

# 两种高分辨率数值方法计算波前有非均匀流的变截面管内激波传播规律的比较

吴清松

(中国科学技术大学近代力学系)

**摘要** 本文采用两种对间断解具有高分辨率的数值方法——基于推广 Riemann 问题解的二阶 Godunov 型有限差分法和分裂算子的随机选取法, 计算了激波在波前有非均匀定常流的一维变截面管道中的传播和波后流场特征, 得到一致结果, 用数值模拟方法揭示了这类运动的一些特殊规律。对比两种方法的计算过程和结果, 可以看出, 二阶 Godunov 型方法明显优于随机选取法。

**关键词** 数值计算 Godunov 方法 随机选取法 激波 变截面管

## 一、引言

以求解元 Riemann 问题为基础的 Godunov 型有限差分法<sup>[1]</sup>和随机选取法 (RCM)<sup>[2]</sup>, 把非线性波传播和相互作用引入到数值计算整个求解过程中, 体现了物理过程的本质特征。因此, 能够处理存在复杂非线性相互作用的间断流动, 得到具有高分辨率的间断解。近年来, 这类数值方法受到普遍重视, 在计算流体力学中得到广泛应用, 并逐步发展起多种精确和简化的计算格式<sup>[3]</sup>。

激波在波前具有非均匀定常流动的变截面管道中传播问题, 存在激波与截面改变以及与波前非均匀流之间两种非线性相互作用, 激波强度和波后流场呈现复杂的变化特征。为确定这种流动的精细结构, 本文采用基于推广 Riemann 问题 (GRP) 解的二阶 Godunov 型方法<sup>[4]</sup>和分裂算子的随机选取法<sup>[5]</sup>作了对比计算, 得到基本一致结果。然而, 二阶 Godunov 型方法更为有效。为减少由迭代方法精确求解元 Riemann 问题带来的高耗时消耗, 在 Godunov 型方法计算中, 本文还运用了无迭代的 Riemann 解算法。与精确解相比, 结果十分吻合。

## 二、方程和算法

### 1. 基本方程

随机选取法 (RCM), 采用以下一维无粘流守恒型方程

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = H(U) \quad (1)$$

其中

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \end{pmatrix}, F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho(e + (p/\rho))u \end{pmatrix}, H(U) = -\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ \rho(e + (p/\rho))u \end{pmatrix} \quad (2)$$

这里  $\rho, u, p, e, A$  分别为流体密度、速度、压力、单位质量总能和管道截面积。

二阶 Godunov 型方法, 则解与 (1) 式等价的准守恒型方程

$$A \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [AF(U)] + A \frac{\partial}{\partial x} G(U) = 0 \quad (3)$$

其中

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \end{pmatrix} \quad F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ (\rho e + p)u \end{pmatrix} \quad G(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

取完全气体模型, 则 (2)、(4) 式中

$$e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{u^2}{2} \quad (5)$$

这里  $\gamma$  为比热比。

### 2. 初始条件和边界条件

如图 1a、1b 所示, 取变截面段进口端  $x_1$  为坐标原点。当  $x_1 \leq x \leq x_2, dA/dx \neq 0$ , 当  $x < x_1$

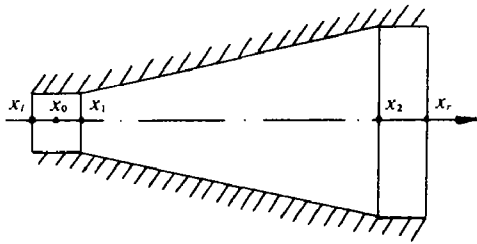


图 1a 锥形扩张管示意图

Fig. 1a Schematic diagram of the conical divergent tube

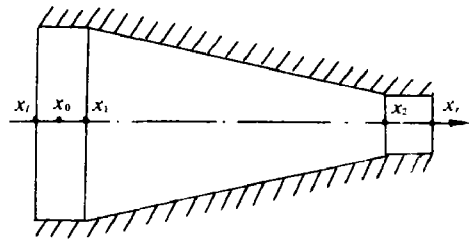


图 1b 楔形收缩管示意图

Fig. 1b Schematic diagram of the wedge convergent tube

及  $x > x_2$  时,  $dA/dx = 0$ 。给定  $A(x)$ , 初始  $t = 0$  时的运动激波位置  $x = x_0$ , 激波马赫数  $M_{s0}$ , 波前等截面段定常流马赫数  $M_{10}$  及相应的气流压力  $p_1$  和温度  $T_1$ 。

由运动激波前后参数关系, 确定初始波后参数  $p_2, \rho_2, u_2$ ; 按一维等熵流关系, 求出变截面段初始参数  $p, \rho, u$ 。为集中研究激波在变截面段传播情况, 设变截面两端接无限长均匀直管, 计算中截出一小段, 近似取其左端  $x = x_l$  和右端  $x = x_r$  为连续输入输出边界条件。于是, 得到初始条件为

$$\begin{cases} p(x, 0) = p_2, \quad \rho(x, 0) = \rho_2, \quad u(x, 0) = u_2 & x_l \leq x \leq x_0 \\ p(x, 0) = p_1, \quad \rho(x, 0) = \rho_1, \quad u(x, 0) = u_1 & x_0 < x \leq x_1 \\ p(x, 0) = p[A(x), 0], \quad \rho(x, 0) = \rho[A(x_2), 0], \quad u = u[A(x), 0] & x_1 < x \leq x_2 \\ p(x, 0) = p[A(x_2), 0], \quad \rho(x, 0) = \rho[A(x_2), 0], \quad u = \rho[A(x_2), 0] & x_2 < x \leq x_r \end{cases} \quad (6a)$$

边界条件为

$$\begin{cases} p(x_l, t) = p(x_l + \Delta x, t), \quad \rho(x_l, t) = \rho(x_l + \Delta x, t), \quad u(x_l, t) = u(x_l + \Delta x, t) \\ p(x_r, t) = p(x_r - \Delta x, t), \quad \rho(x_r, t) = \rho(x_r - \Delta x, t), \quad u(x_r, t) = u(x_r - \Delta x, t) \end{cases} \quad (6b)$$

其中  $\Delta x$  为计算步长。

### 3. 计算方法

采用分裂算子的随机选取法计算方程 (1); 按差分方法常规分割计算网格; 将方程分裂为

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0 & (7a) \\ \frac{\partial U}{\partial t} = H(U) & (7b) \end{cases}$$

运用两步法, 每步前进半个时间步长, 续接求解方程 (7a) 和 (7b)。每步计算, 均以解定义在子区域边界上的元 Riemann 问题作基础, 通过随机取样过程, 求出齐次方程 (7a) 的解。再按 Euler 折线法, 续接求解常微分方程 (7b), 以作非齐次修正。元 Riemann 问题采用切线或割线迭代法精确求解。伪随机数的产生, 本文选用均匀分布性较好的 van der Corput 方法。

$$\theta_n = \sum_{k=0}^m i_k 2^{-(k+1)} - 0.5 \quad (8)$$

其中  $m$  为二进制表示的自然数  $n$  的最高次幂,  $i_k$  为 0 或者 1。

Godunov 型方法, 则采用建立在求解推广 Riemann 问题 (GRP) 基础上的二阶差分格式<sup>[5]</sup>。令  $\theta^n$  表物理量  $Q$  在第  $n$  时间层, 第  $i$  个空间格点区间上平均值, 而  $Q_{i\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$  表  $Q$  在网格边界  $x_{i\pm\frac{1}{2}}$  上, 在时间  $(n\Delta t, (n+1)\Delta t)$  里的平均值, 则方程 (3) 的求解格式为

$$\begin{aligned} U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta V_i} \left\{ A(x_{i+\frac{1}{2}}) F(U)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - A(x_{i-\frac{1}{2}}) F(U)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right\} \\ - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ G(U)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - G(U)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$\begin{cases} \Delta V_i = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} A(x) dx \\ F(U)_{i\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = F(U_{i\pm\frac{1}{2}}^n) + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} F(U) \right)_{i\pm\frac{1}{2}}^n \\ G(U)_{i\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = G(U_{i\pm\frac{1}{2}}^n) + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} G(U) \right)_{i\pm\frac{1}{2}}^n \end{cases} \quad (10a)$$

而

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial t} F(U) \right)_{i\pm\frac{1}{2}}^n = F'(U_{i\pm\frac{1}{2}}^n) \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)_{i\pm\frac{1}{2}}^n \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} G(U) \right)_{i\pm\frac{1}{2}}^n = G'(U_{i\pm\frac{1}{2}}^n) \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)_{i\pm\frac{1}{2}}^n \end{cases} \quad (10b)$$

这里  $U_{i\pm\frac{1}{2}}^n, \left( \frac{\partial}{\partial t} U \right)_{i\pm\frac{1}{2}}^n$  分别为推广 Riemann 问题在间断处的解及其对时间的导数,  $F'(U_{i\pm\frac{1}{2}}^n),$

$G'(U_{i\pm\frac{1}{2}}^n)$  则为  $F(U), G(U)$  对  $U$  的 Jacob 在间断处的值。

所谓推广 Riemann 问题, 乃是用两线性分布初态  $U_{\pm}(x)$  替代一般 Riemann 问题中两

均匀分布初态,并按以下基本假设确定其解的初值问题:设方程(3)在  $A(x) \equiv 1$  下具有均匀分布初态为  $U_{\pm} = \lim_{x \rightarrow 0} U_{\pm}(x)$  的一个相关 Riemann 问题的解是  $R_E\left(\frac{x}{t}; U_-, U_+\right)$ , 而推广 Riemann 问题解为  $R(x, t; U_{\pm}(x))$ , 则两解在局部具有相同波系图象, 在奇点处收敛到相同值。即沿  $x/t = \text{const}$ , 有

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} R(x, t, U_{\pm}(x)) = R_E(x/t; U_-, U_+) \quad (11)$$

于是, 推广 Riemann 问题解可借助于一般 Riemann 问题解得到

$$\begin{cases} U_{i \pm \frac{1}{2}}^n = R(0, 0; U_{\pm}(x)) = R_E\left(\frac{x}{t}; U_-, U_+\right) & (12a) \\ \left[\frac{\partial U}{\partial t}\right]_{i \pm \frac{1}{2}}^n = \frac{\partial R}{\partial t}(0, 0; U_{\pm}(r)) = \frac{\partial R_E}{\partial t}\left(\frac{x}{t}; U_-, U_+\right) & (12b) \end{cases}$$

为求  $\left[\frac{\partial F(U)}{\partial t}\right]_{i \pm \frac{1}{2}}^n, \left[\frac{\partial G(U)}{\partial t}\right]_{i \pm \frac{1}{2}}^n$ , 通过引入特征坐标, 可以得到 Lagrange 形式下  $\partial F(U)/\partial t$  和  $\partial G(U)/\partial t$  的分析表达式, 再用坐标转换关系, 可直接求出 Euler 系下的相应量的值。

此法对每时间步, 每格子区间, 仅需求解一个元 Riemann 问题。对元 Riemann 问题, 本文除用迭代法精确求解外, 还采用了 Dukowicz 的无迭代近似解<sup>[6]</sup>。Dukowicz 按照人工粘性法思想和粘性压力可以经验表示为速度跳跃量的二次式关系, 采用双激波近似, 并引入两个物质常数  $a$  和  $A$ , 将激波跳跃的压力和速度关系表为

$$\begin{cases} p^* - p_R = \rho_R (a_R + A_R \Delta u_R) \Delta u_R & (13a) \\ p^* - p_L = -\rho_L (a_L - A_L \Delta u_L) \Delta u_L & (13b) \end{cases}$$

其中  $\Delta u = u^* - u$ ,  $a$  为局部音速,  $A$  由强激波极限密度比确定。于是, 元 Riemann 问题的一对值  $(p^*, u^*)$  可以解析求出, 迭代得以避免, 机时消耗大为减少。

为防止高阶格式在间断处可能引起的数值振荡, 本文采用 van Leer 对物理量梯度作某些限制方法, 使其格式保持单调型<sup>[7]</sup>。

### 三、数值结果和讨论

上述两种计算方法, 所选算例的条件如下表

管形	变截面段方程 $A(x)$	进口处激波马赫数 $M_{w0}$	波前流态	进口处波前气流马赫数 $M_{10}$
锥形扩张管	$\frac{\pi}{4}(0.1 + 2x \lg 7^\circ)^2$	1.5—4.5	亚音	0.99
			超音	1.01—4.2
楔形收缩管	$1-x$	1.5—4.5	亚音	0.05
			超音	3.5—4.2

取无量纲化形式进行计算。数值结果曲线按带横杠的无量纲量表出。在不同几何形状和初始流动条件下, 计算的激波强度变化规律  $M_s = f_1(x)$  与特定时刻流场参数变化曲线  $p, \rho,$

$u=f_2(x)$ 示于图2和图3中。点线为随机选取法结果,实线为 Godunov 型方法结果。Godunov型方法中,对元Riemann问题,分别采用有迭代的精确解和无迭代的近似解,代入差分方程,最后计算的数值误差均在千分之二以内,图形曲线近乎完全重合,没有单独显示其差异。

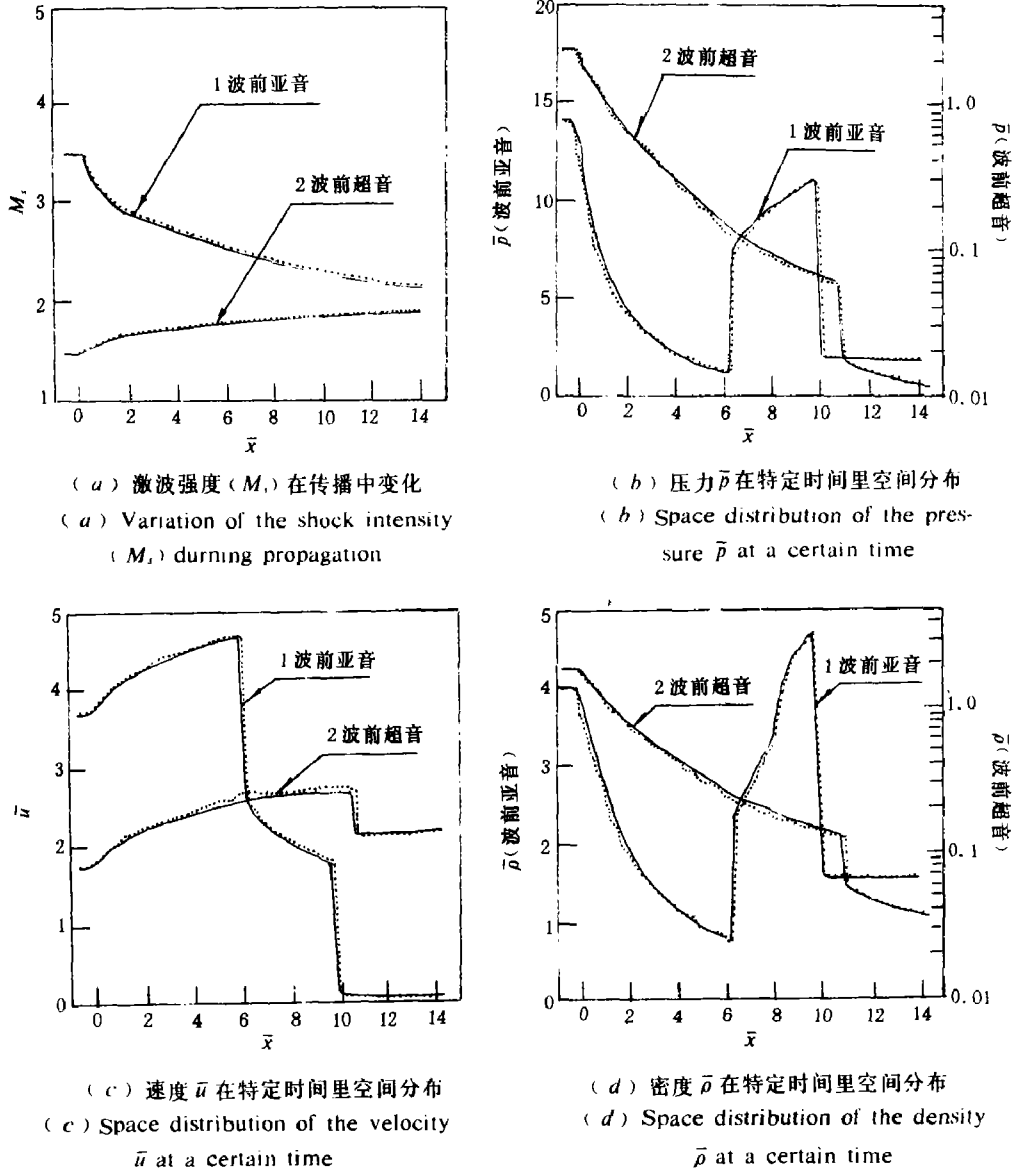


图2 锥形扩张管里数值结果

.....RCM, ——Godunov型方法,

1——波前亚音, 2——波前超音

Fig. 2 Numerical results of the conical divergent tube

.....RCM, ——Godunov's method

1—Subsonic before the shock. 2—Supersonic before the shock

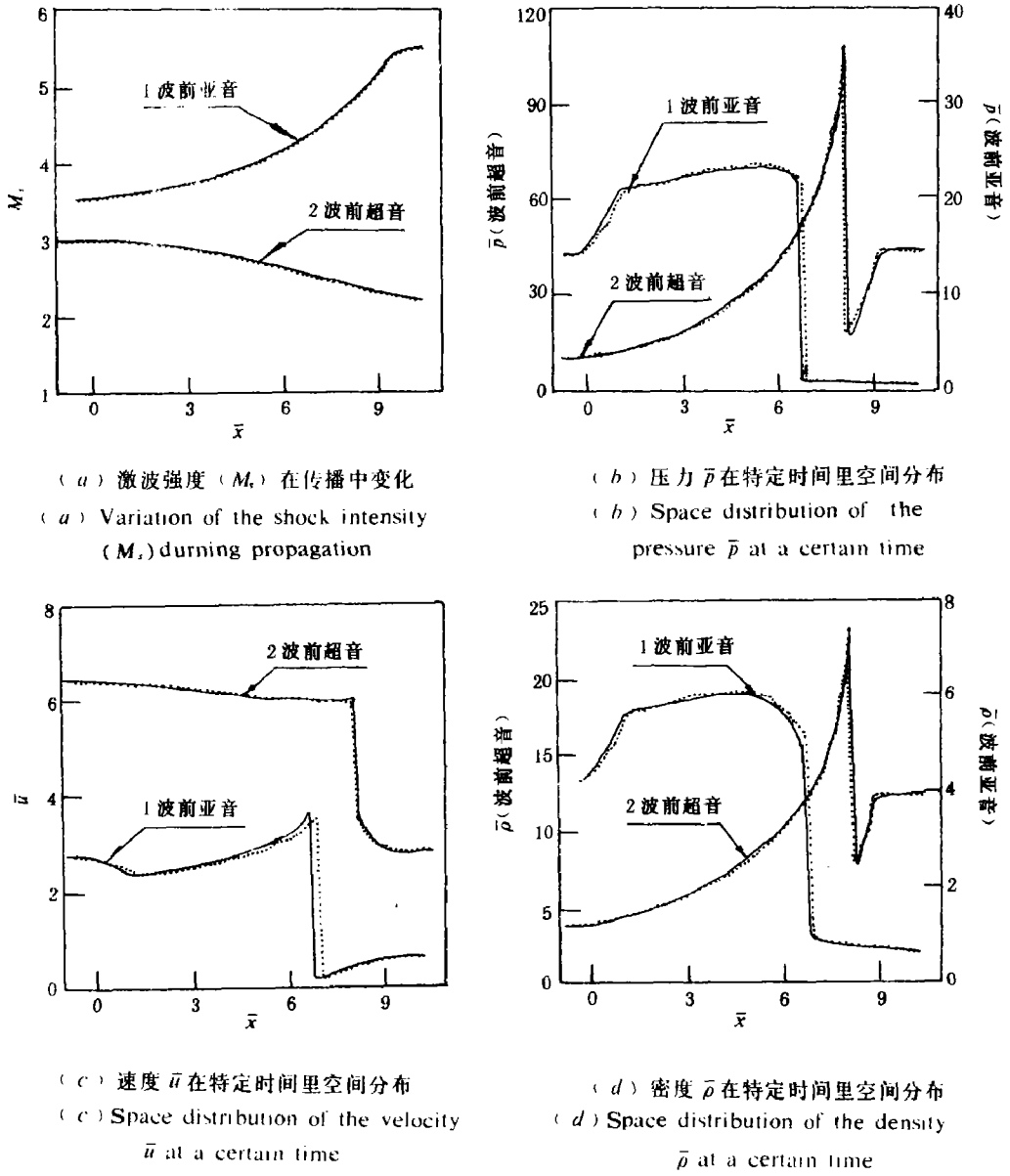


图 3 楔形收缩管里数值结果

.....RCM, —— Godunov 型方法

1—波前亚音, 2—波前超音

Fig. 3 Numerical results of the wedge shape convergent tube

.....RCM, —— Godunov's method

1—Subsonic before the shock 2—Supersonic before the shock

由图可见, 两种计算方法不同, 计算结果基本一致。数值模拟揭示了激波在波前有非均匀定常流动的变截面管道中传播时, 波强和波后流场呈现复杂的变化特性: 对扩张型管 (图 2), 波前为亚音速流时, 激波强度逐渐减弱; 波前为超音速流时, 激波强度逐渐增强。对收缩型管 (图 3), 结果恰巧相反。如果激波在传播中减弱, 波后为超音流, 则波后有可能产

生二次激波；如果激波在传播中增强，波后不会产生强突跃。但波后流场由于存在一系列波系间相互作用，流场是非均质的。上述规律与激波前为静止态管流具有原则差异。

由图还可看出，两种计算方法都能得到高分辨率的锐利间断解。分裂算子的随机选取法可得到无厚度的激波，但在光滑解区，存在由随机取样过程带来的数字脉动（数字噪音）。为减小噪音，通常采用缩短计算步长的办法，这就势必增加计算时间。以推广 Riemann 问题作基础的高阶 Godunov 方法，一般需一个格点，至多两个格点顺利过激波，间断虽有厚度，但仍很锐利。且在光滑解区，精度为二阶，也无数字噪音。

从计算时间看，RCM 为两步法，以 GRP 为基础的 Godunov 型方法为一步法。每时间步，每格点区间，两步法需解两个元 Riemann 问题，一步法仅解一个。虽然后者的求解过程和程序实现较前者复杂，但即使在本算例取同样步长条件下计算，后者较前者至少节省机时 40%。如果考虑 RCM 的数字噪音需进一步减小步长的话，这种高阶 Godunov 型方法较 RCM 计算量会更小。

Godunov 型方法可以理解为先用间断分解得到精确解，然后在子区域上加平均得到新的阶梯分布函数的过程。间断分解精确度虽对平均过程计算至关重要，但是，我们认为，存在一定误差的间断解在平均过程中往往可以相互补偿，而最终得到符合实际的平均值。无迭代的 Riemann 近似解与有迭代的精确解结果十分吻合，一定意义上可以看成是这种平均效应的作用。本文算例，采用无迭代解较之有迭代解节省机时 35% 左右。由于随机选取法是通过取样过程而确定其解的，它直接利用间断解结果而无平均过程。如采用无迭代 Riemann 近似解，其误差将全部进入最后结果，并随着时间增加，累积误差越来越大，故这种近似法对随机选取法是不合适的。

#### 四、结 语

通过计算，我们体会到：采用分裂算子的随机选取法和基于推广 Riemann 问题解的高阶 Godunov 型有限差分法，计算存在复杂间断相互作用的流场，都能得到锐利的间断图象和较为精确的流场特性。两种方法相比，又以高阶 Godunov 型方法更为有效。在 Godunov 型方法求解中，采用 Dukowicz 的无迭代 Riemann 解算法，能够节省机时，并得到与精确解十分吻合的结果，是一种经济适用的计算方案。

#### 参 考 文 献

- [ 1 ] Godunov, S.K., *Mat. Sbornik*, 47 (1959), 271.
- [ 2 ] Chorin, A.J., *J. Comp. Phys.*, 22 (1976), 517.
- [ 3 ] 李荫藩，戈杜诺夫方法和‘大粒子’方法，第二届全国计算物理年会报告，1987年9月。
- [ 4 ] Ben-Artzi, M., Falcovitz, J., *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7 (1986), 744.
- [ 5 ] Sod, G.A., *J. Fluid Mech.*, 83 (1977), 785.
- [ 6 ] Dukowicz, J.K., *J. Comp. Phys.*, 61 (1985), 119.
- [ 7 ] van Leer, B., *J. Comp. Phys.*, 32 (1979), 101.

**COMPARISON OF TWO KINDS OF NUMERICAL METHODS  
WITH HIGH RESOLUTION FOR CALCULATING THE  
SHOCK WAVE PROPAGATING DOWN  
A VARIABLE AREA TUBE**

Wu Qingsong

*(University of Science and Technology of China)*

**ABSTRACT** In this paper, two numerical methods with high resolution to discontinuity—the second-order Godunov-type scheme of finite difference methods on the basis of solutions of GRP (Generalized Riemann problem) and the random choice method with an operator-splitting technique are used to calculate the shock propagation down an variable area tube with a nonuniform steady flow behind the shock. Basically, the same results and some special motion rules are obtained. However, the calculating procedure and numerical results indicate that the second-order Godunov-type scheme is better than the random choice method.

**KEY WORDS** numerical calculation, Godunov scheme, random choice method, shock, variable area tube.