

瞬态波在层合板中传播的粘弹比拟法*

李永池 陈立 唐之景

(中国科技大学近代力学系)

摘要 本文发展了粘弹比拟理论, 并将之用于求解半无限空间三层复合材料在垂直层合方向传播的瞬态波问题。对于层合板中应力波的传播问题, 寻找到了等效粘弹体, 并用一种较好的 Laplace 变换的数值反演法求得了等效松弛函数和其它一些必要的辅助函数。用特征线法求得了等效粘弹体的应力和速度, 进而得到了三层复合材料中心的应力、速度, 进一步就得到了层中任意点的应力和速度。对于一个可由精确理论(射线理论)给出计算结果的问题, 将粘弹比拟理论的结果和射线理论的结果进行了比较, 结果表明, 粘弹比拟理论对三层复合材料的瞬态波传播问题是相当成功的。

关键词 分层复合材料 粘弹性比拟 松弛函数 瞬态波传播

一、引言

由于复合材料在冲击载荷作用下的波传播问题具有广阔的应用背景, 所以从本世纪60年代中期以来, 有许多学者在该领域中做了大量的工作, 提出了许多理论, 如射线理论、等效模量理论、等效刚度理论、Floquet/Bloch 理论、能量法、粘弹比拟理论。

考虑到复合材料中波的传播有衰减和弥散现象, Barker^[1] 首先把弹性复合材料比拟为均匀的粘弹性材料, 但 Barker 没能考虑波剖面的振荡特性。Christensen^[2] 进一步指出了所比拟的粘弹性模型的松弛函数必为时间的振荡函数, 但 Christensen 考虑的是长波, 该理论对短波不适用。T. C. T. Ting 等^[3,4] 用粘弹比拟的思想, 对二层复合材料瞬态波问题, 给出了完美的数学处理, 给出了等效松弛函数和波传播规律的求解方法。用这种方法得到的解在理论上完全是精确的, 其误差只是来自数值反演和差分计算。考虑到三层复合材料在生产实际中有着更广泛的应用, 本文在完善和发展粘弹比拟思想的基础上对三层复合材料的瞬态波传播问题进行了讨论, 得到了求特征指数的方程、等效松弛函数以及任一层中心、任意点的应力和速度。给出的算例表明, 对三层复合材料, 粘弹比拟理论的结果与精确理论(射线理论)的结果符合得相当好。

二、基本方程组及其象空间中的解

考虑以三层为一周期的半无限周期结构, 如图 1 所示, 每层为均匀、各向同性、线性弹

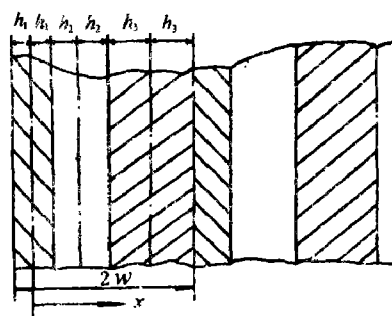


图 1 分层复合材料配置

Fig. 1. Geometry of the layered composite

* 国家自然科学基金资助项目。

1989年2月11日收到原稿。

性或粘弹性材料。用带有下标 1, 2, 3 的量分别代表三种材料的参数, $2h_i$ (下标 i 表示第 i 种材料, $i=1, 2, 3$ 。下同) 是层厚, $\lambda_i(t), \mu_i(t)$ 是材料的松弛函数, ρ_i 是质量密度, 在垂直铺层方向建立坐标系 ox 。层合板位于 $0 \leq x < \infty$, 初始时静止, 考虑平面波在 x 方向传播, 基本变量为 x 方向的正应力 σ_i , 正应变 ε_i , 质点速度 v_i , 它们依赖于 x 和时间 t 。对该问题, 我们可得控制方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_i}{\partial x} = \rho_i \dot{v}_i \text{ —— 运动方程 (对 } i \text{ 不求和, 以下同)} \\ \frac{\partial v_i}{\partial x} = \dot{\varepsilon}_i \text{ —— 位移连续方程} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_i}{\partial x} = \dot{\varepsilon}_i \text{ —— 位移连续方程} \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_i(x, t) = \int_0^\infty g_i(t-t') d\varepsilon_i(x, t') \text{ —— Stieltjes 卷积形式的本构关系} \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_i(t) = \lambda_i(t) + 2\mu_i(t) \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_i(x, 0^-) = \dot{v}_i(x, 0^-) = \dot{\varepsilon}_i(x, 0^-) = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

对 (1)–(5) 式进行 Laplace 变换, 然后联立求解, 可得象空间中的第一、二、三层中的应力和速度

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_1(x, P) = \bar{A}_1 \operatorname{ch}(K_1 x) + \bar{B}_1 \operatorname{sh}(K_1 x) \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_1(x, P) = (1/m_1) [\bar{A}_1 \operatorname{sh}(K_1 x) + \bar{B}_1 \operatorname{ch}(K_1 x)] \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_2(x, P) = \bar{A}_2 \operatorname{ch}(K_2 x - K_2 w_1) + \bar{B}_2 \operatorname{sh}(K_2 x - K_2 w_1) \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_2(x, P) = (1/m_2) [\bar{A}_2 \operatorname{sh}(K_2 x - K_2 w_1) + \bar{B}_2 \operatorname{ch}(K_2 x - K_2 w_1)] \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_3(x, P) = \bar{A}_3 \operatorname{ch}(K_3 x - K_3 w_2) + \bar{B}_3 \operatorname{sh}(K_3 x - K_3 w_2) \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_3(x, P) = (1/m_3) [\bar{A}_3 \operatorname{sh}(K_3 x - K_3 w_2) + \bar{B}_3 \operatorname{ch}(K_3 x - K_3 w_2)] \end{array} \right. \quad (11)$$

其中 P 是拉氏变量, 而

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1 = h_1 + h_2; \quad w_2 = h_1 + 2h_2 + h_3; \quad w = h_1 + h_2 + h_3, \\ K_i = (\rho_i P / \bar{g}_i)^{\frac{1}{2}}; \quad m_i = \rho_i P / K_i = (\rho_i P \bar{g}_i)^{\frac{1}{2}} \end{array} \right. \quad (12)$$

\bar{A}_i, \bar{B}_i 是 P 的函数, 在下面定。

由层间的应力、速度连续条件可得

当 $x = h_1$ 时,

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{v}_1 \end{array} \right\} (h_1, P) = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_2 \\ \bar{v}_2 \end{array} \right\} (h_1, P) \quad (13)$$

当 $x = w_1 + h_2$ 时,

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_2 \\ \bar{v}_2 \end{array} \right\} (w_1 + h_2, P) = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_3 \\ \bar{v}_3 \end{array} \right\} (w_1 + h_2, P) \quad (14)$$

根据层合板的周期性质,由Floquet理论^[5]所给出的层合板控制方程组的解的拟周期性,再结合 $x=2w-h_1$ 处的应力和速度连续条件,可知

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_3 \\ \bar{v}_3 \end{pmatrix} (2w-h_1, P) = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{v}_1 \end{pmatrix} (-h_1, P) \exp(-2wK) \quad (15)$$

其中 K 是特征指数,在下面定出。

记

$$\begin{cases} C_i = \text{ch}(K_i h_i); S_i = \text{sh}(K_i h_i) \\ \tilde{D}_i = \begin{pmatrix} \bar{A}_i \\ \bar{B}_i \end{pmatrix}; \tilde{E}_{\pm i} = \begin{pmatrix} C_i & \pm S_i \\ \pm S_i/m_i & C_i/m_i \end{pmatrix} \end{cases} \quad (16)$$

将(6)-(11)代入(13)-(15),并利用(16),即以矩阵形式写出,有

$$\begin{cases} \tilde{E}_1 \tilde{D}_1 = \tilde{E}_{-2} \tilde{D}_2 \\ \tilde{E}_2 \tilde{D}_2 = \tilde{E}_{-3} \tilde{D}_3 \\ \tilde{E}_3 \tilde{D}_3 = \exp(-2wK) \tilde{E}_{-1} \tilde{D}_1 \end{cases} \quad (17)$$

(17)是关于 \bar{A}_i, \bar{B}_i 的六个齐次代数方程,由此可决定 \bar{A}_i, \bar{B}_i 之间的关系,且由此齐次方程的非零解条件,可得特征指数 K 。即有

$$\left[\tilde{E}_2 \tilde{E}_{-3} \tilde{E}_1 - \tilde{E}_{-3} \tilde{E}_3^{-1} \tilde{E}_1 \exp(-2wK) \right] \tilde{D}_1 = 0 \quad (18)$$

由非零解条件,知

$$\| \tilde{E}_2 \tilde{E}_{-3} \tilde{E}_1 - \tilde{E}_{-3} \tilde{E}_3^{-1} \tilde{E}_1 \exp(-2wK) \| = 0 \quad (19)$$

将(16)代入(19),运算后得

$$\begin{aligned} 2 \text{ch}(2wK) &= \text{ch}(2K_2 h_2) \text{sh}(2K_1 h_1) \text{sh}(2K_3 h_3) (m_1/m_3 + m_3/m_1) \\ &+ 2 \text{ch}(2K_1 h_1) \text{ch}(2K_2 h_2) \text{ch}(2K_3 h_3) \\ &+ \text{ch}(2K_2 h_2) \text{sh}(2K_1 h_1) \text{sh}(2K_3 h_3) (m_2/m_1 + m_1/m_2) \\ &+ \text{ch}(2K_1 h_1) \text{sh}(2K_2 h_2) \text{sh}(2K_3 h_3) (m_2/m_3 + m_3/m_2) \\ &\equiv F(P) \end{aligned} \quad (20)$$

这就是求特征指数 K 的方程。

由(17)、(18)可得 \bar{A}_i, \bar{B}_i 之间关系,它们中有一个是任意的,选此为 \bar{A}_1 ,于是

$$\begin{aligned} \bar{B}_1 &= \frac{\exp(-2wK)(C_1 C_{32} + S_1 S_{32} m_3/m_1) - (C_1 C_{22} + S_1 S_{22} m_2/m_1)}{\exp(-2wK)(S_1 C_{32} + C_1 S_{32} m_3/m_1) + (S_1 C_{22} + C_1 S_{22} m_2/m_1)} \cdot \bar{A}_1 \\ &\equiv \bar{b}_1 \bar{A}_1 \end{aligned} \quad (21a)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_2 \\ \bar{B}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 C_2 + S_1 S_2 m_2 / m_1 + \bar{b}_1 (C_2 S_1 + C_1 S_2 m_2 / m_1) \\ C_1 S_2 + C_2 S_1 m_2 / m_1 + \bar{b}_1 (S_1 S_2 + C_1 C_2 m_2 / m_1) \end{pmatrix} \bar{A}_1 \equiv \begin{pmatrix} \bar{a}_2 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} \bar{A}_1 \quad (21b)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{A}_3 \\ \bar{B}_3 \end{pmatrix} &= \exp(-2wK) \begin{pmatrix} C_1 C_3 + S_1 S_3 m_3 / m_1 - \bar{b}_1 (C_3 S_1 + C_1 S_3 m_3 / m_1) \\ -(C_1 S_3 + C_3 S_1 m_3 / m_1) + \bar{b}_1 (S_1 S_3 + C_1 C_3 m_3 / m_1) \end{pmatrix} \bar{A}_1 \\ &\equiv \begin{pmatrix} \bar{a}_3 \\ \bar{b}_3 \end{pmatrix} \bar{A}_1 \end{aligned} \quad (21c)$$

其中

$$C_{i2} = \text{ch}(2K_i h_i); \quad S_{i2} = \text{sh}(2K_i h_i) \quad (22)$$

由 Floquet 理论^[5] 给出的解的拟周期关系, 可得其它层中的应力和速度

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_i \\ \bar{v}_i \end{pmatrix} (2nw + x, P) = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_i \\ \bar{v}_i \end{pmatrix} (x, P) \exp(-2nwK) \quad (23)$$

其中 n 是整数。

由 (6)-(11)、(21)、(23) 知, (在以下都略去了对 v_2, v_3 的讨论, 因为对 v_2, v_3 的讨论与对 σ_2, σ_3 的讨论类似)

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_1(2nw + x_1, P) = \bar{A}_1 [\text{ch}(K_1 x_1) + \bar{b}_1 \text{sh}(K_1 x_1)] \exp(-2nwK) & (24a) \\ \bar{v}_1(2nw + x_1, P) = (\bar{A}_1 / m_1) [\text{sh}(K_1 x_1) + \bar{b}_1 \text{ch}(K_1 x_1)] \exp(-2nwK) & (24b) \\ \bar{\sigma}_2(2nw + w_1 + x_2, P) = \bar{A}_1 [\bar{a}_2 \text{ch}(K_2 x_2) + \bar{b}_2 \text{sh}(K_2 x_2)] \exp(-2nwK) & (24c) \\ \bar{\sigma}_3(2nw + w_2 + x_3, P) = \bar{A}_1 [\bar{a}_3 \text{ch}(K_3 x_3) + \bar{b}_3 \text{sh}(K_3 x_3)] \exp(-2nwK) & (24d) \end{cases}$$

其中, \bar{A}_1 由 $x=0$ 的边界条件定, 而

$$-h_i \leq x_i \leq h_i \quad (25)$$

三、粘弹比拟理论

在 (24) 中取 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, 得到

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_1(2nw, P) = \bar{A}_1 \exp(-2nwK) \\ \bar{v}_1(2nw, P) = (\bar{A}_1 \bar{b}_1 / m_1) \exp(-2nwK) \\ \bar{\sigma}_2(2nw + w_1, P) = \bar{A}_1 \bar{a}_2 \exp(-2nwK) \\ \bar{\sigma}_3(2nw + w_2, P) = \bar{A}_1 \bar{a}_3 \exp(-2nwK) \end{cases} \quad (26)$$

其中, n 取不同的整数可得不同层中心的应力和速度。下面就来寻找一等效的粘弹体, 使该粘弹体中在象空间中的应力和速度具有 (24) 的形式。

以 Φ, η, ν, ρ, G 分别代表均匀、各向同性、线性粘弹体中的垂直正应力、正应变、质点速度、密度和松弛函数。则其控制方程为

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \rho \dot{V} \\ \frac{\partial V}{\partial x} = \dot{\eta} \\ \Phi(x, t) = \int_{0^-}^{\infty} G(t-t') d\eta(x, t') \\ \Phi(x, 0^-) = V(x, 0^-) = \eta(x, 0^-) = 0 \end{array} \right. \quad (27)$$

将(27)进行Laplace变换, 再联立求解, 可得解为

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Phi}(x, P) = \bar{a} \exp[-(\rho P/\bar{G})^{1/2} x] \\ \bar{V}(x, P) = \frac{-K\bar{a}}{\rho P} \exp[-(\rho P/\bar{G})^{1/2} x] \end{array} \right. \quad (28)$$

其中, \bar{a} 是 P 的函数, 由 $x=0$ 的边条件定。

比较(28)和(26), 为使它们有相同的形式, 令

$$K = (\rho P/\bar{G})^{1/2} \quad (29)$$

再由(20), 有

$$2 \operatorname{ch}[2w(\rho P/\bar{G})^{1/2}] = F(P) \quad (30)$$

(30)便是等效粘弹性体松弛函数的象函数 \bar{G} 的方程, 对之进行Laplace反演, 即可求得等效松弛函数 $G(t)$ 。一般情况下难以得到解析解, 以后将用数值反演方法求解 $G(t)$ 。

ρ 可由层合板中的 ρ_i 取加权平均得到^[7]

$$\rho = \frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3}{h_1 + h_2 + h_3} \quad (31)$$

将层合板某一层中心的解(26)同粘弹体的(28)进行比较, 可得两者之间应力和速度的对应关系。根据我们所关心的不同问题(某种材料中的应力或速度)以及不同的边条件, 我们可选取不同的 \bar{A}_i (或 \bar{B}_i) $\sim \bar{a}$ 关系。此处不详述。如主要关心第一种材料中的应力, 可取(本文均考虑此情况)

$$\bar{A}_1 = \bar{a} \quad (32)$$

则由(26)和(28), 知

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\sigma}_1(x, P) = \bar{\Phi}(x, P) \\ \bar{v}_1(x, P) = -\frac{\bar{b}_1 \rho P}{K m_1} \bar{V}(x, P) \triangleq P \bar{J}_1 \bar{V}(x, P) \end{array} \right\} \text{对 } x = 2nw \quad (33a)$$

$$\bar{\sigma}_2(x, P) = \bar{a}_2 \exp(w_1 K) \bar{\Phi}(x, P) \triangleq P \bar{M}_2 \bar{\Phi}(x, P), \text{对 } x = 2nw + w_1 \quad (33b)$$

$$\bar{\sigma}_3(x, P) = \bar{a}_3 \exp(w_2 K) \bar{\Phi}(x, P) \triangleq P \bar{M}_3 \bar{\Phi}(x, P), \text{对 } x = 2nw + w_2 \quad (33c)$$

其中

$$\bar{J}_1 = -\frac{\bar{b}_1 \rho}{K m_1}; \quad \bar{M}_2 = \frac{\bar{a}_2 \exp(w_1 K)}{P}; \quad \bar{M}_3 = \frac{\bar{a}_3 \exp(w_2 K)}{P} \quad (34)$$

对 (33) 两端进行 Laplace 逆变换, 并利用 Stieltjes 卷积的 Laplace 变换性质, 有

$$\sigma_1(2nw, t) = \Phi(2nw, t) \quad (35a)$$

$$v_1(2nw, t) = \int_{0^-}^t J_1(t-t') dV(2nw, t') \quad (35b)$$

$$\sigma_2(2nw + w_1, t) = \int_{0^-}^t M_2(t-t') d\Phi(2nw + w_1, t') \quad (35c)$$

$$\sigma_3(2nw + w_2, t) = \int_{0^-}^t M_3(t-t') d\Phi(2nw + w_2, t') \quad (35d)$$

现来导出等效粘弹体的边界条件。如层合板的边条件为

$$a) \quad \sigma_1(0, t) = f_1(t) \quad (f_1(t) \text{ 为任一给定函数}) \quad (36a)$$

则由 (35a) 知粘弹体的边条件为

$$\Phi(0, t) = f_1(t) \quad (36b)$$

如层合板的边条件为

$$b) \quad v_1(0, t) = f_2(t) \quad (f_2(t) \text{ 为任一给定函数}) \quad (36c)$$

则由 (35b), 根据 Stieltjes 卷积的性质, 知粘弹体的边条件为

$$V(0, t) = \int_{0^-}^t J_1^{-1}(t-t') dv_1(0, t') = \int_{0^-}^t J_1^{-1}(t-t') df_2(t') \quad (36d)$$

其中, $J_1^{-1}(t)$ 是 $J_1(t)$ 的 Stieltjes 逆。

到此, 我们已经用等效的粘弹体代替了层合板。等效的松弛函数和质量密度由 (30)、(31) 给出。等效粘弹体的边条件由 (36b) 或 (36d) 给出。于是我们可用熟知的特征线理论数值积分 (27), 而得 Φ, V , 再由 (35) 而得层合板任一层中心的 σ, v 。

四、用 Laplace 变换的数值反演求松弛函数 $G(t)$

下面将用到 $G(0)$ 、 $G(\infty)$ 、 $\dot{G}(0)$ 之值, 在此我们先给出它们。由 (20) 知

$$\bar{G}(P) = 4w^2 \rho P / [\ln(F(P) \pm \sqrt{F^2(P) - 1})]^2 \quad (37)$$

由 Laplace 变换的性质和 (37) 知

$$G(0) = \lim_{P \rightarrow \infty} P \bar{G}(P) = \frac{4w^2 \rho}{(A_1 + A_2 + A_3)^2} \equiv G_0 \quad (38)$$

其中

$$A_i = \sqrt{\rho_i / (\lambda_i + 2\mu)} \cdot 2h_i \quad (39)$$

$$G(\infty) = \lim_{P \rightarrow 0} P \bar{G}(P) = w / (h_1/g_1 + h_2/g_2 + h_3/g_3) \equiv G_\infty \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \dot{G}(0) &= \lim_{P \rightarrow 0} P [P \bar{G}(P) - G(0)] \\ &= -8w^2 \rho \ln[(1 + N_1 + N_2 + N_3)/4] / (A_1 + A_2 + A_3)^3 \end{aligned} \quad (41)$$

其中

$$N_i = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_i (\lambda_i + 2\mu_i)}{\rho_k (\lambda_k + 2\mu_k)} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\rho_k (\lambda_k + 2\mu_k)}{\rho_i (\lambda_i + 2\mu_i)} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (42)$$

在上式中, $i \neq j \neq k ; i, j, k = 1, 2, 3$ 。

Laplace 变换的数值反演的方法很多, 每种方法都有自己的要求和特点。本文在分析了方法 (6) 的特性的基础上, 发展了此方法以适用于我们 $\bar{G}(P)$ 的反演。此方法中, 可调参数 N 选大了或小了都不一定好, 针对 $G(t)$ 的特点, 我们采用了分时间段选取 N 的办法来提高反演的精度。在此方法中我们使用了“达因、厘米、微秒、 10^{-12} 克”制, 这可以减少单位换算的麻烦。在图 2 中, 给出了三层复合材料的 $G(t)$ 。三层复合材料的力学性能和几何参数见图 2 (本文中的算例均采用此参数)。在得到 $G(t)$ 时用到了 (37)、(38)、(40) 式。

由 Laplace 变换的基本性质知

$$\dot{G}(t) = L^{-1} \{ P\bar{G}(P) - G(0) \} \quad (43)$$

利用上式和 (6) 给出的方法, 可得 $\dot{G}(t)$ 的数值结果。

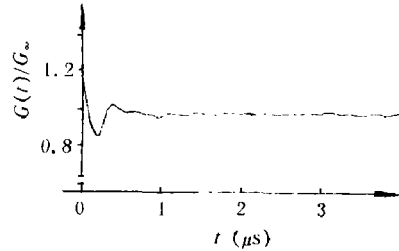
五、求第一种材料层中心的应力和速度

1. 用特征线法求等效粘弹体波的传播

设层合板的边界条件为

$$\sigma_1(0, t) = H(t)$$

图 2 “等效”松弛函数 Fig. 2 “Equivalent” relaxation function



则由 (36b) 知等效粘弹体的边界条件为

$$\Phi(0, t) = H(t) \quad (45)$$

用特征线理论, 可将等效粘弹体控制方程组 (27) 化为沿三族特征线的常微分方程组 (特征相容关系)

$$\begin{cases} \frac{D\Phi}{Dt} \mp \rho C_0 \frac{DV}{Dt} = I, & \text{沿 } \frac{dx}{dt} = \pm C_0 \\ \frac{D\Phi}{Dt} - G_0 \frac{D\eta}{Dt} = I, & \text{沿 } \frac{dx}{dt} = 0 \end{cases} \quad (46)$$

其中

$$\begin{cases} I = \int_0^t \dot{G}(t-t') d\eta(x, t') \\ C_0 = \sqrt{G(0)/\rho} \end{cases} \quad (47)$$

用特征线数值法求解时, 经 $x-t$ 平面上任一点有三条特征线, 差分网格如图 3 所示, 其中 OA 是头冲击波阵面。由跨过击波 OA 的突变条件和沿特征线 OA 的特征关系, 易得 OA 紧后方的应力为

$$\Phi(x, t) = H(0) \exp \left\{ \frac{\dot{G}(0)x}{2C_0 G_0} \right\} \quad (48)$$

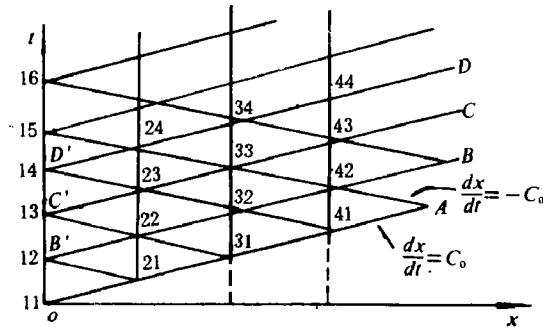


图3 差分网格

Fig. 3 Difference mesh

现在就可对 AOt 区进行求解而得 Φ, η, V 。其中

$$\dot{G}(t) \doteq [G(t+\Delta t) - G(t-\Delta t)] / (2\Delta t) \tag{49}$$

可由前面介绍的方法求得。

2. 第一种材料层中心的应力和速度

由 (35a) 知, $x = 2nw$ 处等效粘弹体的应力正是层合板第 $(3n+1)$ 层 (第一种材料) 中心的应力。图 4 给出了第 16 层中心的应力, 图 5 给出了第 31 层中心的应力。

用求 $G(t)$ 的方法, 我们可得 $J_1(t)$ 。 $V(2nw, t')$ 由前面特征线法给出, 于是由 (35b) 可得第一种材料层中心的速度。图 6 给出了第 31 层中心的速度。

在图 4、5、6 中同时还给出了射线理论 (沿层合板的每一层追踪波透、反射而得波的传播规律) 的计算结果。由图可见粘弹比拟理论与精确理论——射线理论符合得较好。在计算中, 我们发现随着 $G(t)$ 和粘弹体特征线法的精度的提高, 粘弹比拟理论的解将趋于射线理论阶梯式的解。图中还给出了推广了的 Postma 的等效模量理论^[7] 的结果。

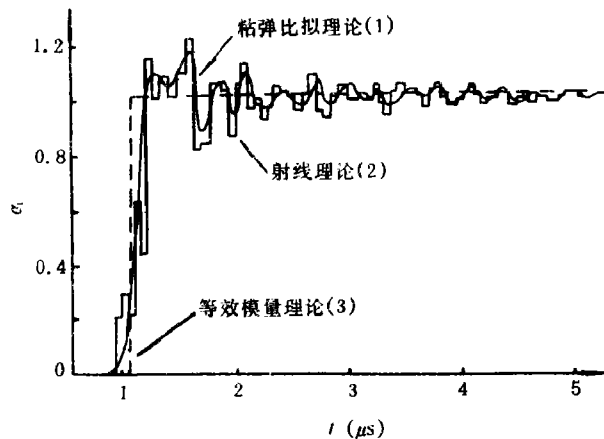


图4 第16层中心的应力

Fig. 4 Stress at the center of 16th layer

(1) Theory of viscoelastic analogy, (2) Ray theory, (3) Effective modulus theory

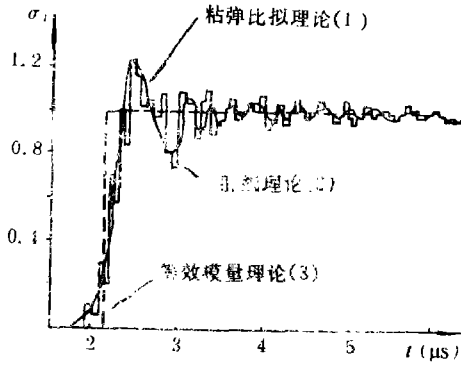


图 5 第31层中心的应力

Fig. 5 Stress at the center of 31st layer
(1),(2),(3)—ditto as in Fig. 4

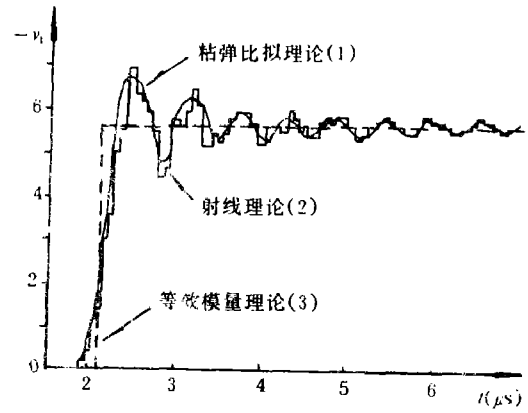


图 6 第31层中心的速度

Fig. 6 Velocity at the center of 31st layer
(1),(2),(3)—ditto as in Fig. 4

六、第二、三种材料层中心的应力

用求 $G(t)$ 的方法，我们可得 $M_2(t)$ ， $M_3(t)$ 。如图7、8所示。 $\Phi(2nw + w_1, t)$ ， $\Phi(2nw + w_2, t)$ 由前面的等效粘弹体的特征线法给出。再由(35c)，(35d)可得 $\sigma_2(2nw + w_1, t)$ ，和 $\sigma_3(2nw + w_2, t)$ 之值。图9和图10分别给出了第32，第33层中心的应力。图中同时给出了射线理论以及等效模量理论的结果。

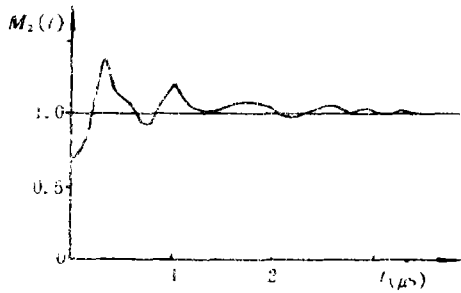


图 7 求 σ_2 的辅助函数

Fig. 7 The auxiliary function for σ_2

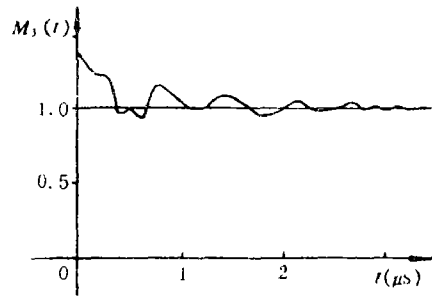


图 8 求 σ_3 的辅助函数

Fig. 8 The auxiliary function for σ_3

七、求任意点处的应力和速度

我们可由前面求得的任一层中心的应力和速度，推算出该层中任意点的应力和速度。将(26a)代入(24a)中，有

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_i(2nw + x_i, P) = & \frac{1}{2} [\exp(K_1 x_i) + \exp(-K_1 x_i)] \bar{\sigma}_i(2nw, P) \\ & + \frac{1}{2} [\exp(K_1 x_i) - \exp(-K_1 x_i)] m_1 \bar{v}_i(2nw, P) \end{aligned} \quad (50)$$

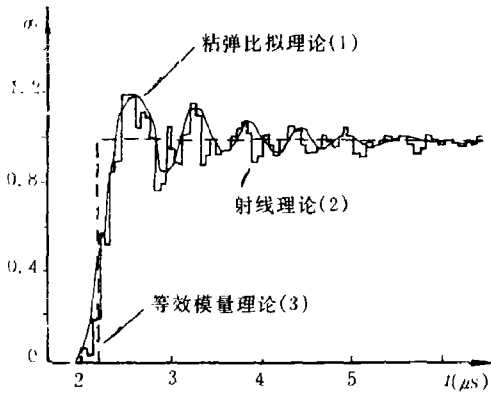


图9 第32层中心的应力

Fig.9 Stress at the center of 32nd layer
(1),(2),(3)-ditto as in Fig.4

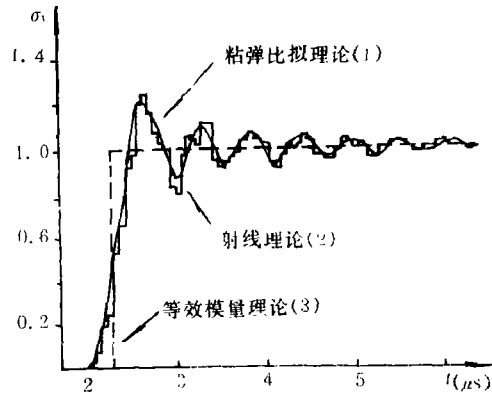


图10 第33层中心的应力

Fig.10 Stress at the center of 33rd layer
(1),(2),(3)-ditto as in Fig.4

再定义

$$\begin{cases} \bar{D}_1(x_1, P) = \exp(-K_1 x_1) / P \\ \bar{F}_1(x_1, P) = m_1 \exp(-K_1 x_1) / P \end{cases} \quad (51)$$

$D_1(-x_1, t)$ 、 $F_1(-x_1, t)$ 可由 $D_1(x_1, t)$ 、 $F_1(x_1, t)$ 从 $x_1 > 0$ 到 $x_1 < 0$ 解析外推而得。于是代(51)式到(50)式中去,有

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_1(2nw + x_1, P) &= \frac{1}{2} \{ \bar{\sigma}_1(2nw, P) \exp(Px_1/C_{10}) \} P [\bar{D}_1(-x_1, P) \exp(-Px_1/C_{10})] \\ &+ \frac{1}{2} \{ \bar{\sigma}_1(2nw, P) \exp(-Px_1/C_{10}) \} P [\bar{D}_1(x_1, P) \exp(Px_1/C_{10})] \\ &+ \frac{1}{2} \{ \bar{v}_1(2nw, P) \exp(Px_1/C_{10}) \} P [\bar{F}_1(-x_1, P) \exp(-Px_1/C_{10})] \\ &- \frac{1}{2} \{ \bar{v}_1(2nw, P) \exp(-Px_1/C_{10}) \} P [\bar{F}_1(x_1, P) \exp(Px_1/C_{10})] \end{aligned} \quad (52)$$

其中

$$C_{10} = \sqrt{g_1(0)/\rho} \quad (53)$$

由Stieltjes 卷积的Laplace 变换性质以及Laplace 变换的实位移性质, 知(52)的反演为

$$\begin{aligned} \sigma_1(2nw + x_1, t) &= \frac{1}{2} \int_{0^-}^t \sigma_1\left(2nw, t + \frac{x_1}{C_{10}} - t'\right) dD_1\left(-x_1, t' - \frac{x_1}{C_{10}}\right) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{0^-}^t \sigma_1\left(2nw, t - \frac{x_1}{C_{10}} - t'\right) dD_1\left(x_1, t' + \frac{x_1}{C_{10}}\right) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{0^-}^t v_1\left(2nw, t + \frac{x_1}{C_{10}} - t'\right) dF_1\left(-x_1, t' - \frac{x_1}{C_{10}}\right) \end{aligned} \quad (54)$$

$$-\frac{1}{2} \int_{0^-}^t v_1 \left(2nw, t - \frac{x_1}{C_{10}} - t' \right) dF_1 \left(x_1, t' + \frac{x_1}{C_{10}} \right)$$

当第一种材料为弹性时，我们有

$$\begin{cases} D_1(x_1, t) = H\left(t - \frac{x_1}{C_{10}}\right) \\ D_1(-x_1, t) = m_1 H\left(t + \frac{x_1}{C_{10}}\right) \\ \bar{F}_1(x_1, P) = m_1 H\left(t - \frac{x_1}{C_{10}}\right) \\ \bar{F}_1(-x_1, P) = m_1 H\left(t + \frac{x_1}{C_{10}}\right) \end{cases} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1(2nw + x_1, t) = & \frac{1}{2} \left(\sigma_1 \left(2nw, t + \frac{x_1}{C_{10}} \right) + \sigma_1 \left(2nw, t - \frac{x_1}{C_{10}} \right) \right) \\ & + v_1 \left(2nw, t + \frac{x_1}{C_{10}} \right) m_1 - v_1 \left(2nw, t - \frac{x_1}{C_{10}} \right) m_1 \end{aligned} \quad (56)$$

当材料为粘弹性时，也可作近似处理而用上面的关系。对 $v_1(2nw + x_1, t)$ 可同理处理。

$\sigma_1(2nw, t)$, $v_1(2nw, t)$ 我们已在图4、6中给出（其中 $n=10$ ），将它们代入（56）中，可得 $\sigma_1(2nw + x_1, t)$ 的值。图11中给出了第31层与第32层交界处的应力。关于第二、第三种材料中的任意点的应力和速度，可同样求得。

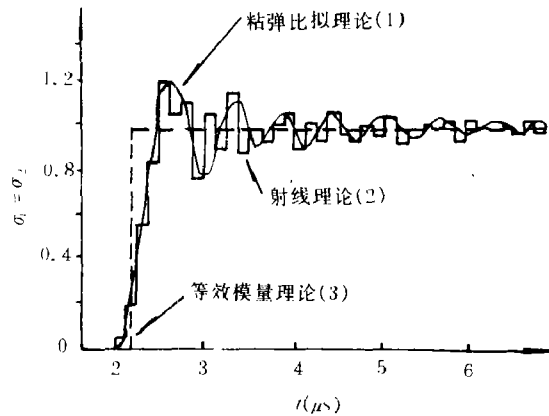


图11 第31与32层交界面上的应力

Fig. 11. Stress at the interface between the 31st and 32nd layers

参 考 文 献

- [1] Barker, L. M., *J. Composite Materials*, **5** (1971), AMR 24 (1971), Rev 5781-140.
- [2] Christensen, R. M., *J. Appl. Mech.*, **42** (1975), 153.
- [3] Ting, T. C. T., Mukunoki, I., *J. of Applied Mechanics*, **46** (1979), 329.

- [4] Mukunoki, I., Ting, T. C. T., *Int. J. Solids Struct.*, **16** (1980), 239.
- [5] Ince, E. L., *Ordinary Differential Equations*, Dover, New York (1956), 381.
- [6] Stehfest Harald, *Communications of the ACM.*, **13** (1) (1970), 47.
- [7] Postma, G. W., *Geophysics*, **XX** (4) (1955) ,780.

THE METHOD OF VISCOELASTIC ANALOGY FOR TRANSIENT WAVE PROPAGATION IN LAYERED COMPOSITES

Li Yongchi, Chen Li, Tang Zhijing

(Department of Modern Mechanics, The University of Science and Technology of China)

ABSTRACT This paper develops the theory of viscoelastic analogy and uses the theory for transient wave propagation normal to the layering direction of a semi-infinite composite with three layers as a period. We have found an "equivalent" homogeneous viscoelastic material and obtained the "equivalent" relaxation function and some other "auxiliary" functions by a better method of numerical inversion of Laplace transform. By solving the transient waves in the "equivalent" viscoelastic medium by the characteristics method, we can obtain the stress and particle velocity at the layer centers of the composites, and then obtain the stress and particle velocity at any points in the composites through the "auxiliary" functions. For an illustrative problem, which can be solved by the exact ray theory, the comparison between the results of the viscoelastic analogy theory and those of the ray theory shows that the theory of viscoelastic analogy is very successful in solving the transient waves in semi-infinite composites with a period of three layers.

KEY WORDS layered composites, theory of viscoelastic analogy, relaxation function, transient wave propagation.