sup>],  $\delta = 0.13$  [GPa·( $\mu$ s)<sup>1/2</sup>]; 对LY-12铝,  $\sigma_f = 9$  GPa时,  $A_1 = 0.24$  [GPa·( $\mu$ s)<sup>1/2</sup>],  $\delta_1 = 0.21$  [GPa·( $\mu$ s)<sup>1/2</sup>];  $\sigma_f = 35$  GPa时,  $A_2 = 0.28$  [GPa·( $\mu$ s)<sup>1/2</sup>],  $\delta_2 = 0.24$  [GPa·( $\mu$ s)<sup>1/2</sup>]。把上述  $A$  和  $\delta$  值分别代入有关  $\eta$  和  $\dot{\epsilon}$  的表达式中计算, 确定出的45#钢和LY-12铝的  $\eta(e)$  和  $\dot{\epsilon}(e)$  曲线, 分别如图2和图3所示。

利用(18)式和(19)式求得的波阵面上的平均粘度系数如表2所列。同时, 在表2中

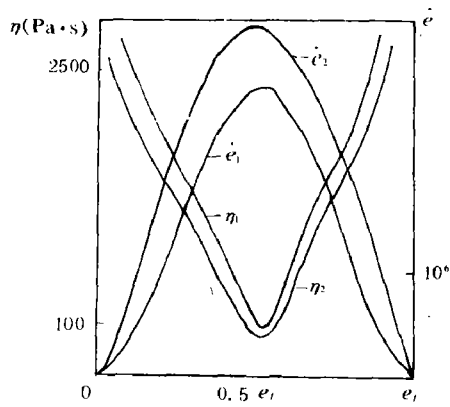


图 2 在  $\sigma_t = 8\text{GPa}$  时, 45# 钢中波阵面上粘度系数和应变率 ( $\dot{\epsilon}_1$  和  $\eta_1$  由 (9) 和 (10) 式计算,  $\dot{\epsilon}_2$  和  $\eta_2$  由 Moss 给出的公式计算)

Fig. 2 The viscous coefficient and strain rate on the front of the shock wave under 8 GPa for 45# steel

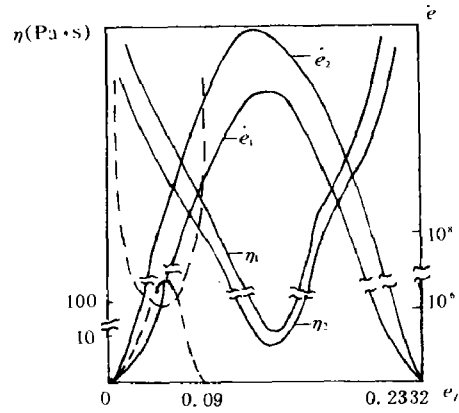


图 3 在  $\sigma_t = 9\text{GPa}$  和  $35\text{GPa}$  时, LY-12 铝中波阵面上粘度系数和应变率 ( $\dot{\epsilon}_1$  和  $\eta_1$  的计算公式同图 2, 实线对应 35 GPa, 虚线对应 9 GPa)。

Fig.3. The viscous coefficients and strain rates on the front of the shock wave of LY-12 Al under 9GPa and 35GPa (The dotted line for 9GPa)

表 2 平均粘度系数计算结果

Table 2 Calculated results of average viscous coefficient

材料	$\bar{\eta}_{(18)}$	$\bar{\eta}_{(19)}$	$\bar{\eta}_{(2)}$	$\bar{\eta}_{(5)}$	$\bar{\eta}_{(6)}$	$e_1$
45# 钢	232	145			300	0.045
LY-12 铝	124	93	140	110		0.09
LY-12 铝	60	25	80			0.2332
铜	80	40	106			0.198

还给出了文献 (2), (5) 和 (6) 给出的结果。在表 2 中,  $\bar{\eta}_{(18)}$  和  $\bar{\eta}_{(19)}$  分别表示由 (18) 式和 (19) 式计算的结果;  $\bar{\eta}_{(2)}$ ,  $\bar{\eta}_{(5)}$  和  $\bar{\eta}_{(6)}$  分别表示由文献 (2), (5) 和 (6) 给出的结果。

利用本文所导出的公式和 W. C. Moss 公式分别计算获得的 45# 钢和 LY-12 铝材料的波阵面上的粘应力极大值列于表 3 之中。表 3 中,  $\sigma_{VN}^{(10)\max}$  和  $\sigma_{VN}^{(17)\max}$  分别表示由本文导出的公式 (10) 和 W. C. Moss 的公式 (17) 计算的结果;  $\sigma_{VN}^{(2)\max}$  和  $\sigma_{VN}^{(5)\max}$  分别表示文献 (2) 和 (5) 给出的结果。

由图 2 和图 3 可以看出, 用本文所导出的公式和 W. C. Moss 导出的公式计算的曲线形状基本相似, 然而, 参量极值出现的位置略有差异: 由 Moss 导出的公式计算的参量极值出现在  $e^* = 0.5e_1$  处, 而本文导出的公式计算的参量极值出现在  $e^* = 0.53e_1$  处。在文献 (3) 中, 给出的 LY-12 铝和 45# 钢的粘应力极值分别出现在  $e^* = 0.54e_1$  和  $e^* = 0.55e_1$  处。可见,

表 3 波阵面上粘应力极大值  
Table 3 Max viscous stress on the front of the shock wave

参量(GPa)	$\sigma_{vis,max}^{(10)}$	$\sigma_{vis,max}^{(17)}$	$\sigma_{vis,max}^{(17)}$	$\sigma_{vis,max}^{(2)}$	$e_f$
45* 钢	0.56	0.43	0.7		0.045
LY-12 铝	5.98	2.90		5.15	0.2332
LY-12 铝	7.21	3.12		7.23	0.2421
铜	8.52	3.82		8.89	0.198
铜	19.24	6.52		19.9	0.2587

本文导出公式计算的结果与 (3) 给出的结果相一致。

由图 2 和图 3 还可以看出, 波阵面上粘度系数和应变率随应变的变化是急剧的。在  $e = 0.53e_f$  处应变率和粘应力均出现极大值, 而粘度系数却处于极小值。这一结果似乎可以从实验测量的冲击波剖面 (见图 4) 得到定性的解释: 在塑性波阵面的起始和终了部分, 应力随时间的变化较平缓, 即应变率较小, 粘度较大, 而在波阵面的中间部分, 应力随时间急剧地变化, 对应的应变率变化也是急剧的。

由表 2 和表 3 所列计算结果可以看出, 由 Moss 导出的公式计算的波阵面上的平均粘度系数  $\bar{\eta}$  和粘应力极大值  $\sigma_{vis,max}$  均偏小, 而本文与其它几种模型确定出的结果基本相符。

#### 4. 结语

综上所述, 由本文所导出的在波阵面上的粘应力和平均粘度系数等参量的唯象表达式计算的结果与其它模型<sup>[1-5]</sup>给出的结果是一致的, 而与 W. C. Moss<sup>[4]</sup>所导出的公式计算的结果略有差异。本文结果可用于冲击波阵面上各处有关参量的计算; 并且方法比较简单。

必须指出, 本文所给出的仅是一种唯象方法, 并未涉及粘度参量的物理机制。本工作是初步的, 深入的研究有赖于冲击波剖面测量技术的发展及波阵面精细结构的分析。

本文得到了经福谦研究员和韩钧万副研究员的指导和帮助, 王继海研究员对本文提出了修改意见, 在此致以谢意。

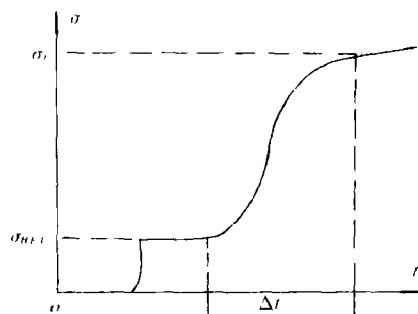


图 4 在  $\sigma_s = 8 \text{ GPa}$  时 45\* 钢的波剖面  $\sigma(t)$  示意图

Fig 4 Shock profile for 45\* Steel

#### 参 考 文 献

- [1] Grady, D. E., *Appl. Phys. Lett.*, **38** (10) (1981), 825.
- [2] Asay, J. R., In: *Material behavior under high stress and ultrahigh loading rates*, (1983), 81.
- [3] Asay, J. R., *J. Appl. Phys.*, **50** (4) (1979), 2749.
- [4] Moss, W. C., *Appl. Phys. Lett.*, **47** (4) (1985), 372.

[5] 张万甲, 私人通信.

[6] 张若棋, 爆炸与冲击, 4(2)(1984), 20.

## PHENOMENOLOGICAL DESCRIPTION OF VISCOUS COEFFICIENT ON THE SHOCK WAVE FRONT

Liu Cangli

(Southwest Institute of Fluid Physics)

**ABSTRACT** The phenomenological expressions of viscous coefficient, strain rate and viscous stress on a shock wave front were derived by using the initial definition of viscosity in this paper. The expressions obtained are the equation (5), (14), (17).

The average viscous coefficient and the max. value of viscous stress on the shock wave front are given also (Eq. 10, 18).

The viscous coefficient and strain rate were calculated by using the experimental results for LY-12Al and 45# steel, and the max. viscous stress at the same time was obtained. The calculated results show that the viscous coefficient and the strain rate changes very conspicuously at different points on the shock wave front. The average viscous coefficients are 124 Pa·s under 9 GPa and 60 Pa·s under 35 GPa for LY-12Al. The results show over are similar to that using dislocation model given by Zhang Ruogi<sup>[6]</sup> and steady wave model by J.R. Asay<sup>[7]</sup>.

In this paper, we also obtain the relation between  $e_r$  and  $e^*$  (Eq. 9) which is the strain while the viscous stress reaches the max. value on the shock wave front.

From the calculated results using the relation above, we also discover that there is approximately a linear relation between  $e_r$  for some metals.

$$e^* = B e_r$$

B is a const. B is equal to 0.53 for LY-12Al, W-alloy and Cu, and also 0.54 for Fe.

**KEY WORDS** viscous coefficient, strain rate, viscous stress.