

阶梯形悬臂梁在脉冲载荷作用下 塑性动力响应的完全解

杨嘉陵 华云龙 潘海林

(北京大学) (北京农业工程大学) (航空航天部502所)

摘要 本文采用双塑性铰模型,分析了阶梯形悬臂梁自由端受矩形脉冲载荷作用时的刚塑性动力响应,给出了整个响应过程封闭形式的完全解,讨论了一些主要参数对最终挠度的影响。

关键词 完全解 动力响应 刚塑性阶梯形截面悬臂梁 双铰 矩形脉冲载荷

一、引言

直梁的塑性动力响应自20世纪50年代以来,已经有许多人从不同角度进行了研究^{[1][2]}。这些研究多限于等直梁。不管载荷形式和塑性铰的类型如何,对于等直梁,塑性铰总发生在弯矩达到极值的截面处,因而该截面的剪力为零。在其响应的各个阶段,通常也只有一个塑性铰,我们称为单铰模式。文献[3]研究了变截面梁,证明了阶跃或脉冲载荷作用下,塑性铰处的剪力可以不为零。文献[4]研究了阶梯截面梁和折梁在阶跃载荷作用下塑性铰的位置,指出了在某些载荷范围内梁上将同时出现两个塑性铰,即双铰模式的响应。本文研究和文献[4]相同的两段不同截面的阶梯梁,见图1(a)和4(a),在矩形脉冲 F 作用下的响应。本文得到了整个响应过程封闭形式的完全解,给出了各个阶段塑性铰的位置,以及梁的最终形状。本文结果表明,响应的某些阶段是双铰模式,两个铰可能是固定铰,也可能是一个固定铰一个移行铰。

本文的基本假设同文献[4],有

- (1) 小变形假设;
- (2) 材料为理想刚塑性的,且与率无关的,即塑性动力弯矩 M^0 为常数;
- (3) AC 和 BC 段,见图1(a)和图4(a),分别具有均匀的截面和密度;
- (4) 不考虑剪力对截面屈服的影响;
- (5) 梁的横截面关于弯曲平面对称。

载荷 F 为矩形脉冲,写成无量纲形式为

$$f(\tau) = \frac{FL_1}{M_1^0} = \begin{cases} f_0 & 0 \leq \tau \leq \tau_1 \\ 0 & \tau > \tau_1 \end{cases} \quad (1)$$

其中 f_0 为常数, τ 为时间, L_1 为 AC 段长度, M_1^0 为 AC 段塑性动力弯矩。在下面,下角标1和2分别表示属于 AC 和 CB 段的量,下角标 C 和 B 则表示截面 C 和 B 处的量。例如 H_1 表示 AC 段上的铰, H_2 则表示 CB 段上的铰。

1989年1月17日收到原稿,6月25日收到修改稿。

二、当 $M_1^0 > M_2^0$ 时的动力响应

考虑图1(a)所示的阶梯梁,具有 $M_1^0 > M_2^0$, 其响应可分为四个相。

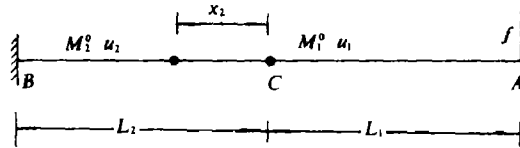


图1(a) 阶梯形悬臂梁 ($M_1^0 > M_2^0$)

Fig.1 (a) A stepped cantilever beam with $M_1^0 > M_2^0$

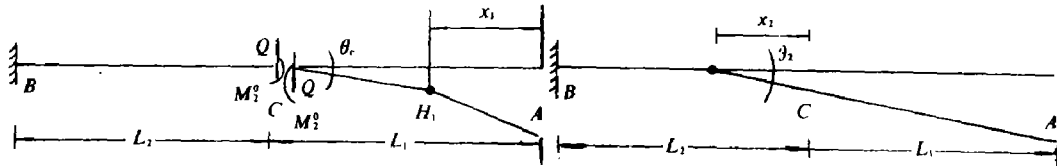


图1(b) 双铰模式 ($M_1^0 > M_2^0$)

图1(c) 单铰模式 ($M_1^0 > M_2^0$)

Fig.1 (b) Double-hinge modes with $M_1^0 > M_2^0$ Fig.1 (c) Single hinge mode with $M_1^0 > M_2^0$

第一相 $0 \leq \tau \leq \tau_1$

这个阶段的响应已在文献[4]中给出,见附录I ($M_1^0 > M_2^0$)。因其响应与 f_0 的大小有关,为了讨论一般化,设 $f_0 > f_A$ (见附录I ($M_1^0 > M_2^0$))。这一阶段在梁上C和 H_1 处出现两个固定的塑性铰,利用达朗伯原理,可以写出 CH_1 段和 AH_1 段的无量纲化运动方程。

$$D(1-\xi_1)^2 \ddot{\theta}_c = 2q_c \quad (2)$$

$$D(1-\xi_1)^3 \ddot{\theta}_c = 3(1-n_M) \quad (3)$$

$$D(\xi_1 \ddot{\zeta} + \xi_1(1-\xi_1)\ddot{\theta}_c) = 2f_0 \quad (4)$$

$$D(\xi_1^2 \ddot{\zeta} + 2\xi_1^2(1-\xi_1)\ddot{\theta}_c) = 6 \quad (5)$$

其中 $\zeta = z/L_1$, $\xi_1 = x_1/L_1$, $D = \mu_1 L_1^3/M_1^0$, $n_M = M_2^0/M_1^0$; z 为自由端的挠度, x_1 为 AH_1 的长度, Q_c 为截面C处的剪力(其梁正方向如图1(b)所示); θ_c 为截面C的转角, μ 为梁的线密度质量,有关量上方的圆点表示对时间 τ 的导数。

求解方程(2)~(5),注意到有初值条件 $\theta_c|_{\tau=0} = 0$, $\dot{\zeta}|_{\tau=0} = 0$ 以及 $\zeta|_{\tau=0} = 0$,得到

$$\dot{\theta}_c = \frac{3(1-n_M)}{D(1-\xi_1)^3} \tau \quad (6)$$

$$\ddot{\zeta} = \frac{4f_0\xi_1 - 6}{D\xi_1^2} \quad (7)$$

$$\dot{\zeta} = \frac{(4f_0\xi_1 - 6)\tau}{D\xi_1^2} \quad (8)$$

$$\zeta = \frac{(4f_0\xi_1 - 6)\tau^2}{2D\xi_1^2} \quad (9)$$

这一阶段 H_1 的位置是固定的, 即 ξ_1 是常数, 记为 ξ_{11} 。由 (3)、(4)、(5) 式可以得到

$$2(3 - f_0\xi_{11})^2(1 - \xi_{11})^2 - 3(1 - n_M)\xi_{11}^2 = 0 \quad (10)$$

当 $\tau = \tau_1$ 时, 第一阶段结束, 记这时的有关各量分别为 θ_{c1} , $\dot{\zeta}_1$ 和 ζ_1 , 有

$$\dot{\theta}_{c1} = \frac{3(1 - n_M)}{D(1 - \xi_{11})^3} \tau_1 \quad (11)$$

$$\dot{\zeta}_1 = (1/D\xi_{11}^2)(4f_0\xi_{11} - 6)\tau_1 \quad (12)$$

$$\zeta_1 = (1/2D\xi_{11}^2)(4f_0\xi_{11} - 6)\tau_1^2 \quad (12')$$

第二相 $\tau_1 < \tau \leq \tau_{11}$

当 $\tau > \tau_1$ 时, $f(\tau) \equiv 0$ 。显然 H_1 铰不可能继续为一固定铰, 它要变为移行铰, C 铰可以还是一个固定铰, 只要 $q_c > 0$, CB 段的刚性区条件就不会破坏。 AH_1 段无量纲化的运动方程为

$$\xi_1 \dot{\zeta} + \dot{\xi}_1 (\dot{\zeta} - \dot{\theta}_c) + \xi_1 (1 - \xi_1) \ddot{\theta}_c = 0 \quad (13)$$

$$\xi_1^2 \ddot{\zeta} + 2\xi_1 \dot{\xi}_1 (\dot{\zeta} - \dot{\theta}_c) + 2\xi_1^2 (1 - \xi_1) \ddot{\theta}_c = \frac{6}{D} \quad (14)$$

CH_1 段的动量和动量矩方程同 (2)、(3) 式, 但 ξ_1 不再是常数, 由 (2)、(3)、(13) 和 (14) 式得到

$$\ddot{\theta}_c = \frac{3(1 - n_M)}{D(1 - \xi_1)^3} \quad (15)$$

$$\ddot{\zeta} = -\frac{6}{D\xi_1^2} \quad (16)$$

方程 (15)、(16) 的初始条件为 (11)~(12) 式。将 (15)、(16) 式代入 (14) 式, 得

$$2\xi_1 \dot{\xi}_1 (\dot{\zeta} - \dot{\theta}_c) = \frac{12}{D} - \frac{6\xi_1^2(1 - n_M)}{D(1 - \xi_1)^2} \quad (17)$$

将上式两边对 τ 求导, 并将 (15)、(16) 式代入, 得到 $\dot{\zeta}$ 所满足的微分方程

$$\ddot{\zeta} + \frac{\xi_1^2}{\xi_1^2(1 - n_M)} = 0 \quad (18)$$

其初始条件为

$$\xi_1 |_{\tau=\tau_1} = \xi_{11} \quad (19)$$

$$\dot{\xi}_1 |_{\tau=\tau_1} = \frac{1}{\xi_{11}(\dot{\zeta}_1 - \dot{\theta}_{c1})} \left\{ \frac{6}{D} - \frac{3\xi_{11}^2(1 - n_M)}{D(1 - \xi_{11})^2} \right\} \quad (20)$$

注意到因存在塑性铰 H_1 , 故有 $\dot{\zeta} - \dot{\theta}_c > 0$ 。当 $\dot{\zeta} = \dot{\theta}_c$ 时, AH_1 段相对 CH_1 段没有相对转动, 这表示这时 H_1 铰消失, 第二相双铰模式运动结束, 记这时的 ξ_1 为 ξ_{11} , 由 (17) 式可得它应满足

$$2 - [\xi_{11}^2(1 - n_M)] / (1 - \xi_{11})^2 = 0 \quad (21)$$

解得

$$\dot{\xi}_{10} = \frac{2 - \sqrt{2(1-n_M)}}{1+n_M} \quad (22)$$

并记这一时刻为 τ_0 , 可以证明, 在这一时刻也有 $\dot{\xi}_1 = 0$ (见 (23) 式)。

方程 (18) 在初始条件 (19)、(20) 式下的解为 (见附录 II)

$$\dot{\xi}_1 = c_0 \left| \xi_1 - 1 \right|^{-1} \left| \xi_1 - \frac{2 - \sqrt{2(1-n_M)}}{1+n_M} \right|^{\lambda_1} \left| \xi_1 - \frac{2 + \sqrt{2(1-n_M)}}{1+n_M} \right|^{\lambda_2} \quad (23)$$

其中

$$\lambda_1 = \frac{1-n_M}{1+n_M} \cdot \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{1-n_M})^2}{\sqrt{2(1-n_M)}(n_M - 1 + \sqrt{2(1-n_M)})} \quad (24)$$

$$\lambda_2 = \frac{1-n_M}{1+n_M} \cdot \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{1+n_M})^2}{\sqrt{2(1-n_M)}(1-n_M + \sqrt{2(1-n_M)})} \quad (25)$$

$$c_0 = \frac{6 - 3\xi_{11}^2(1-n_M)/(1-\xi_{11})^2}{D\xi_{11}(\xi_{11} - \theta_{c1})} \left| \xi_{11} - 1 \right| \left| \xi_{11} - \frac{2 - \sqrt{2(1-n_M)}}{1+n_M} \right|^{-\lambda_1} \left| \xi_{11} - \frac{2 + \sqrt{2(1-n_M)}}{1+n_M} \right|^{-\lambda_2} \quad (26)$$

积分 (23) 式给出 ξ_1 与 τ 的关系

$$\tau - \tau_0 = \frac{1}{c_0} \int_{\xi_{11}}^{\xi_1} \left| y - 1 \right| \left| y - \frac{2 - \sqrt{2(1-n_M)}}{1+n_M} \right|^{-\lambda_1} \left| y - \frac{2 + \sqrt{2(1-n_M)}}{1+n_M} \right|^{-\lambda_2} dy \quad (27)$$

利用 (27) 式所给出的 $\xi_1 \sim \tau$ 的关系, 代回 (15)、(16) 式就可以求出 $\theta_c \sim \tau$, $\zeta \sim \tau$ 的关系。由 (27) 式也可以求得 τ_0 的值, 从而得到 $\tau = \tau_0$ 时刻的 $\dot{\theta}_c$, $\dot{\zeta}$, θ_c 以及 ζ 的值。这些值分别记为 $\dot{\theta}_{c0}$, $\dot{\zeta}_0$, θ_{c0} 以及 ζ_0 。

第三相 $\tau_0 < \tau \leq \tau_{II}$

当移行铰 H_1 消失后, 因为分析 AC 段运动将得出 $Q_c < 0$, 而这就破坏 CB 段的刚性区条件, C 处的固定铰不可能继续下去。因此, 当 $\tau > \tau_0$ 时, C 铰变为移行铰 H_2 。由图 1(c) 可得 AH_2 段的无量纲化的运动方程为

$$D \frac{d}{d\tau} [(n_u \xi_2^2 + 2\xi_2 + 1)\dot{\theta}_2] = 0 \quad (28)$$

$$D \frac{d}{d\tau} \{ [1 + 3\xi_2 + n_u \xi_2^2 (3 + \xi_2)] \dot{\theta}_2 \} = 6n_M \quad (29)$$

其中 $\xi_2 = x_2/L_1$, $x_2 = CH_2$, $n_u = \mu_2/\mu_1$; $\dot{\theta}_2$ 为 H_2 处的转动角速度。方程 (28)、(29) 的初始条件为

$$\tau = \tau_0 \text{ 时, } \xi_2 = 0, \quad \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_{c0}$$

积分 (28)、(29) 式得到

$$\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_{c0} / (n_u \xi_2^2 + 2\xi_2 + 1) \quad (30)$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{[D\dot{\theta}_{c0} + 6n_M(\tau - \tau_0)]}{\{D[1 + 3\xi_2 + n_u \xi_2^2 (3 + \xi_2)]\}} \quad (31)$$

由 (30)、(31) 式得到

$$\frac{\xi_2 (1 + 2n_u \xi_2 + n_u \xi_2^2)}{1 + 2\xi_2 + \xi_2^2 n_u} = \frac{6n_M (\tau - \tau_0)}{D \dot{\theta}_{cII}} \quad (32)$$

此式给出了 $\xi_2 \sim \tau$ 的关系。将 (32) 式两边对 τ 求导，即可得到移行铰的移行速度 $\dot{\xi}_2$

$$\dot{\xi}_2 = \frac{6n_M}{D \dot{\theta}_{cII}} \cdot \frac{(n_u \xi_2^2 + 2\xi_2 + 1)^2}{(6n_u \xi_2^2 + 4n_u \xi_2 + n_u^2 \xi_2^4 + 4n_u \xi_2^3 + 1)} \quad (33)$$

当 $\xi_2 = n_l = L_2/L_1$ 时， H_2 移行到悬臂梁根部 B ，这一运动阶段结束。由 (30)、(31) 式可求出达到根部的时间 τ_m ，以及这一时刻的 $\dot{\theta}_2$ ，记为 $\dot{\theta}_{2m}$ 。

$$\dot{\theta}_{2m} = \dot{\theta}_{cII} / (n_u n_l^2 + 2n_l + 1) \quad (34)$$

$$\tau_m = \frac{D \dot{\theta}_{cII}}{6n_M} \cdot \frac{n_l (1 + 2n_u n_l + n_u n_l^2)}{1 + 2n_l + n_u n_l^2} + \tau_0 \quad (35)$$

第四相 $\tau_m < \tau$

塑性铰 H_2 到达 B 后，梁本身还有动能，这部分动能将在固定铰 B 消耗掉^[2]，设其转角为 θ_b ，则有

$$\theta_b = D \dot{\theta}_{2m}^2 (n_u n_l^3 + 3n_l^2 + 3n_l + 1) / 6n_M \quad (36)$$

表 1 是对上述分析的总结，图 2 和图 3 给出了各相梁的挠曲线及塑性铰在曲线中的相对位置。若 $f_0 < f_{A1}$ ，梁的响应则视 f_0 的数值，分别从表 1 中的第二相，第三相，或第四相开始。

表 1 动力响应模式 ($M_1^0 > M_2^0$)

Table 1 Dynamic response modes with $M_1^0 > M_2^0$

	响应时间	响应形式	有关方程
第一相	$0 < \tau < \tau_1$	双固定铰 C 和 H_1	(1) ~ (12)
第二相	$\tau_1 < \tau < \tau_{II}$	固定铰 C 移行铰 H_1	(13) ~ (27)
第三相	$\tau_{II} < \tau < \tau_m$	单移行铰 H_2	(28) ~ (35)
第四相	$\tau_m < \tau$	固定铰 B	(36)

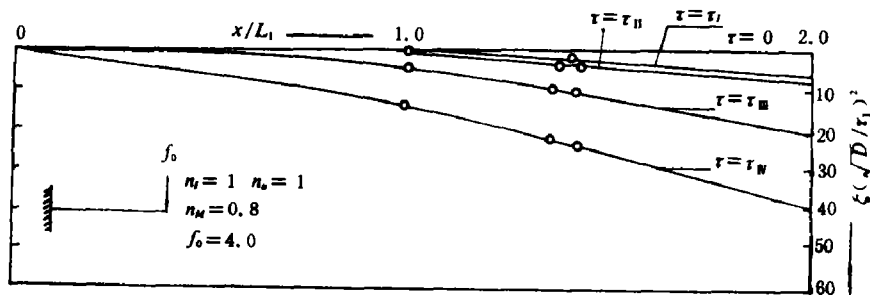


图 2 阶梯形悬臂梁的挠度曲线 ($M_1^0 > M_2^0$)

Fig. 2 Deflection curves of stepped cantilever with $M_1^0 > M_2^0$

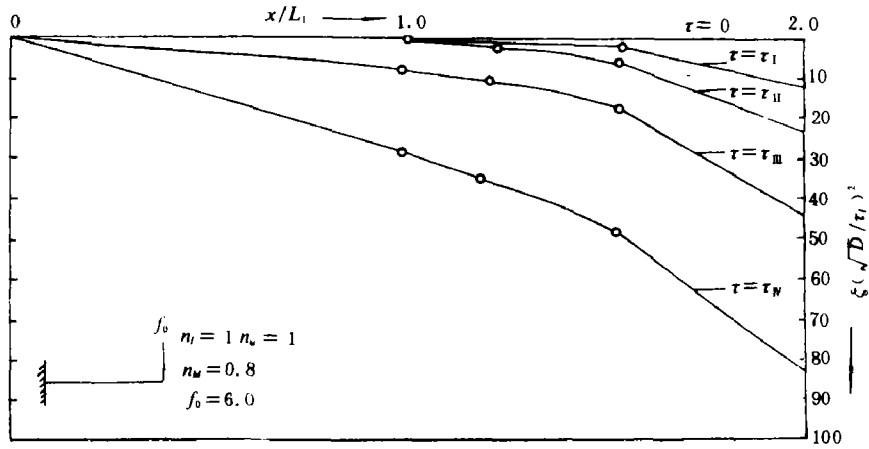


图3 阶梯形悬臂梁的挠度曲线 ($M_1^0 > M_2^0$)

Fig. 3 Deflection curves of stepped cantilever with $M_1^0 > M_2^0$

三、当 $M_1^0 < M_2^0$ 时的动力响应

本节分析如图 4(a) 所示悬臂梁, 自由端受到矩形脉冲载荷的作用。该梁在阶跃载荷作用下塑性铰与载荷的关系见附录 I ($M_1^0 < M_2^0$), 同上一节类似, 设 $f_0 > f_{0s}$ (见附录 I ($M_1^0 < M_2^0$))。

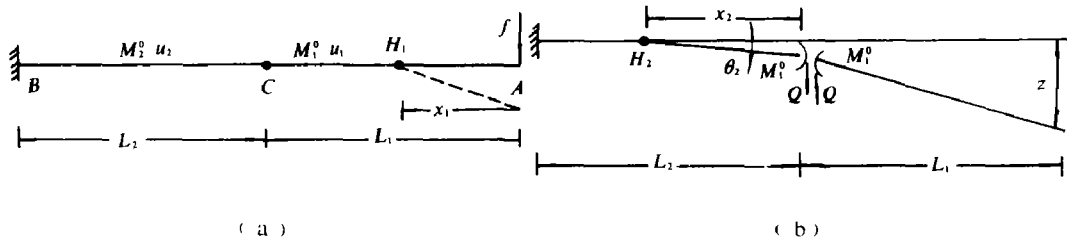


图 4(a) 阶梯形悬臂梁 ($M_1^0 < M_2^0$)

Fig. 4(a) A stepped cantilever beam with $M_1^0 < M_2^0$

图 4(b) 双铰模式 ($M_1^0 < M_2^0$)

Fig. 4(b) Double-hinge mode with $M_1^0 < M_2^0$

第一相 $0 \leq \tau \leq \tau_1$

这一阶段的响应为在 AC 段 H_1 处形成一个固定铰, AH_1 段的无量纲运动方程为

$$D \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} \dot{\xi} \dot{\zeta} \right) = f(\tau) \quad (37)$$

$$D \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{6} \dot{\xi} \dot{\zeta} \right) = 1 \quad (38)$$

其初始条件为

$$\dot{\zeta}|_{\tau=0} = 0 \quad \zeta|_{\tau=0} = 0 \quad (39)$$

可解得

$$\dot{\zeta} = \frac{2f_0^2}{3D} \tau \quad (40)$$

$$\zeta = \frac{f_0^2}{3D} \tau^2 \quad (41)$$

这一阶段 $\dot{\zeta}_1$ 为常数，记为 $\dot{\zeta}_1$ ，可得

$$\dot{\zeta}_1 = 3/f_0 \quad (42)$$

当 $\tau = \tau_1$ 时， $\dot{\zeta}$ 和 ζ 的值为

$$\dot{\zeta}_1 = \frac{2f_0^2}{3D} \tau_1 \quad (43)$$

$$\zeta_1 = \frac{f_0^2}{3D} \tau_1^2 \quad (44)$$

第二相 $\tau_1 < \tau \leq \tau_0$

这一阶段外力消失， H_1 变为移行铰。基本方程同 (37)、(38) 式，但 $\dot{\zeta}_1$ 为变量，其初始条件为 (42)~(44) 式。容易解得

$$\dot{\zeta}_1 = 3\tau/(f_0 \tau_1), \quad \dot{\zeta}_1 = \frac{3}{f_0 \tau_1} \quad (45)$$

$$\dot{\zeta} = \frac{2(f_0 \tau_1)^2}{3D \tau} \quad (46)$$

$$\zeta = \frac{2(f_0 \tau_1)^2}{3D} \ln(\tau/\tau_1) + \frac{(f_0 \tau_1)^2}{3D} \quad (47)$$

移行铰到达 C 时的时间 τ_0 为

$$\tau_0 = f_0 \tau_1 / 3 \quad (48)$$

相应的自由端速度和挠度为

$$\dot{\zeta}_0 = 2f_0 \tau_1 / D \quad (49)$$

$$\zeta_0 = \frac{2(f_0 \tau_1)^2}{3D} \ln(f_0/3) + \frac{(f_0 \tau_1)^2}{3D} \quad (50)$$

第三相 $\tau_0 < \tau \leq \tau_{II}$

当移行铰到达 C 后，因 C 处梁的截面有突变，它不可能越过 C 继续移行，在 C 处形成一个固定铰，同时在 C 截面有剪力 Q_c 。由于 AC 段处于减速运动，故 Q_c 方向必然如图 4 (b) 所示。这一阶段的响应有可能是这样单固定铰 C 模式，但在某些情况下，由于存在 Q_c ，CB 段刚性区条件将被破坏，也即单一固定铰 C 的模式不正确。下面讨论后一种情况，并给出其出现条件。

假定在 CB 上 H_2 处形成一个铰，距 C 为 x_2 。先不假定该铰的性质，列出 CH_2 段和 AC 段的无量纲化运动方程

$$n_s D \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} \xi^2 \dot{\theta}_s \right) = q_c \quad (51)$$

$$n_u D \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{6} \xi_2^3 \dot{\theta}_2 \right) = n_M - 1 \quad (52)$$

$$\frac{1}{2} D \frac{d}{d\tau} \left(\dot{\xi}_2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2 \xi_2 \right) = -1 \quad (53)$$

$$\frac{1}{3} D \frac{d}{d\tau} \left(\dot{\xi}_2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2 \xi_2 \right) = -1 \quad (54)$$

式中 $q_c = Q_c L_1 / M_0^0$, $\dot{\theta}_2$ 为 H_2 截面的转角速度。

利用 $(\xi_2 \dot{\theta}_2)|_{\tau=\tau_0} = 0$ 积分 (51) 式, 并记其积分值为 I_q , 有

$$I_q = \int_{\tau_0}^{\tau} q_c dt = \frac{1}{2} n_u D \xi_2^2 \dot{\theta}_2 \quad (55)$$

积分 (52) 式, 得

$$(n_M - 1)(\tau - \tau_0) = n_u D \frac{1}{6} \xi_2^3 \dot{\theta}_2 \quad (56)$$

由 (55)、(56) 式, 得

$$\xi_2 = 3(n_M - 1)(\tau - \tau_0) / I_q \quad (57)$$

再由 (53)、(54) 式得

$$\frac{1}{D} \int_{\tau_0}^{\tau} (3 - 2q_c) d\tau = \frac{1}{2} \xi_2 \dot{\theta}_2 \quad (58)$$

将 (55)、(57) 式代入 (58) 式,

$$I_q^2 + 2n_0 (\tau - \tau_0) I_q - 3n_0 (\tau - \tau_0)^2 = 0 \quad (59)$$

其中

$$n_0 = 3n_u (n_M - 1) \quad (60)$$

因必须有 $q_c > 0$, 故由 (59) 式可得

$$I_q = (\sqrt{n_0^2 + 3n_0} - n_0)(\tau - \tau_0) \quad (61)$$

则有

$$q_c = \sqrt{n_0^2 + 3n_0} - n_0 = \text{const} \quad (62)$$

将 (61) 式代入 (57) 式, 得到 ξ_2 为常数, 记为 ξ_{2m} 有

$$\xi_{2m} = (n_0 + \sqrt{n_0^2 + 3n_0}) / 3n_u \quad (63)$$

这表明 H_2 为一固定铰。也就是说这一阶段的响应模式为双固定铰, AC 段绕 C 的转动在减速, CH_2 段绕 H_2 的转动在加速。显然必须有 $\xi_{2m} \leq n_1$ 即

$$\sqrt{n_0^2 + 3n_0} + n_0 \leq 3n_1 n_u \quad (64)$$

(64) 式表示了双铰出现的条件。

由 (55)、(54) 可以解出

$$\dot{\theta}_2 = \frac{2n_u (\tau - \tau_0)}{D n_0^2} q_c^3 \quad (65)$$

$$\theta_2 = \frac{n_u (\tau - \tau_0)^2}{n_0^2 D} q_c^3 \quad (66)$$

$$\dot{\xi}_2 = \frac{1}{D} [2f_0 \tau_1 - (3 + q_c^2 / n_0)(\tau - \tau_0)] \quad (67)$$

$$\zeta = \frac{1}{D} \left[2f_0 \tau_1 (\tau - \tau_0) - \frac{1}{2} (\tau - \tau_0)^2 (3 + q_c^2/n_0) \right] + \frac{2}{3D} (f_0 \tau_1)^2 \ln(f_0/3) + \frac{1}{3D} (f_0 \tau_1)^2 \quad (68)$$

当 $\dot{\zeta}, \dot{\theta}_2$ 满足关系

$$\dot{\zeta} - \dot{\theta}_2 (\xi_{2m} + 1) = 0 \quad (69)$$

时, 表示 AC 段相对 CH_2 段的转动速度为零, 即固定铰 C 消失, 这一双铰阶段结束。记对应的时刻为 τ_m , 将 $\dot{\zeta}, \dot{\theta}_2$ 及 ξ_{2m} 的表达式代入 (69) 式, 得

$$\tau_m = \frac{f_0 \tau_1}{3} \left(1 + \frac{6n_0^2}{3n_0^2 + 3q_c^2 n_0 + 2n_u q_c^3} \right) \quad (70)$$

若记 $\tau = \tau_m$ 时的 $\dot{\theta}_2$, θ_2 分别为 $\dot{\theta}_{2m}$ 和 θ_{2m} , 由 (65)、(66) 式可得

$$\theta_{2m} = \frac{4n_u q_c^3 f_0^2 \tau_1^2 n_0^2}{D (3n_0^2 + 3q_c^2 n_0 + 2n_u q_c^3)^2} \quad (71)$$

$$\dot{\theta}_{2m} = \frac{4n_u f_0 \tau_1 q_c^3}{D (3n_0^2 + 3q_c^2 n_0 + 2n_u q_c^3)} \quad (72)$$

第四相 $\tau_m < \tau \leq \tau_N$

铰 C 消失后, 固定铰 H_2 立即变为向 B 移动的移行铰。可列出 AH_2 段无量纲化的运动方程

$$D \frac{d}{d\tau} \{ (n_u \xi_2^2 + 2\xi_2 + 1) \dot{\theta}_2 \} = 0 \quad (73)$$

$$D \frac{d}{d\tau} \{ (1 + 3\xi_2 + n_u \xi_2^2 (3 + \xi_2)) \dot{\theta}_2 \} = 6n_M \quad (74)$$

积分 (73)、(74) 式并利用 $\tau = \tau_m$ 的初始条件, 可解出

$$\dot{\theta}_2 = \frac{(n_u \xi_{2m}^2 + 2\xi_{2m} + 1) \dot{\theta}_{2m}}{n_u \xi_2^2 + 2\xi_2 + 1} \quad (75)$$

$$\frac{1 + 3\xi_2 + n_u \xi_2^2 (3 + \xi_2)}{n_u \xi_2^2 + 2\xi_2 + 1} =$$

$$\frac{6n_M (\tau - \tau_m) + D \{ (1 + 3\xi_{2m} + n_u \xi_{2m}^2 (3 + \xi_{2m})) \dot{\theta}_{2m} \}}{D \dot{\theta}_{2m} (n_u \xi_{2m}^2 + 2\xi_{2m} + 1)} \quad (76)$$

$$\dot{\xi}_2 = \frac{6n_M}{D \dot{\theta}_{2m} (n_u \xi_{2m}^2 + 2\xi_{2m} + 1)} \left\{ \frac{(n_u \xi_2^2 + 2\xi_2 + 1)^2}{6n_u \xi_2^2 + 4n_u \xi_2 + n_u^2 \xi_2^4 + 4n_u \xi_2^3 + 1} \right\} \quad (77)$$

将 $\xi_2 = n_i$ 代入 (75)~(77) 式, 则得到 H_2 到达梁根部 B 所对应的时间 τ_N , 移行铰在这一时刻的速度以及角速度 $\dot{\theta}_2$ 。记这个角速度为 $\dot{\theta}_{2N}$, 则

$$\dot{\theta}_{2N} = \frac{n_u \xi_{2m}^2 + 2\xi_{2m} + 1}{n_u n_i^2 + 2n_i + 1} \dot{\theta}_{2m} \quad (78)$$

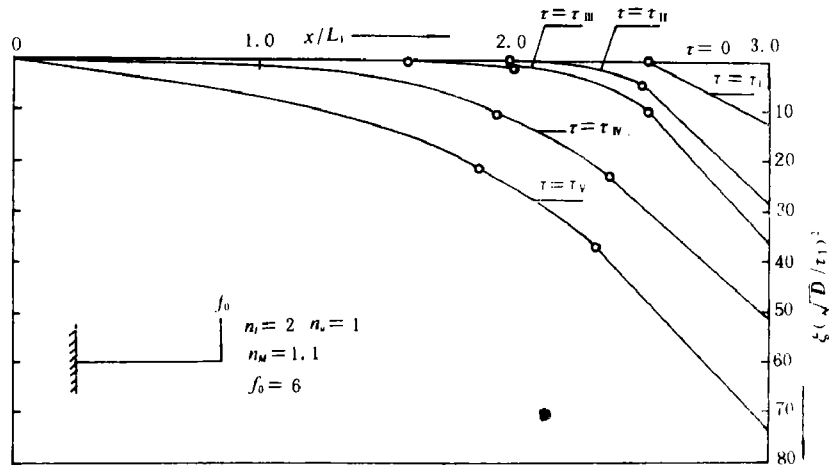
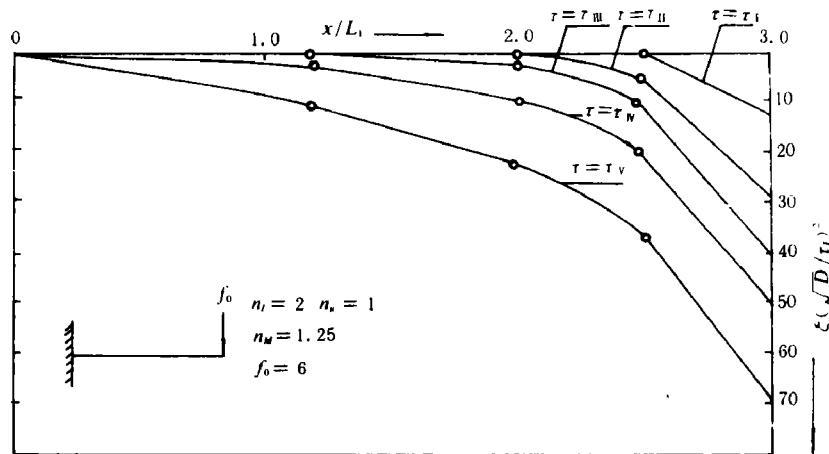
第五相 $\tau_N < \tau$

这一阶段为梁绕 B 转动, 消耗掉梁余下的动能, 可求出最后的转角 θ_B

$$\theta_B = (1/6n_M) [D \dot{\theta}_{2N}^2 (n_u n_i^2 + 3n_i^2 + 3n_i + 1)] \quad (79)$$

表 2 动力响应模式 ($M_1^0 < M_2^0$)Table 2 Dynamic response modes with $M_1^0 < M_2^0$

	响应时间	响应形式	有关方程
第一相	$0 \leq \tau \leq \tau_I$	固定铰 H_1	(37) ~ (44)
第二相	$\tau_I < \tau \leq \tau_{II}$	移行铰 H_1	(45) ~ (50)
第三相	$\tau_{II} < \tau \leq \tau_{III}$	双固定铰 $C-H_2$	(51) ~ (72)
第四相	$\tau_{III} < \tau \leq \tau_{IV}$	移行铰 H_2	(73) ~ (78)
第五相	$\tau_{IV} < \tau$	固定铰 B	(79)

图 5 阶梯形悬臂梁的挠度曲线 ($M_1^0 < M_2^0$)Fig. 5 Deflection curves of stepped cantilever with $M_1^0 < M_2^0$ 图 6 阶梯形悬臂梁的挠度曲线 ($M_1^0 < M_2^0$)Fig. 6 Deflection curves of stepped cantilever with $M_1^0 < M_2^0$

以上各相对应的响应模式见表 2, 各相结束的梁的挠曲线及塑性铰位置见图 5, 图 6。

四、讨 论

(1) 当梁的自由段受到 δ 函数的冲击载荷作用时, 可以类似地求其响应, 该问题可以看成自由端由集中质量 G , 在冲击的瞬间获得初速度 v_0 。显然, 第一相不出现, 响应直接由第二相开始。对于 $M_1^0 < M_2^0$ 的阶梯梁, 这第二相的响应就是 Parkes 问题^[1], 以下各相同第三节所给出的, 不再赘述。

对于 $M_1^0 > M_2^0$ 的阶梯梁, 响应一开始就是双铰 H_1-C 模式, 其中 H_1 是移行铰。基本方程和 (13)、(14) 式类似, 当然应添上有关集中质量的项。对于这个问题, 我们将在另一篇文章中讨论。

(2) 考虑一均匀截面悬臂梁, 其上某处有一凹槽, 设凹槽长度 $\Delta L \ll L_1$ (或 L_2), 图见 7。设梁的塑性动力弯矩为 M_1^0 , 凹槽处的塑性动力弯矩为 M_2^0 , 当此梁受到矩形脉冲荷载作用时, 其响应的第一相、第二相将和第二节给出的相同。因为 ΔL 很短, 第二相结束后, 这时的情形正和第三节的情况相同, 因而开始第三节所给出的第三相响应, 双固定铰 $C-H_2$ 模式。这一响应出现的条件为 (64) 式, 这时 $n_0 = 3(n_M - 1)$ 即

$$\sqrt{9(n_M - 1)^2 + 3(n_M - 1)} + (n_M - 1) \leq 3n_0$$

而这时 $n_M = M_1^0 / M_2^0 > 1$, 在这种情况下, 凹槽处的铰 C 在第一、二、三相中都存在。在最终挠曲线上, C 处将有一尖角。

相反地, 若在 C 处有一道凸棱, 该处 M_2^0 大于梁其他截面的 M_1^0 , 则其初始第一、二相响应将和 $n_M > 1$ (表 2) 的相同。现在考虑第三相, 若不考虑这一凸棱的附加质量, 在目前情况下, AC 段与 CB 段的 M^0 相同, 即 $n_M = 1$, 由 (63) 式, 并注意 $q_c = 0$, 所以有 $\xi_2 = 0$, 说明没有表 2 中的双铰第三相, 移行铰将越过凸棱而继续向前移行。如果凸棱 ΔL 很短 ($\Delta L \ll L_1$ 或 L_2) 如图 8 所示, 为了不破坏 $C-B$ 的刚性区条件, 可以证明存在一个 $C-C'$ 双固定铰的阶段。当 AC 段相对于 CC' 段转动为零时, C 处的固定铰变成移行铰向 B 端运动。最终挠曲线将在 C 和 C' 处出现折角。

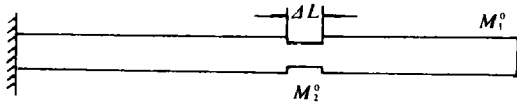


图 7 带凹槽的悬臂梁

Fig. 7 A cantilever beam with a groove

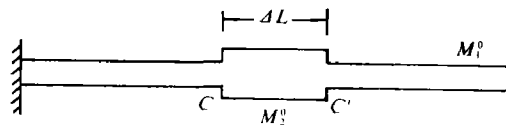


图 8 带凸棱的悬臂梁

Fig. 8 A cantilever beam with a projection

(3) 对于本文所讨论的两段不同截面的阶梯梁, 在截面交界处产生固定铰。这种现象也将出现在更加复杂的梁上, 如多段不同截面的阶梯梁等。而且我们注意到在强段上总有一段与弱段相邻的区段不会变形。

附录 I

阶梯截面梁在阶跃载荷作用下塑性铰的位置

	响应模式	f 的范围	相关的方程
$M_2^0/M_1^0 < 1$	模式 I	无铰	$f < f_{A0}$ (1)
	模式 II	单铰 B	$f_{A0} \leq f < f_{A1}$ (5)
	模式 III	单铰 H_2	$f_{A1} < f < f_{A2}$ (6)
	模式 IV	单铰 C	$f_{A2} \leq f < f_{A3}$ (14), (15)
	模式 V	双铰 H_1-C	$f_{A3} < f$ (7) ~ (13)
$M_2^0/M_1^0 > 1$	模式 I	无铰	$f < f_{B0}$ (20)
	模式 II	单铰 B	$f_{B0} \leq f < f_{B1}$ (21)
	模式 III	单铰 H_2	$f_{B1} < f < f_{B2}$ (22)
	模式 IV	双铰 $C-H_2$	$f_{B2} < f < f_{B3}$ (23)
	模式 V	双铰 $C-B$	$f_{B3} \leq f < f_{B4}$ (24)
	模式 VI	单铰 C	$f_{B4} \leq f < f_{B5}$ (25)
	模式 VII	单铰 H_1	$f_{B5} < f$

附录 II

方程 (18) 在初始条件 (19)、(20) 式下的解

$$\text{令: } \dot{\xi}_1 = P, \text{ 则 } \ddot{\xi}_1 = P \frac{dP}{d\xi_1} \quad (A1)$$

将 (A1) 式代入 (18) 式得

$$P \left\{ \frac{dP}{d\xi_1} + P \frac{\xi_1^2 (1-n_M)}{(1-\xi_1)(2(1-\xi_1)^2 - \xi_1^2(1-n_M))} \right\} = 0$$

显然 $P \neq 0$, 于是

$$\frac{dP}{P} = \frac{1-n_M}{1+n_M} \frac{\xi_1^2}{(\xi_1-1)(\xi_1-A)(\xi_1-B)} d\xi_1$$

积分上式

$$\ln P = \frac{1-n_M}{1+n_M} \left(\frac{1}{(1-A)(1-B)} \ln |\xi_1-1| + \frac{A^2}{(1-A)(B-A)} \ln |\xi_1-A| + \frac{B^2 \ln |\xi_1-B|}{(1-B)(A-B)} \right) + C \quad (A2)$$

其中

$$A = \frac{2 - \sqrt{2(1-n_M)}}{1+n_M}, \quad B = \frac{2 + \sqrt{2(1-n_M)}}{1+n_M} \quad (A3)$$

将 (A3) 式代入 (A2) 式, 并利用 (19)、(20) 式运算得

$$\dot{\xi}_1 = C_0 |\xi_1-1|^{-1} \left| \xi_1 - \frac{2 - \sqrt{2(1-n_M)}}{1+n_M} \right|^{\lambda_1} \left| \xi_1 - \frac{2 + \sqrt{2(1-n_M)}}{1+n_M} \right|^{\lambda_2} \quad (A4)$$

在 (A4) 中: $\lambda_1 = (24)$ 式, $\lambda_2 = (25)$ 式, $C_0 = (26)$ 式。

参 考 文 献

- [1] Parkes, E.W., The Permanent deformation of a cantilever struck transversely at its tip. Proc. R. Soc. A. 228 (1955), 462.
- [2] Johnson, W., Impact Strength of Materials, Edward Arnold, London, (1972).
- [3] 周青, 余同希, 在强动载荷作用下变截面梁中的塑性铰. 爆炸与冲击, 7(4) (1987), 311.
- [4] Hua, Y.L., Yu, T.X., Reid, S.R., Double-hinge modes in the dynamic response of plastic cantilever beams subjected to step loading. Int. J. Impact Engng. 7(4) (1988), 401.

COMPLETE SOLUTIONS FOR DYNAMIC RESPONSE OF RIGID PLASTIC STEPPED CANTILEVER BEAMS SUBJECTED TO RECTANGULAR PULSE-LOADING

Yang Jialing

Hua Yunlong

(Beijing University) (Beijing Agricultural Engineering University)

Pan Hailin

(No. 502 Institute of Ministry of Aeronautics and Aerospace)

ABSTRACT In this paper, double-hinge modes are introduced to analyse the dynamic response of rigid plastic stepped cantilever beams subjected to rectangular pulse-loading. The closed complete solutions are given for entire response process. Some important parameters which influence the final deflection of the beams are discussed.

The study contains two cases:

Case1. When $M_1^0 > M_2^0$, where M_1^0, M_2^0 denote dynamic plastic-limit moment in segments close to the free end and the fixed end of the beam respectively, the dynamic response will be divided into four phases- two static hinge modes for phase I; one static hinge and one travelling hinge modes for phase II; one travelling hinge mode for phase III; one static hinge mode for phase IV.

Case2. When $M_1^0 < M_2^0$, the dynamic response will be divided into five phases- one static hinge mode for phase I; one travelling hinge mode for phase II; two static hinge modes for phase III; one travelling hinge mode for phase IV; one static hinge mode for phase V, or three phases- one static hinge mode for phase I; one travelling hinge mode for phase II; one static hinge mode for phase III, which depends on the parameter in terms of mass of the beam per unit length and the dynamic plastic-limit moment.

Finally, the place of the plastic hinges are shown on the deflection curves of the stepped beam at each phase end. This makes the entire response process more clearly.

KEY WORDS complete solutions, dynamic response, rigid plastic stepped cantilever beams, double-hinge, rectangular pulse-loading.