

## 受横向冲击圆环的粘塑性大变形分析

张铁光 郭晓刚  
(太原工业大学) (太原职工大学)

**摘要** 本文采用了受压刚性平板对压圆环的准静态大变形模式<sup>[1]</sup>,对放置在刚性平板上的圆环受落锤冲击下的动力响应作了粘塑性大变形分析,并考虑了应变强化的影响。由于把问题简化为一个自由度系统的运动,使得整个运动过程可以较方便地计算出来。计算结果表明,在运动初期应变率效应对圆环承载力的提高起主要作用,在运动后期应变强化及大变形影响较大,其中应变强化起主导作用。计算结果与实验结果<sup>[9-10]</sup>进行了对比。

**关键词** 圆环 刚粘塑性 动力响应 能量吸收装置

### 1. 引言

近20多年来,随着碰撞事故的增加,碰撞问题已经引起许多国家的关注。解决这一问题的主要途径是研究提高各种车辆、船舶、飞行器结构的耐撞性(structural crashworthiness);同时,在某些特定工况下,已有结构难于满足吸收全部能量的要求,需要设计一些特殊的结构元件作为能量吸收装置(energy absorbing devices)<sup>[2]</sup>。

圆环及圆管是应用得最广泛的能量吸收元件,它们易于制造、成本低、可提供较长的行程。在两刚性平板对压下圆环的准静态响应曾被详尽地研究过<sup>[3-6]</sup>,文献[1,3~6]的共同特点是只考虑了弯矩对屈服的影响。圆环的大变形具有稳定的变形模式,Reid等人<sup>[4]</sup>指出:材料的应变强化使圆环的承载能力大大提高,他们的分析结果与准静态实验结果十分接近。

在动载下结构的动力响应问题应考虑应变率效应及惯性力效应。Owens及Symonds<sup>[7]</sup>在分析受一个集中力作用下的自由圆环的动力响应问题时指出:圆环变形机构为四铰机构,在圆环厚度与直径之比 $h/2r=0.1$ 时,轴力对屈服的影响甚微,变形主要为弯曲变形。

在落锤冲击下圆环变形的实验结果<sup>[8-11]</sup>表明:圆环变形模式与准静态加载情况下的变形模式相同。Reid及Reddy<sup>[10]</sup>假定:圆环在落锤冲击下的变形模式与准静态加载情况下相同,圆环横向压缩的初始速率等于落锤冲击速度 $v_0$ ,圆环整个变形过程中应变率效应由塑性铰区域的初始变形率确定,本构关系中考虑了应变率效应及应变强化效应,对圆环在冲击载荷作用下的初始破坏载荷作了估算。

对圆环在动载下变形过程的研究,将为工程设计提供可靠的依据。本文采用准静态变形模式,把问题简化为具有一个自由度的系统,初始变形率由碰撞型的拉格朗日方程确定,并对动载下圆环变形的整个过程进行了计算。

### 2. 模型及公式

图1所示圆环放置在刚性平面上,其半径、宽度、厚度及单位长度质量密度分别为 $R$ 、 $L$ 、 $t$ 及 $r$ 。初瞬时,质量为 $G$ 的落锤以速度 $v_0$ 撞击圆环顶部,若落锤落下后粘在圆环上随

试件一起运动,这相当于图1所示结构在初瞬时受到冲量  $I_0 = Gv_0$  的作用,这时在  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  四点形成四个塑性铰。设在  $t$  时刻,圆环变形模式如图2所示。假设  $BA_1$ 、 $BC_1$ 、 $DA_2$ 、 $DC_2$

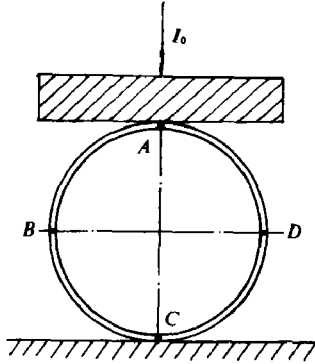


图1 初始时刻圆环受到冲量  $I_0 = Gv_0$  的作用

Fig. 1 A circular ring subjected to an impulse  $I_0 = Gv_0$  at the initial moment.

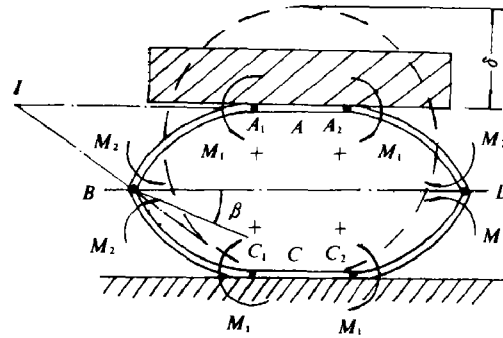


图2 圆环变形模式

Fig. 2 The mode of dynamic large deformation of the ring.

四段弧为刚性段,并保持为圆弧,  $B$ 、 $A_1$ 、 $C_1$ 、 $D$ 、 $A_2$ 、 $C_2$  为塑性铰(虽然在这些铰附近可能扩展为塑性区)。这时,  $BA_1$ 、 $BC_1$ 、 $DA_2$ 、 $DC_2$  转过的角度为  $\beta$ 。各铰处弯矩  $M_1$  及  $M_2$  可作为主动力,于是有

$$y = 2R(1 - \sin \beta) \quad (1)$$

$$\dot{y} = -2R \cos \beta \cdot \dot{\beta} \quad (2)$$

$$\ddot{y} = 2R \sin \beta \cdot \dot{\beta}^2 - 2R \cos \beta \cdot \ddot{\beta} \quad (3)$$

这里  $y$  为落锤相对刚性平面的坐标,  $\dot{y}$  及  $\ddot{y}$  分别为落锤的速度及加速度。设  $BC_1$  段环对  $C_1$  点的转动惯量为  $J_{C_1}$ ,  $BA_1$  段环对其速度瞬心  $I$  点的转动惯量  $J_I$  分别为

$$J_{C_1} = 2R^2 r \left( \frac{\pi}{2} - \beta - \cos \beta \right) \quad (4)$$

$$J_I = R^2 y \left[ (2 + 4 \cos^2 \beta) \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) + 2 \sin 2\beta - 6 \cos \beta \right] \quad (5)$$

$A_1A_2$  段及  $C_1C_2$  段的质量为  $2R\beta y$ 。

系统只有一个自由度,选取  $\beta$  为广义坐标,整个系统在  $t$  时刻的动能为

$$T = F(\beta) \dot{\beta}^2 \quad (6)$$

这里

$$F(\beta) = 2R^2 \left\{ (G + 2R\beta y) \cos^2 \beta + Ry \left[ \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) (4 + 4 \cos^2 \beta) + 2 \sin 2\beta - 8 \cos \beta \right] \right\} \quad (7)$$

则

$$\frac{\partial T}{\partial \beta} = \frac{\partial F(\beta)}{\partial \beta} \dot{\beta}^2 \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} = 2F(\beta)\dot{\beta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}}\right) = 2\frac{\partial F(\beta)}{\partial \beta}\dot{\beta}^2 + 2F(\beta)\ddot{\beta} \quad (9)$$

这里

$$\frac{\partial F(\beta)}{\partial \beta} = 2R^2\left\{\gamma R[4\cos 2\beta + 8\sin\beta - 4 - 2\cos^2\beta - 4\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\sin 2\beta] - (G + 2\gamma\beta R)\sin 2\beta\right\} \quad (10)$$

给系统一个虚位移  $\delta\beta$ , 则主动力虚功为  $-4M_1\delta\beta - 4M_2\delta\beta$ , 所以与广义坐标  $\beta$  对应的广义力为

$$Q_\beta = -4M_1 - 4M_2 \quad (11)$$

将 (8)、(9)、(10) 及 (11) 式代入第二类拉格朗日方程可得系统的运动微分方程

$$2F(\beta)\ddot{\beta} + \frac{\partial F(\beta)}{\partial \beta}\dot{\beta}^2 = -4M_1 - 4M_2 \quad (12)$$

初始条件可由冲力作用下的拉格朗日方程  $\Delta(\partial T/\partial \dot{\beta}) = \hat{Q}$  得到, 这里  $\partial T/\partial \dot{\beta}$  为广义动量,  $\hat{Q}$  为广义冲量,  $\hat{Q} = 2RI_0$ . 令  $\beta = 0$ , 由 (6) 可得初始时刻系统获得的动能为

$$T_0 = [2R^2G + \gamma R^3(4\pi - 8)]\dot{\beta}_0^2 \quad (13)$$

$\dot{\beta}_0$  为初瞬时的角速度, 代入  $\Delta(\partial T/\partial \dot{\beta}) = \hat{Q}$  可得

$$4R^2[G + \gamma R^3(2\pi - 4)]\dot{\beta}_0 = 2RI_0$$

即

$$\dot{\beta}_0 = \frac{I_0}{2R[G + \gamma R(2\pi - 4)]} \quad (14)$$

将上式代入 (2) 式, 取  $\beta = 0$  及  $I_0 = Gv_0$  可得初瞬时落锤速度  $\dot{v}_0 = -v_0/[1 + \gamma R(2\pi - 4) \cdot G] \neq -v_0$ , 这与 Reid 等人<sup>[10]</sup> 的假设不同。

由初始条件 (12) 式可写成积分形式

$$F(\beta)\dot{\beta}^2 = T_0 - \int_0^\beta 4(M_1 + M_2)d\beta \quad (15)$$

### 3. 本构关系

在方程 (12)、(15) 中, 采用不同的本构关系, 假设: (1) 材料为刚粘塑性材料, 略去弹性的影响; (2)  $t/2R \ll 1$ , 略去轴力、剪力对屈服的影响; (3) 材料性质与应变率历史无关。

采用与文献[10]相同的本构关系

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_0(\dot{\varepsilon}/c)^{1/p} \quad (16)$$

这里  $\sigma_0$  为静态屈服应力,  $\sigma$  为现实应力,  $\dot{\varepsilon}$  为现实应变率。对线性强化材料则有

$$\sigma = \sigma_s(\varepsilon) + \sigma_0(\dot{\varepsilon}/c)^{1/p} \quad (17)$$

这里  $\sigma_s(\varepsilon) = \sigma_0 + E_p \varepsilon$ ,  $E_p$  为线性应变强化模量。

由 (16) 及 (17) 式可得

$$\dot{K} = B \left( \frac{M}{M_0} - 1 \right)^p \quad (\text{非应变强化}) \quad (18)$$

$$\dot{K} = B \left( \frac{M}{M_s} - 1 \right)^p \quad (\text{线性应变强化}) \quad (19)$$

这里  $M_0 = (1/4) L t^2 \sigma_0$ ,  $M_s = (1/4) L t^2 \sigma_s$ ,  $\dot{K}$  为曲率的时间变化率,  $B = (2c/t) [(2P+1) \cdot 2P]^p$ 。

塑性铰的有效塑性长度为  $\lambda$ , 与文献 [10] 一样选取

$$\lambda = 4t \quad (20)$$

角速度  $\dot{\beta}$  与  $\dot{K}$  的关系为

$$\dot{\beta} = \lambda \dot{K} \quad (21)$$

并有

$$M_s = M_0 \left[ 1 + \frac{E_p t}{3\sigma_0 \lambda} \beta \right] \quad (22)$$

对于刚粘塑性材料有

$$M_1 = \begin{cases} M_0 \left[ 1 + \left( \frac{\dot{\beta}}{B\lambda} \right)^{1/p} \right] & \dot{\beta} > 0 \\ M_0 & \dot{\beta} = 0 \end{cases} \quad (23)$$

$$M_2 = \begin{cases} M_0 \left[ 1 + \left( \frac{2\dot{\beta}}{B\lambda} \right)^{1/p} \right] & \dot{\beta} > 0 \\ M_0 & \dot{\beta} = 0 \end{cases} \quad (24)$$

对于线性应变强化刚粘塑性材料有

$$M_1 = \begin{cases} M_0 \left[ 1 + \left( \frac{\dot{\beta}}{B\lambda} \right)^{1/p} \right] & \dot{\beta} > 0 \\ \leq M_0 & \dot{\beta} = 0 \end{cases} \quad (25)$$

$$M_2 = \begin{cases} M_0 \left( 1 + \frac{E_p t}{3\sigma_0 \lambda} \beta \right) \left[ 1 + \left( \frac{2\dot{\beta}}{B\lambda} \right)^{1/p} \right] & \dot{\beta} > 0 \\ \leq M_0 \left( 1 + \frac{E_p t}{3\sigma_0 \lambda} \beta \right) & \dot{\beta} = 0 \end{cases} \quad (26)$$

#### 4. 计算过程及算例

将 (15) 式离散化, 选取  $\Delta\beta \ll 1$  为步长。若已知  $\beta_0 = 0, \beta_1 = \Delta\beta, \beta_2 = 2\Delta\beta \dots\dots, \beta_i = i\Delta\beta$  时的角速度分别为  $\dot{\beta}_0, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2 \dots\dots \dot{\beta}_i$ , 则选取  $\dot{\beta}_{i+1}^1 = a\dot{\beta}_i$ , 这里  $a$  为加权系数, 且满足  $a < 1$ , 则

$$\dot{\beta}_{i+1}^2 = \left\{ [T(\beta_i) - 2(M_1(\beta_i) + M_2(\beta_i) + M_1(\beta_{i+1}) + M_2(\beta_{i+1}))\Delta\beta] / F(\beta_{i+1}) \right\}^{1/2} \quad (27)$$

对于选定的正数  $\varepsilon \ll 1$ , 若

$$|\dot{\beta}_{i+1}^1 - \beta_{i+1}^2| > \varepsilon$$

则反复迭代计算 (选取  $\dot{\beta}_{i+1}^1 = a_1 \dot{\beta}_{i+1}^1 + a_2 \dot{\beta}_{i+1}^2$ ,  $a_1 < 1, a_2 < 1, a_1 + a_2 = 1$ ), 直到满足  $|\dot{\beta}_{i+1}^1 - \dot{\beta}_{i+1}^2| < \varepsilon$  为止。

初始时刻  $t = 0, \beta = \beta_i$  时运动时间为  $t_i$ , 则  $\beta = \beta_{i+1}$  时, 运动时间  $t_{i+1} = \Delta t_{i+1} + t_i$ ,  $\Delta t_{i+1}$  可由下面方法算得。由 (12) 式有

$$\ddot{\beta}_i = -[4M_1(\beta_i) + 4M_2(\beta_i) + \left(\frac{\partial F(\beta)}{\partial \beta}\right)_i \dot{\beta}_i^2] / 2F(\beta_i)$$

$$\ddot{\beta}_{i+1} = -[4M_1(\beta_{i+1}) + 4M_2(\beta_{i+1}) + \left(\frac{\partial F(\beta)}{\partial \beta}\right)_{i+1} \dot{\beta}_{i+1}^2] / 2F(\beta_{i+1})$$

$$\Delta t_{i+1} = 2(\dot{\beta}_{i+1} - \dot{\beta}_i) / (\ddot{\beta}_{i+1} + \ddot{\beta}_i) \tag{28}$$

在  $t_{i+1}$  时刻落锤的速度及加速度可由 (2)、(3) 式算出, 落锤所受到的力为

$$P_{i+1} = G\ddot{y}_{i+1} = 2RG(\sin \beta_{i+1} \dot{\beta}_{i+1}^2 - \cos \beta_{i+1} \ddot{\beta}_{i+1}) \tag{29}$$

圆环变形挠度

$$\delta_{i+1} = 2R \sin \beta_{i+1} \tag{30}$$

整个计算直到满足下面条件时停止

$$\dot{\beta}_{i+1} \leq 0.001 \dot{\beta}_0$$

计算过程中对低碳钢试件取  $C = 40S^{-1}, P = 5$ 。

图3及图4把本文计算结果与文献[9]中实验所得的载荷-挠度曲线进行了对比, 实

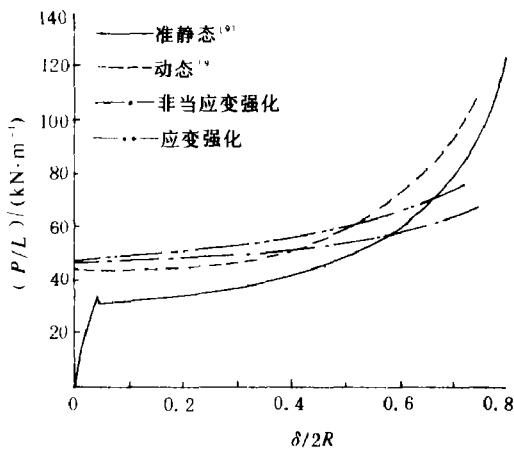


图3 [9] 中3号试件的静态及动态载荷-挠度曲线 (表1)

Fig. 3 Comparison of the dynamic load-deflection curves. (test no. 3 in table 1)

—— quasi-static [9]    - - - dynamic [9]  
 - · - non-strain-hardening  
 · · · strain-hardening

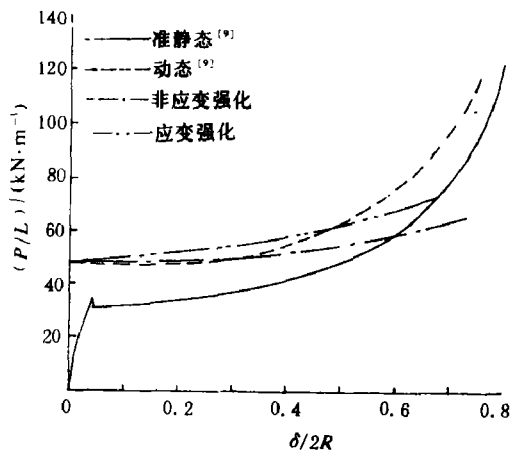


图4 [9] 中4号试件的静态及动态载荷-挠度曲线 (表1)

Fig. 4 Comparison of the dynamic load-deflection curves. (test no. 4 in table 1)

—— quasi-static [9]    - - - dynamic [9]  
 - · - non-strain-hardening  
 · · · strain-hardening

验数据参见表1。图中实线是准静态实验曲线,虚线是实验结果,点划线及双点划线是本文计算结果。其中点划线是未考虑应变强化的载荷挠度曲线,双点划线是考虑了应变强化的载荷挠度曲线。由图3及图4可以看出,当挠度与直径之比 $\delta/2R < 0.5$ 时计算结果与实验结果符合较好;当 $\delta/2R > 0.5$ 时实验曲线上升较快,产生这一现象的原因是本文在计算过程中采用了不变的有效塑性铰长度 (effective hinge length)  $\lambda = 4t$ 。Johnson 等人<sup>[12]</sup>曾对准静态下受压圆环的变形过程加以研究,指出有效塑性铰长度 $\lambda$ 随 $\delta/2R$ 增加而增加,当 $\delta/2R \approx 0.4$ 时达到最大值。接着 $\lambda$ 随 $\delta/2R$ 的继续增加而减少,这使得载荷迅速提高。计算过程中,若考虑到有效塑性铰长度的变化会使计算结果得以改善。

Reid 等人<sup>[10]</sup>的实验结果与文献[9]类似,他们在前面提到的假设条件下对初始破坏载荷进行了估算。图5根据表1文献[9]中的数据,算出角速度 $\dot{\beta}$ 与时间的关系曲线。由图5可以定性得出下面结论:冲击速度越大,初始角速度 $\dot{\beta}_0$ 越大,初始破坏载荷也要高。

表 1 实验数据<sup>[9]</sup>Table 1 Data of tests<sup>[9]</sup>

试件号	材 料	$D/(mm)$	$t/(mm)$	$L/(mm)$	$v_0/(m/s)$	$G/(kg)$	$\sigma_0/(MPa)$	$E_p/(GPa)$
3	低碳钢	50	1.6	100	3.42	35	269	1.65
4	低碳钢	50	1.6	100	5.40	13.7	269	1.65

Calladine 等人<sup>[11]</sup>认为,圆环是一种对冲击速度不敏感的能量吸收元件,即在相同冲击动能 $(1/2)Gv_0^2$ 的条件下,落锤质量 $G$ 越大,冲击速度越小,反之则冲击速度大,但圆环最

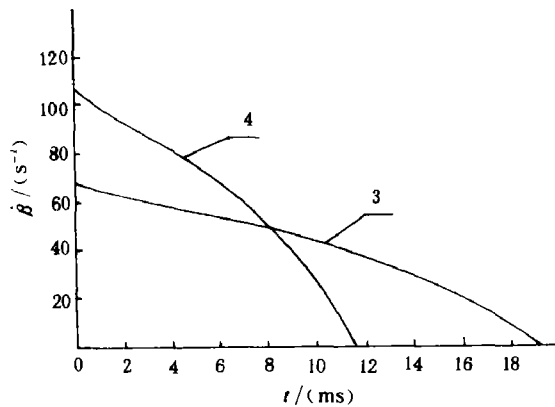
图5 表1中3、4号试件的 $\dot{\beta} \sim t$ 曲线

Fig. 5 The variation of the angular velocity  $\dot{\beta}$  with time. (test no. 3 and test no. 4 in table 1)

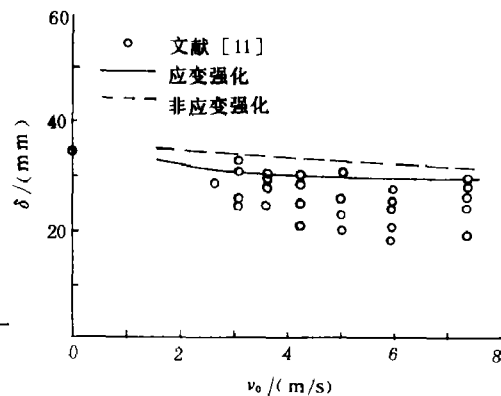


图6 落锤动能为122 J时,挠度与落锤初速度关系曲线

Fig. 6 The deflection  $\delta$  as a function of impact velocity  $v_0$  of the drop hammers. (The input energy for all specimens remained as  $U = 122 J$ , see table 2.)

○ in ref. [11] — strain-hardening  
 ---- non-strain-hardening

终变形挠度相差不大。他们采用了厚度、外径及长度分别为1.6mm、51mm及63mm的低碳钢圆管试件在冲击动能为122J的条件下作了一组实验,实验数据如表2所示。图6把计

表2 实验数据<sup>[11]</sup>Table 2 Data of the tests<sup>[11]</sup>

试件号	A	B	C	D	E	F	G
落锤质量 $G$ / (kg)	1.55	6.88	9.83	13.8	18.9	26.1	35.1
落锤高度 $h$ / (m)	2.71	1.81	1.27	0.907	0.660	0.479	0.355
冲击速度 $v_0$ / (ms <sup>-1</sup> )	7.33	5.96	5.00	4.22	3.60	3.07	2.61

算结果与文献[11]中的实验结果进行了对比,图中实线及虚线分别为考虑了应变强化及未考虑应变强化的计算结果,各点为文献[11]中的实验点。在同样的冲击动能条件下,圆环变形最终挠度 $\delta$ 随冲击速度的增加有下降的趋势。计算表明,这是应变率效应的影响。

### 5. 结论

本文采用了准静态变形模式,对放置在刚性平板上的圆环在落锤冲击下的动力响应问题进行了粘塑性大变形分析,并考虑了应变强化的影响。计算过程发现,在运动初期应变率效应起主要作用,在运动后期应变强化使圆环承载能力提高。由于采用了准静态变形模式,使问题简化为只有一个自由度的系统运动,使得整个运动过程可以较方便地计算出来。计算结果与实验相比在一定程度上符合较好,若考虑有效塑性较长度 $\lambda$ 在运动过程的变化,还可使计算结果得到改善。

计算结果和实验结果表明,圆环在变形过程中承载能力比较稳定,因而是较好的能量吸收元件。本文方法还可以进一步推广到多个圆环组成的系统的动力响应问题中。

### 参 考 文 献

- [1] Redwood, R. G., *J. Appl. Mech.*, **31** (1964), 357.
- [2] 余同希, *力学进展*, **16** (1) (1986), 28.
- [3] Hwang, C., *J. Aero. Sci.*, **30** (1953), 819.
- [4] DeRuntz, J. A., Hodge, P. G., *J. Appl. Mech.*, **30** (1963), 391.
- [5] Burton, R. H., Cring, J. M., B.S.c(Eng) Report University of Bristol, Bristol England, (1963).
- [6] Reid, S. R., Reddy, T. Y., *Int. J. Solids Struct.*, **14** (1978), 213.
- [7] Owens, R. H., Symonds, P. S., *J. Appl. Mech.*, **22** (1955), 523.
- [8] Reid, S. R., *Structural Crashworthiness* (Eds. N. Jones and T. Wierzbicki) 1—43, Butterworths, London, (1983).
- [9] Reddy, T. Y., Thesis, Ph. D., Univ. of Cambridge, England, (1978).
- [10] Reid, S. R., Reddy, T. Y., in Proc. Conf. on Mechanical Properties at High Rates of Strain, p228, Institute of Physics conference Series, No. 47, Oxford, (1979).
- [11] Calladin, C. R., English, R. W., *Int. J. Mech. Sci.*, **26**, (11,12) (1984), 689.
- [12] Johnson, W., Reid, S. R., Reddy, T. Y., *Int. J. Mech. Sci.*, **19** (1977), 423.

## THE LARGE VISCOPLASTIC DEFORMATION OF A RING SUBJECTED TO LATERAL IMPULSIVE LOADING

Zhang Tieguaug

(*Taiyuan University of Technology*)

Guo Xiaogang

(*Taiyuan Worker's college*)

**ABSTRACT** Based on a rigid-viscoplastic constitutive relation and quasi-static large deformation mode [5] of tubes and rings compressed between flat plates, this paper provides a quantitative analysis to the large deformation process of a ring supported on a plate which is struck by a dropping hammer on its top. This analysis takes account of both the strain-rate effect and strain hardening simultaneously by using the concept of effective plastic hinge length.

In fact, the model of the dynamic large deformation is a six-hinge one. This system is of one-degree-of-freedom, and the bending moments  $M_1$  and  $M_2$  can be regarded at hinges as active. The differential equation of motion of the system can be obtained by the Lagrange's equation of the second kind, and the initial condition by the Lagrange's equation in the case of impulsive loading.

The values of  $M_1$  and  $M_2$  depend on the constitutive relation adopted. Assume that i) the material is rigid-viscoplastic, and the elastic effect is neglected; ii) the ratio between the thickness and the radius of the ring  $t/R \ll 1$ , the effects of axial and shear forces on yield are neglected; and iii) the behaviour of material is independent of the history of its strain-rate, the constitutive relation is used to represent the change in yield stress with strain rate for a strain hardening material,  $\sigma = \sigma_s(\varepsilon) + \sigma_0(\dot{\varepsilon}/c)^{1/p}$ .

For examination of this model, the procedure for the calculation of the dynamic response is given and numerical examples are shown in order to make a comparison with the experimental results reported in [9] and [11]. The analysis indicates that the strain-rate factor plays a important role in the initial period of the motion, and the strain hardening factor in the later period of the motion. In addition, the selection of the effective plastic hinge length  $\lambda$  may also effect the numerical results.

**KEY WORDS** ring, rigid-viscoplastic, dynamic response, energy absorbing devices.