

粘性介质上的悬臂梁在冲击载荷作用下的刚塑性动力响应

张元
(北京大学力学系)

摘要 本文考虑了一个放置在粘性介质上的刚-理想塑性悬臂梁在自由端受冲击载荷时的小变形动力响应。具体讨论了线性粘性介质时矩形脉冲、线性衰减脉冲及瞬时冲击等加载情况,并与无介质解进行了比较,讨论了介质对梁的运动变形模式、最终挠度、能量吸性的影响。

关键词 冲击载荷 粘性介质 悬臂梁 刚塑性动力响应

1. 引言

处于介质中的结构的塑性动力响应问题,如果同时考虑结构与介质的运动及变形和它们之间的相互耦合则比较复杂。在处理时,一般采取将其相互作用化简为与变形有关的力的方法。如果是粘性介质,则作用力与结构的变形速度有关。文献[1]中给出了粘性介质中无限长梁受恒速冲击(即梁中一点在冲击加载过程中保持速度不变,而卸载后减速到运动终止)时的动力响应;文献[2,3]研究了粘性介质中圆板及方板受均布矩形波载荷时的动力响应。本文讨论有限长悬臂梁在粘性介质中受到冲击载荷时的动力响应,给出了小变形解的一般形式及存在条件。并且,还给出了几种特殊载荷下的动力响应解答,讨论了粘性介质对响应的影响。

2. 基本方程与解的基本形式

放置在粘性介质上的刚塑性材料悬臂梁如图1。梁的塑性弯矩为 M_0 ,梁单位长度质量为 m ,梁长 l ,自由端作用集中载荷 $P(t)$ 。梁上任意点 ξ 处的位移为 y ,自由端挠度为 z ,粘性介质反力与速度的 n 次幂成正比,即其集度为 $\eta \dot{y}^n$ 。由图2可知,若在 H 点形成塑性铰,则

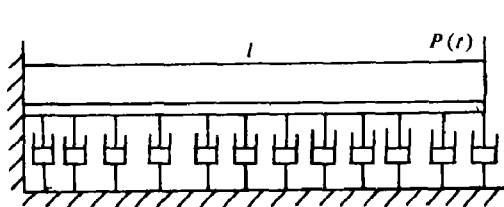


图 1 Fig. 1

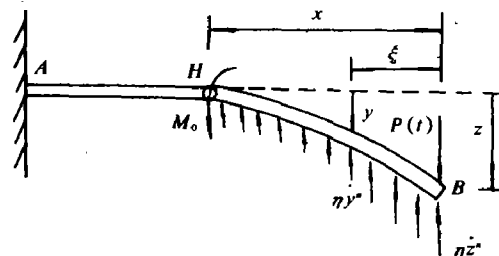


图 2 Fig. 2

1987年11月18日收到原稿,1988年11月22日收到修改稿。

本文曾在第二次全国高速冲击动力学学术会议分组会上宣读(太原,1987年8月)。

在小变形时有

$$\dot{y} = (1 - \xi/x)\dot{z} \quad (2.1)$$

若 H 处为固定铰 (模态解), 则 $x \equiv x_0$ 。 BH 段的运动方程 (对 H 点的动量矩方程) 为

$$m\ddot{z} + \frac{3}{n+2}\eta\dot{z}^n = \frac{3P(t)}{x_0} - \frac{3M_0}{x_0^2} \quad (2.2)$$

若 H 处为移行铰, 则在 H 处弯矩最大 (为 M_0) 而剪力为零, BH 段的运动方程为

$$m(x^2\dot{z})' + a_n\eta(x^2\dot{z})z^{n-1} = 6M_0 \quad (2.3)$$

及

$$m(x\dot{z})' + b_n\eta(x\dot{z})z^{n-1} = 2P(t) \quad (2.4)$$

其中 $a_n = 6/(n+1)(n+2)$, $b_n = 2/(n+1)$, 且 $(\)' = d(\)/dt$, 若初条件为

$$z(0) = z_0 = 0, \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0 = 0$$

则 (2.2) 式的解 (模态解) 为

$$\dot{z} = f_1(t) - f_1(0)\exp(-\eta t/m) \quad (\text{当 } n=1) \quad (2.5)$$

$$\dot{z} = f_n(t) - \frac{f_n(0)}{\left[1 + (-1)^{n-1} \frac{3f_n^{n-1}(0)\eta}{n+2} \frac{\eta t}{m}\right]^{1/(n-1)}} \quad (\text{当 } n \neq 1) \quad (2.6)$$

其中 $f_n(t)$ 是 (2.2) 式的任意一个特解。

若将 (2.3) 式的特解取为 $\dot{z} = 1$, $x^2\dot{z} = 6M_0/a_n\eta$; 而 (2.4) 特解为 $g_n(t)$, 则此两方程有如下形式的解

$$x^2\dot{z} = Cu^{2n} + \frac{6M_0}{a_n\eta}, \quad x\dot{z} = Du^{bn} + g_n(t) \quad (2.7)$$

其中

$$u = \exp\left\{-\frac{\eta}{m} \int_0^t \dot{z}^{n-1} dt\right\} \quad (2.7a)$$

由初条件 $z(0) = z_0 = 0$; $\dot{z}(0) = \dot{z}_0 = 0$; $x(0) = x_0$ 。可定出 C, D 为

$$C = -6M_0/a_n\eta; \quad D = -g_n(0) \quad (2.8)$$

因此由 (2.7) 及 (2.8) 有

$$x = \frac{6M_0}{a_n\eta} \frac{1 - u^{2n}}{g_n(t) - g_n(0)u^{bn}} \quad (2.9a)$$

$$\dot{z} = \frac{a_n\eta}{6M_0} \frac{[g_n(t) - g_n(0)u^{bn}]^2}{1 - u^{2n}} \quad (2.9b)$$

应用罗彼塔法则可由 (2.9a) 得

$$x_0 = (6M_0/m) / [\dot{g}_n(0) + (b_n\eta/m)g_n(0)] \quad (2.10)$$

只有当 $0 \leq x_0 < l$ 时才可能出现移行铰, 即必要条件 $g_n(t)$ 应满足不等式

$$\dot{g}_n(0) + (b_n\eta/m)g_n(0) > 6M_0/ml \quad (2.11)$$

注意: 当 $n \neq 1$ 时, 由于 u 中含有 \dot{z} , 即 (2.9) 式仍需继续求解, 但 (2.11) 式普遍成立。

当 $n = 1$ 时方程 (2.3) 及 (2.4) 可完全解出为

$$x = \frac{6M_0}{\eta} \frac{1 - \exp(-\eta t/m)}{g(t) - g(0)\exp(-\eta t/m)}$$

$$\dot{z} = \frac{\eta}{6M_0} \frac{[g(t) - g(0)\exp(-\eta t/m)]^2}{1 - \exp(-\eta t/m)} \quad (2.9)^*$$

$$x_0 = (6M_0/m)/[\dot{g}(0) + (\eta/m)g(0)] \quad (2.10)^*$$

并要求

$$\dot{g}(0) + (\eta/m)g(0) > 6M_0/ml \quad (2.11)^*$$

其中 $g(t) = g_1(t)$ 是 $n = 1$ 时 (2.4) 式的任一特解。下面分别讨论线性粘性介质 ($n = 1$) 的几种情况。

3. 矩形脉冲加载情况

设 $0 \leq t \leq t_1$ 时 $P(t) \equiv P_0$; 而 $t > t_1$ 时 $P(t) \equiv 0$ 。

1. 第一阶段: $0 \leq t \leq t_1$ ($P(t) \equiv P_0$)。

由常数变易法可求出 (2.4) 式, 在 $n = 1$ 时的特解为 $g(t) = 2P_0/\eta$, 但此时由 (2.9)* 式可知 $x \equiv 3M_0/P_0 = \text{const}$, 即退化为固定铰情况。由 (2.5) 式可知, 当 $t = t_1$, 即第一阶段结束时

$$\dot{z}_1 = [3(P_0x_0 - M_0)/x_0^2\eta][1 - \exp(-T)] \quad (3.1)$$

$$z_1 = [3m(P_0x_0 - M_0)/x_0^2\eta^2][T - 1 + \exp(-T)] \quad (3.2)$$

其中 $T = \eta t_1/m$, 因为 $x_0 \leq l$, 所以当 $P_0 \leq M_0/l$ 时, $\dot{z}(t)$ 、 $z(t)$ 及 \dot{z}_1 、 z_1 均小于零, 即无解 (因载荷太小而无运动)。当 $P_0 > M_0/l$ 时, 刚性区不破坏屈服条件的要求是 $M_H = M_0 = M_{\max}$, 即 H 点弯矩最大, 而剪力 Q_H 为零 (若 $Q_H > 0$, 则 AH 段弯矩为 $M_0 + Q_H(\xi - x_0) \geq M_0$ ($x_0 \leq \xi \leq l$); 若 $Q_H < 0$, 则自由端剪力为 $P_0 > 0$, HB 段必有剪力为零处, 其弯矩为 $M_{\max} > M_H = M_0$, 均将破坏刚性区条件)。因为 $Q_H = (3M_0 - P_0x_0)/2x_0$, 由 $Q_H = 0$ 可得

$$x_0 = 3M_0/P_0 \quad (3.3)$$

令 $\beta = P_0l/3M_0$, 则当 $\beta \leq 1/3$ 时无运动; 当 $1/3 < \beta \leq 1$ 时, 围绕梁根部固定铰的刚体转动 ($x_0 = l$); 当 $\beta > 1$ 时, 围绕 H 点处固定铰的刚体转动 ($x_0 < l$)。

2. 第二阶段: $t \geq t_1$ ($P(t) \equiv 0$)。

此为卸载后运动阶段, 可分两种情况:

I) $1/3 < \beta \leq 1$, 围绕 A 点的刚体转动, 由方程 (2.2) 及初条件 (3.1)、(3.2) 式可解出运动终止时 ($t = t_f$ 且 $\dot{z}_f = 0$) 的最终端点挠度为

$$v_f = z_f/z_f^* = 2\{(3\beta - 1)T - \ln[e^{-T} + 3\beta(1 - e^{-T})]\}/[3\beta(3\beta - 1)T^2] \quad (3.4)$$

$$z_f^* = P_0^2 t_1^2 (3\beta - 1)/2mM_0\beta \quad (3.5)$$

是无粘性介质 ($\eta = 0$) 时的最终端点挠度。

II) $\beta > 1$, 卸载后若仍绕固定铰 H 作刚体转动, 则由于 $Q_H \equiv 3M_0/2x_0$ ($t > t_1$), 在 AH 段刚性条件将被破坏; 若 H 为移行铰, 则在 BH 段有 $M(\xi) = (x^2/6)[(\eta\dot{z} + m\ddot{z})\xi^2 + (3 - \xi) + \dot{x}\dot{z}\xi^3]$ 。其中 x 为移行铰瞬时位置。而 $0 \leq \xi = \xi/x \leq 1$, $0 \leq \xi \leq x$, 则 $M(\xi)$ 随 ξ 增加而增加, 仅在 $\xi = 1$, 即移行铰 H 处达到最大值 M_0 。又由于移行铰处剪力为零, 则在 AH 段有 $M(\xi) \equiv M_0$ ($x \leq \xi \leq l$)。即在整个梁的刚性区均不破坏刚性条件, 因此, 梁的运动为 $t > t_1$ 后铰 H 由 $x_0 = l/\beta$ 处移行至根部 ($t = t_2$), 然后绕根部固定铰刚体转动至运动终

止 ($t = t_f$)。其最终挠度为

$$v_f = \frac{2}{T^2 \beta^2 (3 + 2 \ln \beta)} \left\{ \beta^2 (T - 1 + e^{-T}) + \frac{\beta (1 - e^{-T})}{1 + (\beta - 1)(1 - e^{-T})} + \beta^2 (e^T - 1)^2 \left[\ln \frac{\beta}{1 + (\beta - 1)(1 - e^{-T})} - \frac{e^{-T} (\beta - 1)(1 - e^{-T})}{1 + (\beta - 1)(1 - e^{-T})} \right] - \frac{1}{2} \ln \left[\frac{2\beta(1 - e^{-T})}{1 + (\beta - 1)(1 - e^{-T})} + 1 \right] \right\} \quad (3.6)$$

而无粘性介质 ($\eta = 0$) 时的最终端点挠度为

$$z_f^* = (P_0^2 t_1^2 / 3mM_0) (3 + 2 \ln \beta) \quad (3.7)$$

3. 运动过程中粘性介质所耗能量为

$$W_\eta = \int_0^l \int_0^{y_f} (\eta \dot{y} d\xi) dy = \eta \int_0^l \int_0^{y_f} \dot{y}^2 dt d\xi$$

利用 (2.6) 式有

$$W_\eta = \eta \int_0^l \int_0^{y_f} (1 - \xi/x)^2 \dot{z}^2 dt d\xi \quad (3.8)$$

积分时应区分不同阶段。外力总功为

$$W_p = \int_0^{t_1} P(t) dz = P_0 z_1 = \begin{cases} [(P_0^2 t_1^2 (3\beta - 1) / (m l T^2 \beta))] (T - 1 + e^{-T}), & 1/3 < \beta \leq 1 \\ [2\beta P_0^2 t_1^2 / (m l T^2)] (T - 1 + e^{-T}) & \beta > 1 \end{cases} \quad (3.9)$$

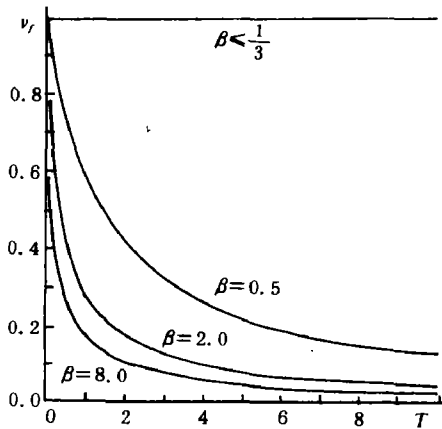


图 3 矩形脉冲时梁端点最终挠度与介质粘性系数的关系：式 (3.4) 及式 (3.6)

Fig. 3 Final deflection vs. viscosity factor (rectangular pulse): Formulae (3.4) and (3.6)

1) $1/3 < \beta \leq 1$

$$\frac{W_\eta}{W_p} = \frac{1}{3\beta(3\beta - 1)} \times$$

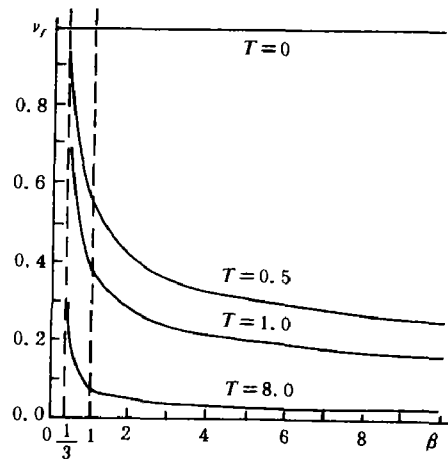


图 4 矩形脉冲加载时梁端点挠度与载荷强度的关系：式 (3.4) 及式 (3.6)

Fig. 4 Final deflection vs. load intensity (rectangular pulse): Formulae (3.4) and (3.6)

$$\frac{(3\beta-1)[(3\beta-1)(T-1+e^{-T})-(1-e^{-T})]+\ln[1+(3\beta-1)/(1-e^{-T})]}{T-1+e^{-T}} \quad (3.10)$$

当 $\eta \rightarrow \infty$ 即粘性非常大时, $W_n/W_p \rightarrow 1 - 1/3\beta$ 。

II) $\beta > 1$: 由于移行铰阶段的粘性耗散能量部分的积分不能用有限形式表出, 因此只能数值积分。由于 $\eta \rightarrow \infty$ 时, $t_2 \rightarrow t_1$, $t_f \rightarrow t_1$, 即只有 $0 \leq t \leq t_1$ 阶段起作用, 因此, 可以计算出, 当 $\eta \rightarrow \infty$ 时, 有 $W_n/W_p \rightarrow 2/3$ 。计算结果绘于图 3、图 4 和图 5 中。

4. 瞬时冲击加载

设瞬时冲击的冲量为 I_0 , 则可在上节矩形脉冲情况下, 令 $P_0 \rightarrow \infty$, $t_1 \rightarrow 0$, 但 $P_0 t_1 \equiv I_0$, 即可得到本节的结果。注意: 此时关于 x_0 的讨论需重新进行, 而 (3.3) 式不成立。令 $\beta = l/x_0$, $C = M_0 m / \eta I_0$, 则由 (3.1) 及 (3.2) 式有

$$\dot{z}_0 = \dot{z}_1 = 3I_0/mx_0; \quad z_0 = z_1 = 0 \quad (4.1)$$

冲击后, 移行铰开始由 x_0 处向根部移行, 但 x_0 不用 (3.3) 式替换, 可得

$$z_f = \frac{3I_0^2}{mM_0} \left\{ \frac{2C^2\beta^2}{(1-2C\beta)^2} \left[\ln \frac{2C\beta^2}{2C\beta+\beta-1} + \frac{(\beta-1)(1-2C\beta)}{2C\beta(2C\beta+\beta-1)} \right] + \frac{2\beta C^2}{2C\beta+\beta-1} - C^2 \ln \left(1 + \frac{2\beta}{2C\beta+\beta-1} \right) \right\} \quad (4.2)$$

令 $C \rightarrow \infty$, 则得 $\eta = 0$ 时的最终挠度为

$$z_f^* = (3I_0^2/2mM_0)(1 + \ln\beta) \quad (4.3)$$

显然, 若 $x_0 = 0$ 即 $\beta \rightarrow \infty$, 则 z_f^* 及 z_f 将为无穷大。因为 $x_0 = 0$ 时, $\dot{z}_0 \rightarrow \infty$, 进一步的积分亦发散。由于解 (4.2) 及 (4.3) 满足所有条件, 即只要 $1 \leq \beta < \infty$, 且 $\beta \neq 1/2C$ (当 $\eta \neq 0$ 时), 它们就是本问题的完全解。只要正确地确定 β 值, 即移行铰初始位置 x_0 就可以得到真实解。由于没有相应的定理确定 x_0 , 我们考虑一常力 \bar{P} 作用于梁自由端并保持到运动终止的虚过程, 它产生相同的 z_f , 则 $\bar{P} z_f$ 为系统在此变形运动中所消耗的功, 即为梁所获初动能 E_0 。由碰撞理论可知

$$E_0 = \frac{1}{2} \dot{z}_0 I_0 = 3I_0^2\beta/2ml \quad (4.4)$$

而 $\bar{P} = E_0/z_f$ 的物理意义为系统在变形运动过程中产生单位位移所耗能量的平均值, 从能量的观点来看, 使此值最小的运动最接近真实运动。另外, 对应于 \bar{P} 的虚过程不是真实过程, 但其运动场 z_f 为运动可能场。因此, 其对应载荷 \bar{P} 应为真实载荷之上限, 由此取 $\beta(x_0)$ 使 \bar{P} 达到最小为最佳选择。由 (4.3) 显见 $\beta = 1$ 时, \bar{P}^* 最小, 对 (4.2) 式的数值分析计算结果表明, 对于任何 C (即 η) 值, 均有 $\beta = 1$ 时, \bar{P} 最小。因此, 不论有无粘性介质, 瞬时冲击的结果都是使梁产生绕根部固定塑性铰的刚体转动即模态解。这一结论在 $\eta = 0$ 时与 Parkes 问题的解一致 (即在 Parkes 问题中, 集中质量趋于零的极限情况^[4], 其移行铰过程结束的时间及当时挠度均趋于零)。因此有

$$v_f = 2C[1 - C \ln(1 + 1/C)] \quad (4.5)$$

而 $\eta = 0$ 时

$$z_f^* = 3I_0^2/2mM_0 \quad (4.6)$$

整个过程中粘性介质所耗能量 (利用 (3.8) 式) 为

$$W_n/E_0 = 1 - 2C + 2C^2 \ln(1 + 1/C) \quad (4.7)$$

当 $\eta \rightarrow \infty$ 时, $C \rightarrow 0$ 而 $W_n/E_0 \rightarrow 1$ 。计算结果见图5和图6。

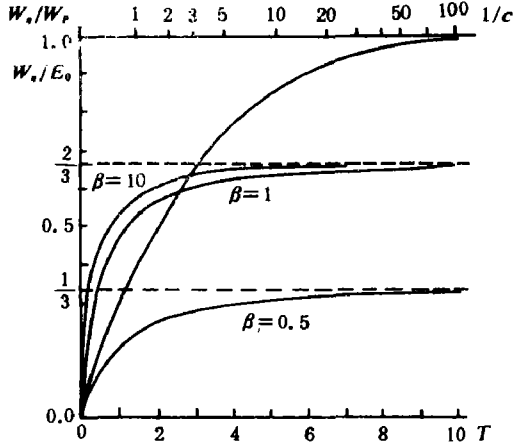


图5 介质耗能与载荷及粘性系数之关系:式(3.10)及(4.7)等
Fig. 5 Energy dissipated in medium: Formulae (3.10) and (4.7)

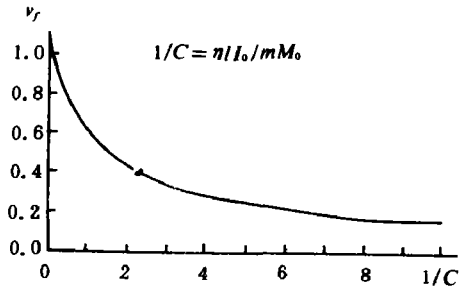


图6 瞬时冲击时挠度与初冲量及介质粘性系数的关系:(4.5)式
Fig. 6 Final deflection vs. initial impulse and viscosity: Formula (4.5)

5. 线性衰减脉冲加载

设当 $0 \leq t \leq t_1$ 时 $P(t) = P_0(1 - t/t_1)$; 当 $t > t_1$ 时, $P(t) \equiv 0$ 。令 $\alpha = 1/\beta = 3M_0/P_0l, T = \eta t_1/m$, 用与第三节相同的方法, 求解 $n = 1$ 时的方程(2.2)、(2.3)及(2.4)。在参数 (T, α) 平面的不同区域内(见图7)有不同的变形运动模式, 它们满足运动方程, 并不破坏刚性区条件的解(完全解)分别为:

1. 当 (T, α) 在 $T = 0, \alpha = 0$ 及 l_1 所围①区(见图7)时, 移行铰始于 $x_0 = a'$, 卸载后 ($t > t_1$) 继续向根部移行, 然后, 绕根部塑性铰刚体转动到终止。

$$\left. \begin{aligned} z_f &= (P_0^2 t_1^2 / m M_0) \left\{ \frac{2}{3} (f + g) - (\alpha^2 / 3T^2) \ln(1 + 2H) \right\} \\ f &= \frac{1}{T^4} \int_0^T \frac{\tau^2 d\tau}{1 - e^{-\tau}} \\ g &= \frac{\alpha^2 H}{T^2} + \frac{1 + T}{T^4} \Omega + \frac{\Omega^2 e^{2\tau}}{T^4} \left(\ln \frac{aT\theta}{\omega} - e^{-\tau} + \frac{aT e^{-\tau}}{\omega} \right) \\ \Omega &= 1 - (1 + T)e^{-T}, \quad \omega = \Omega + aT e^{-T} \\ \theta &= \Omega / [aT(1 - e^{-T})], \quad H = \Omega / \omega \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

若 $\eta = 0$, 则

$$z_f^* = (P_0^2 t_1^2 / m M_0) [23/72 - (1/6) \ln 2\alpha] \quad (5.2)$$

2. 当 (T, α) 在 $T = 0, l_1, l_2$ 及 $\alpha = 1$ 所围②区时, 移行铰到梁根部的时间 $\bar{t} = m\bar{t}/\eta < t_1$, 然后, 梁绕根部固定塑性铰作刚体转动至载荷卸尽 ($t = t_1$), 再到运动终止。

$$z_f = (P_0^2 t_1^2 / m M_0) \left\{ \frac{2}{3} (\bar{f} + g) - (\alpha^2 / 3T^2) \ln(1 + H) \right\} \quad (5.3)$$

$$\bar{f} = \frac{1}{T^4} \int_0^{\bar{\tau}} \frac{\tau^2 d\tau}{1 - e^{-\tau}}$$

$$H = \frac{3 - \alpha T}{\alpha T} + e^{(\bar{\tau} - T)} \left[1 + \frac{3(\bar{\tau} - 1 - T)}{\alpha T} + \frac{2\delta^2}{\alpha^2 T^2 (1 - e^{-\bar{\tau}})} \right]$$

$$g = \frac{1}{T^4} \left[(1 + T)^2 (\bar{\tau} - 1 + e^{-\bar{\tau}}) - (1 + T) \bar{\tau}^2 + \frac{\delta^2}{1 - e^{-\bar{\tau}}} \right]$$

$$+ \frac{\alpha}{4T^3} (T - \bar{\tau})(3T - 3\bar{\tau} - 2\alpha T)$$

$$\delta = (1 + T)(1 - e^{-\bar{\tau}}) - \bar{\tau}$$

其中移行铰到达梁根部的时间 $\bar{\tau}$ 满足方程

$$(1 + T - \alpha T - \bar{\tau}) \exp(\bar{\tau}) = (1 + T - \alpha T) \quad (5.4)$$

若 $\eta = 0$ 则有

$$z_f^* = \frac{1}{72} \left(\frac{P_0^2 t_1^2}{m M_0} \right) (43 - 60\alpha + 48\alpha^2 - 16\alpha^3) \quad (5.5)$$

3. 当 (T, α) 在 l_2 及 $\alpha = 1$ 所围③区时, 梁按情况 2 中模式运动。但是, 在载荷卸尽之前终止运动 (即 $t_f = m\tau_f / \eta \leq mT / \eta = t_1$)^{*}。

$$z_f = (P_0^2 t_1^2 / m M_0) \left\{ \frac{2}{3} (\bar{f} + g) + K + \frac{1}{3} H (e^{(\tau_f - T)} - 1) \right\} \quad (5.6)$$

$$g = \frac{1}{T^4} [(1 + T)^2 (\bar{\tau} - 1 + e^{-\bar{\tau}}) + (1 + T) \bar{\tau}^2]$$

$$H = \frac{\alpha}{T^2} [\tau_f - (1 + 3T - \alpha T)]$$

$$K = (\tau_f - \bar{\tau}) [\alpha(3 - \alpha) / 3T^2 - (\tau_f + \bar{\tau} - 2) / T^3]$$

其中 \bar{f} 及 $\bar{\tau}$ 与情形 2 相同, 由 (5.3)、(5.4) 等式确定。运动终止无量纲时间 τ_f 满足方程

$$\frac{2\delta^2}{T^2(1 - e^{-\bar{\tau}})} - \frac{\alpha}{T} [3(\bar{\tau} - 1 - T) - \alpha T] = e^{(\tau_f - T)} \left[\frac{3\alpha}{T} (\tau_f - 1) - \alpha(3 - \alpha) \right] \quad (5.7)$$

其中 $\delta = (1 + T)(1 - e^{-\bar{\tau}}) - \bar{\tau}$, 与情形 2 相同。

4. 当 (T, α) 在 $T = 0$, $\alpha = 1$ 及 l_3 所围④区时, 无移行铰过程, 只有绕根部固定铰的整体刚体转动, 直到运动终止。

$$z_f = (P_0^2 t_1^2 / m M_0) \left[(\alpha / T^3) \left(\frac{1}{6} g + \frac{1}{3} f \right) - (\alpha^2 / 3T^2) \ln(1 + f / \alpha T) \right] \quad (5.8)$$

$$f = [T(3 - \alpha) + 3](1 - e^{-T}) - 3T$$

$$g = 2[T(3 - \alpha) + 3](T - 1 + e^{-T}) - 3T^2$$

当 $\eta = 0$ 时

$$z_f^* = \frac{1}{24} \left(\frac{P_0^2 t_1^2}{m M_0} \right) (9 - 4\alpha) \quad (5.9)$$

5. 当 (T, α) 在 $T = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = 3$ 及 l_3 所围⑤区时, 类似于情形 4, 但是, 绕根

* 注意: 区域③不与 α 轴相交, 其最小的 T 值为 $T_{min} = 2.15$, 即当 $\eta = 0$ (无粘性介质) 时, 无情形 3。

部的刚体转动在载荷卸尽之前就终止了 ($t_f \leq t_1$)。

$$z_f = (P_0^2 l_1^2 / m M_0) (\alpha / 6 T^3) [2(3 - \alpha) T \tau_f - 3 \tau_f^2] \quad (5.10)$$

其中运动结束的无量纲时间 τ_f 满足方程

$$3 \tau_f = [3 + T(3 - \alpha)](1 - e^{-\tau_f}) \quad (5.11)$$

当 $\eta = 0$ 时

$$z_f^* = (P_0^2 l_1^2 / m M_0) (2\alpha / 81) (3 - \alpha)^3 \quad (5.12)$$

6. 当 $\alpha \geq 3$ (即 $\beta \leq 1/3$) 时, 冲击力幅值 P_0 太小而不能使梁产生运动。

不同载荷幅值下的最终端点挠度随粘性系数 $\eta(T)$ 变化的情况见图 8。图 7 中的三条曲线 l_1 、 l_2 及 l_3 由下面式子确定。

$$l_1: \quad \alpha = F(T) = [1 - (1 + T)e^{-T}] / T(1 - e^{-T})$$

$$l_2: \quad \alpha^2 T^2 [1 - e^{(\bar{\tau} - T)}] = 3\alpha T [1 + (\bar{\tau} - 1 - T)e^{(\bar{\tau} - T)}] + 2e^{(\bar{\tau} - T)} [(1 + T)(1 - e^{-\bar{\tau}}) - \bar{\tau}]^2 / (1 - e^{-\bar{\tau}})$$

$$l_3: \quad \alpha = 3F(T)$$

其中 $\bar{\tau}$ 满足方程 (5.4)。

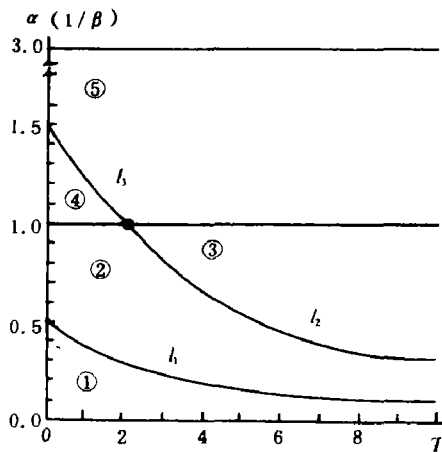


图 7 在参数 (T, α) 平面的不同区域内梁有不同的变形运动模式

Fig. 7 Different kinematic deformation modes at different values of T and α

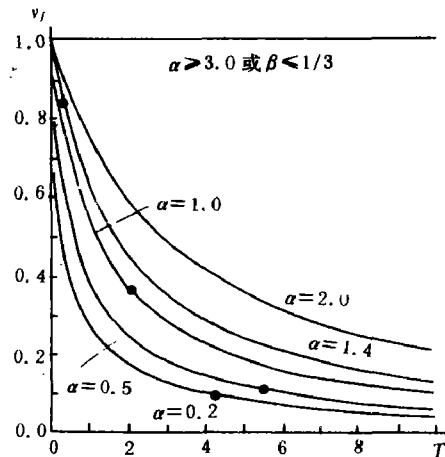


图 8 不同载荷幅值及不同情形下梁自由端挠度与粘性介质系数的关系

Fig. 8 Final deflection vs. medium viscous (linearly reduced pulse). Dots separate different kinematic modes

6. 结论

本文讨论了放置在粘性阻尼介质上的有限长悬臂梁的刚塑性小变形动力响应。对于非线性阻尼介质 ($\eta \neq 1$) 情况, 模态解的一般形式为 (2.6) 式所示, 而具有移形铰的完全解 (2.9) 式虽未最后解出, 但是, 得到了解存在的一个必要条件, 即外加冲击载荷 $P(t)$ 需使方程 (2.4) 具有满足 (2.11) 不等式的特解。对于线性阻尼介质 ($\eta = 1$), 其模态解及完全解可以最后解出为 (2.5) 及 (2.9)*。对几种不同冲击载荷作用情况的具体计算, 可以得出以下结论。

1. 动力响应的最终端点挠度对于粘性介质阻尼系数 η 非常敏感, 并且, 冲击载荷幅值越

大越敏感。非常小阻尼可使最终挠度大幅度减小(小变形范围内。见图 3、图 4、图 6 及图 8)。

2. 梁动力响应的变形运动模式, 主要由冲击载荷大小及施加方式(形状)确定, 但是, 在某些情况下, 粘性阻尼介质的存在会使梁产生不同的动力响应变形运动过程(如第五节线性衰减脉冲中情形 3, 即当参数 T, α 在图 7 中区域 ③ 时, 所出现的变形运动过程为无阻尼介质的梁所不具有的)。

3. 在所考虑的三种冲击作用中, 瞬时冲击加载时梁的运动过程中不出现移行铰阶段; 当冲击幅值较大 ($P_0 l > 3M_0$) 时, 线性衰减脉冲时从运动开始即出现移行铰, 而矩形脉冲时移行铰阶段仅在卸载后才出现。

4. 移行铰的初始位置 $x_0 = 3M_0/P_0 \neq 0$, 仅由载荷幅值确定而与介质无关。并且, 不同于常质量冲击时的 $x_0 = 0$, 见文献 [4], 铰的初始移行速度 \dot{x}_0 亦不同出常质量冲击时的初始 $\dot{x}_0 \rightarrow \infty$ (无粘性介质)。对线性衰减脉冲, 不论有无介质, 都有 $\dot{x}_0 = 3M_0/2P_0 t_1$, 矩形脉冲时, 铰移行初速为 $\dot{x}_1 = (3M_0 T)/[P_0 t_1 (1 - e^{-T})]$, 而无介质时 ($\eta = 0$), $\dot{x}_1 = 3M_0/P_0 t_1$ 。当冲击幅度 P_0 增加时, 铰移行距离增加, 但是, 移行速度 $\dot{x}(t)$ 减慢, 且当 $P_0 \rightarrow \infty$ 时, 有 $\dot{x}(t) \rightarrow 0$, 即移行铰阶段消失(如瞬时冲击加载情况, 见第四节)。

5. 当粘性介质阻尼系数 η 较大时, 瞬时冲击载荷所做的功将大部分被介质消耗, 仅有一小部分转变为塑性功(图 5); 而矩形脉冲时, 介质能耗虽随冲击强度 P_0 增加而增加, 最大仅达外力总功的三分之二(见图 5)。

作者谨对北京大学力学系余同希教授及黄筑平副教授给予的指导和帮助表示感谢。

参 考 文 献

- [1] 杨桂通、熊祝华, 塑性动力学, 清华大学出版社, (1984), 136.
- [2] Kumar, A. and Hegde, M., ASME *J. Appl. Mech.*, 49 (1982), 240.
- [3] Kumar, A. and Hegde, M., ASME *J. Appl. Mech.*, 50 (2) (1983), 462.
- [4] Parkes, E. W., *Proc. R. Soc. A* 228 (1955), 462.

DYNAMIC RESPONSE OF RIGID-PLASTIC CANTILEVER BEAMS IN VISCOUS MEDIUM UNDER IMPULSIVE LOADINGS

Zhang Yuan

(Department of Mechanics, Peking University)

ABSTRACT Dynamic response of rigid-perfect plastic cantilever beams resting upon viscous medium is studied. It is assumed that the reaction of the medium is a force with an intensity proportional to the n -th power of the deflection velocity. For general end dynamic loading, it is found that there is a necessary condition for the existence of a complete solu-

tion of infinitesimal deflection response. Both mode and complete solutions are found in the case of $n=1$. Several cases of impulsive loading (rectangular pulse, linearly reduced pulse and instantaneous pulse), which is added on the free end of the beam, are discussed in detail. The results are compared with those without medium. The effects of the medium to the kinematic deformation forms of the beam, the final end deflection, and the energy absorbed by the medium are also given.

Two main conclusions of this paper are: first, the final end deflection of the beam in dynamic response is very sensitive to the existence of viscous medium, that is, very weak viscosity can make the deflection reducing a lot. And the sensitivity is increased with the intensity of the impulsive load; the second is that although the kinematic deformation form is mainly determined by the load intensity and the shape (in which way it is applied), the viscous medium does have influences in some cases. When linearly reduced pulse is applied at the end of the beam, for example, there exists one kinematic deformation mode which is not appeared without the medium.

KEY WORDS impulsive loading, viscous medium, cantilever beam, dynamic rigid-plastic response.