

# 在弹-粘塑性材料中平面波传播的初步研究

林其文

(西南流体物理研究所)

**摘要** 在材料的应力应变关系中, 本文对剪切部分的线性弛豫近似和线性硬化效应作了简化讨论, 其中对动态和静态的加载、卸载过程讨论的更多一些, 从而得到一个适合于弹-粘塑性材料以及加载、卸载过程都可用的本构关系, 并将其用于一维平面波的传播过程, 计算了飞板碰靶后应力、应变的分布, 结果同 Романченко<sup>[1]</sup> 等人的工作相符。

**关键词** 动态应力 材料动态性质 弹塑性波

## 1. 应力应变关系

首先对弹塑性材料我们做如下假定

(1) 应变率 $\dot{\epsilon}$ 分解成弹性部分 $\dot{\epsilon}_e$ 和塑性部分 $\dot{\epsilon}_p$ , 且塑性部分不产生体应变

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_i = \dot{\epsilon}_{ei} + \dot{\epsilon}_{pi} & i = 1, 2, 3, & (1) \\ \dot{\theta} = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3 = \dot{\epsilon}_{e1} + \dot{\epsilon}_{e2} + \dot{\epsilon}_{e3} & (2) \\ \dot{\epsilon}_{p1} + \dot{\epsilon}_{p2} + \dot{\epsilon}_{p3} = 0 & (3) \end{cases}$$

其中 $\dot{\theta}$ 为体应变率(伸缩率)。材料体积的变化仅与弹性应变部分有关, 这是塑性流准则 $d\epsilon_{ij} = (\partial f / \partial \sigma_{ij}) d\lambda$ 的必然结果(其中 $\sigma_{ij}$ 为应力,  $f$ 为Mises屈服函数,  $d\lambda$ 为常数)。在这个假定下, 所有的塑性应变都是偏量。

(2) 应力率 $\dot{\sigma}$ 仅依赖于弹性应变率, 而和塑性应变率无关, 其式为

$$\dot{\sigma}_1 = \lambda \dot{\theta} + 2G \dot{\epsilon}_{e1}, \quad \dot{\sigma}_2 = \lambda \dot{\theta} + 2G \dot{\epsilon}_{e2}, \quad \dots \quad (4)$$

其中 $\lambda$ 为Lame系数,  $G$ 为剪切模量。在平面一维情况下, 设 $\dot{\sigma}_1 = \dot{\sigma}$ ,  $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}$ , 表示与波传播方向一致的纵向分量;  $\dot{\sigma}_2 = \dot{\sigma}_3 = \dot{\sigma}_t$ ,  $\dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_3 = 0$ , 表示垂直于波传播方向的切向分量。上述公式可简化为

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + 2\dot{\epsilon}_{e1} & (2') \\ \dot{\epsilon}_p + 2\dot{\epsilon}_{p1} = 0, \quad \dot{\epsilon}_{e1} + \dot{\epsilon}_{p1} = 0 & (3') \\ \dot{\sigma} = (\lambda + 2G)\dot{\epsilon} - 2G\dot{\epsilon}_p, \quad \dot{\sigma}_t = \lambda\dot{\epsilon} + G\dot{\epsilon}_p & (4') \end{cases}$$

在平面一维情况下, 体应变率与沿波阵面传播方向的应变率(纵向应变率)相等。定义最大剪切应力率 $\dot{\tau} = (\dot{\sigma} - \dot{\sigma}_t) / 2$ , 剪切应变率 $\dot{\gamma} = \dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_t = \dot{\epsilon}$ , 而相应的塑性剪切应变率 $\dot{\gamma}_p = \dot{\epsilon}_p - \dot{\epsilon}_{p1} = 3\dot{\epsilon}_p / 2$ , 于是, (4')式可写成

1987年12月9日收到原稿, 1988年3月3日收到修改稿。

$$\dot{\sigma} = (\lambda + 2G)\dot{\varepsilon} - (4/3)G\dot{\gamma}_p, \quad \dot{\tau} = G(\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_p) \quad (4'')$$

(3) 把剪切塑性应变率同剪切应力的关系作线性弛豫近似(线性粘性近似), 即

$$\dot{\gamma}_p = (\tau - \tau_c) / \eta \quad (5)$$

其中  $\tau_c$  为静态剪切应力, 它只和剪切应变  $\gamma$  有关;  $\eta$  为材料的粘性系数。于是 (4'') 式可写成

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \frac{4}{3} \frac{\tau - \tau_c}{E_1 t_0}, \quad \dot{\gamma} = \frac{\dot{\tau}}{G} + \frac{\tau - \tau_c}{G t_0} \quad (4''')$$

其中  $t_0 = \eta/G$  为材料的动态过渡到平衡态的弛豫时间,  $E_1 = \lambda + 2G = K + 4G/3$  为纵向(弹性)模量,  $K$  为体积模量。如果将 (4'') 式中  $\dot{\sigma}$  和  $\dot{\tau}$  联立, 消去  $\dot{\gamma}_p$ , 可得关系

$$\dot{\sigma} = K\dot{\varepsilon} + (4/3)\dot{\tau}, \quad \text{或 } \tau = (3/4)(\sigma - K\varepsilon) \quad (6)$$

将 (6) 式代入 (4''') 式, 可得纵向部分的动态应力应变关系

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma} / E_1 + (\sigma - \sigma_c) / E_1 t_0 \quad (7)$$

其中纵向静态应力  $\sigma_c$  为

$$\sigma_c = K\varepsilon + (4/3)\tau_c \quad (8)$$

(4) 假定材料在加载过程中满足线性硬化关系

$$\tau_c = \tau_s + M(\gamma - \gamma_s) \quad (9)$$

其中  $M$  为剪切硬化模量,  $\tau_s$ 、 $\tau_s$  分别为剪切应变和应力的屈服极限。相应的纵向静态应力、应变关系由 (8)、(9) 二式可得

$$\sigma_c = \sigma_s + E_2(\varepsilon - \varepsilon_s) \quad (10)$$

其中  $E_2 = K + (4/3)M$  为纵向硬化模量,  $\varepsilon_s = \gamma_s$ ,  $\sigma_s = K\varepsilon_s + (4/3)\tau_s$  分别为相应的屈服极限。可证明, 剪切硬化模量同简单拉伸(压缩)硬化模量  $E'$  的关系为  $M = E' / [3 - (E' / 3K)]$ 。

(7) 式和 (10) 式就是本文研究一维平面波, 在线性硬化的弹-粘塑性材料中的传播问题所用的应力应变关系。本文所讨论的材料弹塑性参数都假定为常数。

## 2. 加载和卸载

我们知道, 当应力超过材料的弹性极限而继续增加时, 材料的变形就按照(塑性)加载规律进行, 而后, 若应力降低, 则变形首先按照(弹性)卸载规律进行。正是由于材料的这种塑性变形的不可逆性, 因此它的应力应变关系不是一一对应的, 而是和整个变形历史有关, 通常把这种和变形历史有关的应力应变间的关系称为本构关系或本构方程。上节讨论的公式 (7) 和公式 (10) 仅对于一次性的连续加载才适合, 即无初始塑性变形, 变形过程中也无卸载发生。为了描述材料中弹塑性波的传播, 我们下面讨论一般的变形过程。

### (1) 静态应力应变 $\sigma_c \sim \varepsilon$ 的加载和卸载

对于 (10) 式所描述的线性硬化材料, 若应力  $\sigma_c$  达到初始屈服极限  $\sigma_s$  后, 继续增到  $\sigma^+$ , 则材料就发生塑性变形, 屈服应力也随之提高到  $\sigma^+$ , 我们称  $\sigma^+$  为加载应力。假定材料满足等向硬化条件, 即反向加载应力  $\sigma^-$  与正向加载应力  $\sigma^+$  的绝对值相等 ( $\sigma^- = -\sigma^+$ ), 本文以  $\sigma^+$  表示压缩加载应力(正值),  $\sigma^-$  表示拉伸加载应力。对加载过程 ( $|\sigma_c| > \sigma^+$ ), 应力增量和应变增量  $d\sigma_c \sim d\varepsilon$  遵从塑性变形规律, 且新的加载应力取代前时刻的加载应力, 即为塑性加载规律。若某时刻开始应力振幅不再增加 ( $|\sigma_c| \leq \sigma^+$ ), 则  $d\sigma_c \sim d\varepsilon$  满足弹性变形规律,  $\sigma^+$  和塑性应变  $\varepsilon_p$  等保持不变, 这就是所谓的弹性卸载规律。考虑到加载和卸载, 应力应变的增量关系可写为

$$\frac{d\sigma_c}{d\varepsilon} \begin{cases} E_2 & |\sigma_c| > \sigma^+ \\ E_1 & |\sigma_c| \leq \sigma^+ \end{cases} \quad (2-1)$$

上式第一行表示塑性加载，第二行表示弹性卸载。(2-1)式仅描述应力、应变增量关系的加载、卸载规律，而不能求出某时刻的应力应变状态。如果知道某时刻的塑性应变 $\varepsilon_p$ ，加载应力 $\sigma^+$ 之值时，可求出下一时刻的 $\sigma_c \sim \varepsilon$ 的全量关系

$$\sigma_c = \begin{cases} E_1(\varepsilon - \varepsilon_p) & |\sigma_c| \leq \sigma^+ \\ \sigma^+ + E_2(\varepsilon - \varepsilon^+) & \sigma_c > \sigma^+ \\ -\sigma^+ + E_2(\varepsilon - \varepsilon^+) & \sigma_c < -\sigma^+ \end{cases} \quad (2-2)$$

上式中最后一行表示反向加载。可证 $\sigma^+$ 、 $\varepsilon_p$ 、 $\varepsilon^+$ 和 $\varepsilon^-$ 只有两个独立量，它们满足条件

$$\varepsilon_p = \varepsilon^+ - \frac{\sigma^+}{E_1} = \varepsilon^- + \frac{\sigma^+}{E_1} \quad (2-3)$$

由(2-2)和(2-3)式可见，当给出某时刻 $\sigma^+$ 、 $\varepsilon_p$ 、 $\varepsilon^+$ 和 $\varepsilon^-$ 中任意两个参数值和变形过程，就可求出下一时刻的应力、应变状态。

### (2) 动态应力应变 $\sigma - \varepsilon$ 的加载和卸载

在冲击波加载实验中，我们感兴趣的是动态应力（实际应力），而静态应力 $\tau_c$ 只是为了研究动态应力 $\sigma$ 而引入的一种参考应力，它表示 $\sigma$ 在平衡态时的极限值，即 $\dot{\sigma}$ 、 $\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$ 时， $\sigma \rightarrow \sigma_c$ 。现将公式(7)开拓，使对卸载也适用。为此，将(7)式改写为

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_1 - \frac{\sigma - \sigma_c}{t_0 \dot{\varepsilon}} \quad (2-4)$$

我们约定只考虑递减硬化材料，即 $\sigma(\varepsilon)$ 曲线是向上凸的，无论加载或卸载，恒有条件 $d\sigma/d\varepsilon \leq E_1$ 。在(2-4)式中，若 $(\sigma - \sigma_c)/\dot{\varepsilon} > 0$ ，则 $d\sigma/d\varepsilon < E_1$ ，相当于塑性加载过程；若 $(\sigma - \sigma_c)/\dot{\varepsilon} = 0$ ，则 $d\sigma/d\varepsilon = E_1$ ，即为弹性卸载；若 $(\sigma - \sigma_c)/\dot{\varepsilon} < 0$ ，将导致 $d\sigma/d\varepsilon > E_1$ ，这是不可能的，其实属于弹性卸载，所以补充定义 $d\sigma/d\varepsilon = E_1$ 。综上所述，将(7)式推广为

$$\dot{\varepsilon} = (\dot{\sigma}/E_1) + f(\sigma_c, \sigma_c(\varepsilon)) \quad (2-5)$$

其中

$$f(\sigma, \sigma_c) = \begin{cases} \frac{\sigma - \sigma_c}{t_0 E_1} & (\sigma - \sigma_c)d\varepsilon > 0 \text{ (加载)} \\ 0 & (\sigma - \sigma_c)d\varepsilon \leq 0 \text{ (卸载)} \end{cases} \quad (2-6)$$

这里 $\sigma_c(\varepsilon)$ 由公式(2-2)给出。 $(\sigma - \sigma_c)d\varepsilon > 0$ 和 $(\sigma - \sigma_c)d\varepsilon \leq 0$ 就是动态应力、应变的加载和卸载的判定条件。注意 $(\sigma - \sigma_c)d\varepsilon$ 与 $(\sigma - \sigma_c)/\dot{\varepsilon}$ 的符号相同。

### 3. 一维平面波的传播

在平面一维的拉格朗日坐标中，质量和动量守恒的微分方程及本构方程分别是

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (3-1)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{1}{E_1} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = f$$

其中  $\rho_0$  为物质初始密度,  $u$  为粒子速度,  $f$  为 (2-6) 式表示的弛豫函数。

本文讨论的应力范围约  $0 \sim 10 \sigma_s$ , 材料参数  $K$ 、 $G$ 、 $\eta$ 、 $M$  等都取常数, 同时仅讨论平面波在同一种介质内的传播, 因此我们可对 (3-1) 式进行无量纲化。令无量纲变换:  $\bar{t} = t/t_0$ ,  $\bar{x} = x/(ct_0)$ ,  $\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_s$ ,  $\bar{\sigma}_c = \sigma_c/\sigma_s$ ,  $\bar{\varepsilon} = \varepsilon/\varepsilon_s$ ,  $\bar{u} = u/(c\varepsilon_s)$ ,  $\bar{\sigma}_+ = \sigma^+/\sigma_s$ ,  $\bar{\varepsilon}_+ = \varepsilon^+/\varepsilon_s$ ,  $\bar{\varepsilon}^- = \varepsilon^-/\varepsilon_s$ ,  $\bar{\varepsilon}_p = \varepsilon_p/\varepsilon_s$ , 并且  $c = (E_1/\rho_0)^{1/2}$ ,  $\sigma_s = E_1 \varepsilon_s$ , 则 (3-1) 式化为无量纲方程 (下面省略无量纲量上的横号), 则

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= f \end{aligned} \quad (3-2)$$

其中  $f$ 、 $\sigma_c$  等的无量纲形式分别为

$$f = \begin{cases} \sigma - \sigma_c, & (\sigma - \sigma_c)d\varepsilon > 0 \\ 0, & (\sigma - \sigma_c)d\varepsilon \leq 0 \end{cases} \quad (3-3)$$

$$\sigma_c = \begin{cases} \varepsilon - \varepsilon_p & |\sigma_c| < \sigma^+, \quad \varepsilon^- < \varepsilon < \varepsilon^+ \\ \sigma^+ + \frac{E_2}{E_1} (\varepsilon - \varepsilon^+) & \sigma_c > \sigma^+, \quad \text{或} \quad \varepsilon > \varepsilon^+ \\ -\sigma^+ + \frac{E_2}{E_1} (\varepsilon - \varepsilon^-) & \sigma_c < -\sigma^+, \quad \varepsilon < \varepsilon^- \end{cases} \quad (3-4)$$

$$\varepsilon_p = \varepsilon^+ - \sigma^+ = \varepsilon^- + \sigma^+ \quad (3-5)$$

微分方程组 (3-2) 式可写成如下的特征线方程形式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (u \pm \sigma) &= \mp f, \quad \frac{dx}{dt} = \pm 1 \\ \frac{d}{dt} (\varepsilon - \sigma) &= f, \quad \frac{dx}{dt} = 0 \end{aligned} \quad (3-6)$$

方程组 (3-6) 式的求解, 还与具体问题的初、边值条件有关。本文讨论原度为  $x_1$ 、速度为  $u_0$  的飞板去碰撞厚度为  $x_2$  的靶板的情况。我们给了两类初、边值条件

(1)  $x_1 \gg x_2$ , 因飞板比靶板厚得多, 飞板背面稀疏波对靶板的影响可忽略, 并把碰撞面看成是恒速  $u_0/2$  的界面 (碰撞面取  $x=0$ ), 因此

$$\begin{cases} \text{左界面 (碰撞面): } u(0, t) = u_0/2, \\ \text{右界面 (自由面): } \sigma(x_2, t) = 0, \\ \text{初值: } t=0 \text{ 时, } u = \varepsilon = \sigma = 0, \quad \varepsilon^+ = \sigma^+ = 1 \end{cases}$$

(2) 一般情况, 左、右端都是自由边界条件为

$$\sigma(0, t) = \sigma(x_0, t) = 0 \quad (x_0 = x_1 + x_2)$$

初值条件:  $t=0$  时,  $\varepsilon = \sigma = 0, \varepsilon^+ = \sigma^+ = 1$  以及

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & x_1 \leq x \leq x_0 \\ u_0 & 0 \leq x \leq x_1 \end{cases}$$

显然, 在第二种情况中, 当  $x_1 \gg x_2$  时, 波的传播情况将与第一种情况相当。

将特征线方程组 (3-6) 写成如下的差分格式

$$\begin{aligned} (u + \sigma)_k^{n+1} &= (u + \sigma)_{k-1}^n - \frac{h}{2} (f_k^{n+1} + f_{k-1}^n) \\ (u - \sigma)_k^{n+1} &= (u - \sigma)_{k+1}^n + \frac{h}{2} (f_k^{n+1} + f_{k+1}^n) \\ (\varepsilon - \sigma)_k^{n+1} &= (\varepsilon - \sigma)_k^n + \frac{h}{2} (f_k^{n+1} + f_k^n) \end{aligned} \quad (3-7)$$

其中  $h = \Delta t$  表示时间步长,  $f$  由 (3-3)、(3-4) 式给出。(3-7) 式同相应的边初值条件联立, 就可求出  $u, \varepsilon$  及  $\sigma$  等的场分布。对于  $(n+1)$  时刻的求解顺序是:  $u \rightarrow \varepsilon$ , 判定静态是加载或卸载, 算出  $\sigma_c$ ; 判定动态加载或卸载, 算出  $\sigma$ , 再求出  $f$ 。整个计算取显式格式,  $f$  仅作下一时刻的初值用。

#### 4. 计算结果和讨论

对于初、边值条件 (1), 在波阵面传播到靶的右端面之前, 无卸载发生。由于它仅是第二种初、边值条件的特例, 本文不作叙述。作为第二种初、边值条件的一个算例是: 飞板与靶板厚度相等,  $x_1 = x_2 = 40$ , 飞板初速  $u_0 = 10$ , 纵向硬化模量  $E_2$  与纵向弹性模量  $E_1$  之比  $E_2/E_1 = 0.65$ 。

图 1~2 是飞板与靶板碰撞后, 应力  $\sigma$  的位置  $x$  在不同时刻的分布曲线。由于飞板与靶板相碰撞, 从碰撞面  $x = 40$  处产生的压缩波, 分别在靶板中向右传播和在飞板中向左传播。当  $t < 40$  时, 它们都未到达自由端, 所以整个区域只有加载而无卸载。从图 1 可见, 波剖面的波头为弹性先驱波, 接着是应力振幅连续增加的塑性加载波, 并逐渐趋于稳定值。因粘性损耗, 弹性先驱波的振幅随着波阵面传播距离的增加而呈指数衰减, 一直降到弹性先驱振幅  $\sigma > 1$  的稳定值。塑性加载波的稳定值在波阵面传播过程中保持不变, 它只与碰撞的初速  $u_0$ 、材料参数  $E_2/E_1$  等有关, 这个加载应力波剖面图同 Романченко<sup>[1]</sup> 和 Herrman<sup>[2]</sup> 的计算是一致的。当  $t > 40$  时, 加载区域开始受到自由边界的影响, 稀疏波从左、右端分别向碰撞面处传播, 从而发生卸载过程。从图 2 可见, 卸载波头为弹性卸载, 接着是塑性弛豫卸载, 同时弹、塑性卸载波之间还有一小段的平坦部分。这个剖面图同 Herrman<sup>[2]</sup> 的计算曲线相符。当  $t > 80$  时, 左、右端传入的卸载波在撞击面  $x_1$  处相碰, 因本文未考虑断裂, 并把碰撞面也作连续介质处理, 所以在碰撞面附近逐渐形成拉伸区。

图 3 是靶板不同位置  $x$  处应力  $\sigma$  对时间  $t$  的分布曲线。靶中某点的受力历史, 大多数要经历弹性加载、塑性加载、稳定状态、弹性卸载、塑性弛豫衰减和拉伸等过程。对  $x = 40$  的撞击面附近, 因碰撞后的应力瞬时超过稳态值, 即弹性的瞬时加载后, 立即发生塑性弛豫衰减, 并逐渐趋于稳态应力值。

本文对于研究弹塑性波的波剖面结构及碰撞问题具有一定的实际意义。

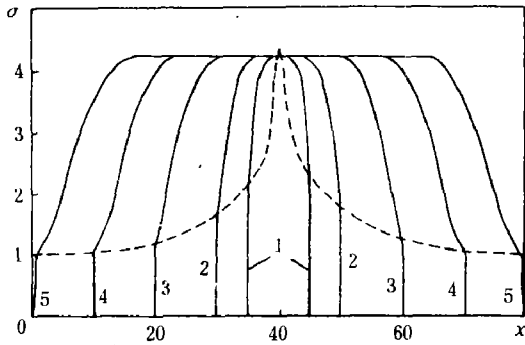


图1 加载应力  $\sigma$  在不同时刻对位置  $x$  的分布  
( $x=40$  为碰撞界面)  
1 —  $t=5$ , 2 —  $t=10$ , 3 —  $t=20$   
4 —  $t=30$ , 5 —  $t=40$

Fig. 1 Loading stress  $\sigma$  versus distance  $x$  at various time  
( $x=40$ —Impact surface)

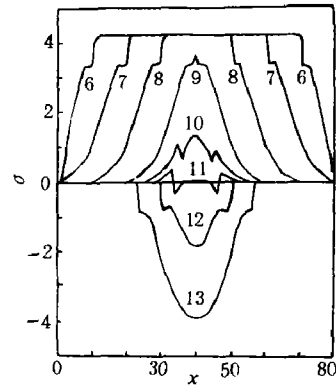


图2 卸载应力  $\sigma$  在不同时刻对位置  $x$  的分布  
6 —  $t=50$ , 7 —  $t=60$ , 8 —  $t=70$   
9 —  $t=80$ , 10 —  $t=85$ , 11 —  $t=87$   
12 —  $t=90$ , 13 —  $t=97$

Fig. 1 Unloading stress  $\sigma$  versus distance  $x$  at various time

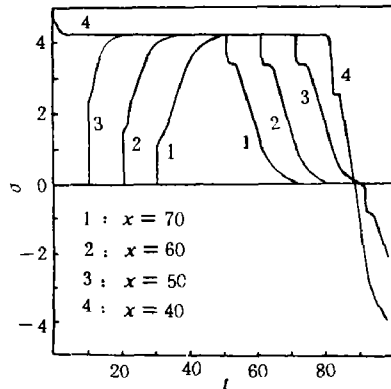


图3 靶区内不同位置  $x$  的应力  $\sigma$  对时间  $t$  的分布

Fig. 3 Stress  $\sigma$  versus time  $t$  at various distance in the target

对苏林祥付研究员的指导和帮忙，以及胡熙静同志的帮助，表示感谢。

参 考 文 献

[1] Романченко, В.И., Степанов, Г.В.. Анализ Распространения Плоской Волны Нагрузки в Вязк Упруго-Пластичном Материале, *Проблемы Прочности*, 3 (1978).

[2] Herrmann, W., Some recent results in elastic-plastic wave propagation. ASME-AMD-Vol. 17 (1976).

PRELIMINARY INVESTIGATIONS OF A PLANAR WAVE  
PROPAGATING IN ELASTIC-VISCOPLASTIC  
MATERIAL

Lin Qiwen

*(Southwest Institute of Fluid Physics)*

**ABSTRACT** In the stress-strain relations of material, the linear relaxation approximation and hardening effects for shear stress and strain are discussed, especially the static and dynamic loading and unloading processes are studied in more detail in this paper. The constitutive relation which is suitable for elastic-viscoplastic material with loading-unloading processes is presented. We make use of the relation and under the condition of one-dimensional planar wave propagation to calculate the profiles of the stress and strain in the target which is collided by a flying plate. The results are in agreement with that published by V. E. Romanchenko, G. V. Stepanov. Moreover, the compression and tension processes of the material are described well.

**KEY WORDS** dynamic stress, dynamic property of material, elastic-plastic wave.