

## 结构的塑性动力响应 (一)

余同希

(北京大学力学系)

### 一、引 言

在通常的弹性力学和塑性力学中,讨论的都是准静态的问题。在这些问题中变形进行得很慢,变形随时间变化的过程可以不计,惯性力与外载相比也可以忽略不计,因而可以按平衡问题来分析。如果外加载荷变化得很快,变形也将有很快的变化,这时就需要处理弹塑性体的动力学问题。从工程实际来看,作用于物体或结构上的强动载荷主要有以下几种情形:1)爆炸,如作用于房屋、地下结构、舰艇等;2)碰撞,如作用于车辆、船舶、飞机、核电站安全壳等;3)灾害,如地震、海啸、台风等;4)动力金属成形,如爆炸成形、电磁成形等;5)压力容器和管道局部破裂产生的动载,如核电站中的管道甩动。

弹塑性动力学问题可以分为两大类。第一类是弹性和塑性变形以波的形式在物体或结构内传播的问题。当考察物体的局部变形,或一个块体中变形的传播过程,常需要考虑波的效应。例如研究地壳内应力波的传播,对于地球物理和地震的研究都有重要意义。对金属结构物来说,弹性波以每秒数公里(例如钢的弹性波速为 $5.1\text{ km/s}$ )的速度在结构内往复传播,因此一般在微秒( $\mu\text{s}$ )量级的时间内就使结构的厚度方向上的所有质点受到波及,并开始作加速运动。第二类问题是考虑物体或结构的整体性运动。这种运动如果在弹性范围内进行,就是弹性振动;如果大大超出弹性范围,通常就称为结构的塑性动力响应(Dynamic plastic response of structures)。读者如果需要系统学习结构塑性动力学的专门知识,可以阅读有关专著,如王仁、熊祝华、黄文彬著的《塑性力学基础》(科学出版社,1982年)第十一章和杨桂通、熊祝华编著的《塑性动力学》(清华大学出版社,1984年)。我们这个讲座将介绍关于结构塑性动力响应的基本概念和基本知识。

塑性力学中的极限分析原理告诉我们,如果结构物的材料是理想弹塑性或理想刚塑性的,那么结构物都存在一个极限状态,即将外载达到某一极限载荷时,结构将变形一个机构而产生运动。当结构承受的动载超过这一静极限载荷时,结构会产生加速度。与此同时,就有惯性力参加抵抗变形。外载越大,加速度就越大,惯性力也越大,因而物体可能在短时间内承受比静极限载荷高的外载。这是结构动力响应不同于静力极限分析的一个基本特点。

在结构的动力响应过程中,通常总是既有弹性变形,又有塑性变形,这两种变形以及它们之间的分界面都随时间而变化。因而,弹塑性动力响应问题在数学上很复杂,至今还没有人能对有限结构求出弹塑性动力响应的解析解。然而,对于工程中大量遇到的结构物承受强动载荷的问题,其塑性变形往往远大于弹性变形。这时,可以有理由忽略弹性变形,即假定结构是刚塑性的。这一假定通常给问题的分析带来很大的简化。

## 二、承受突加载荷的悬臂梁

### 1. 突加常载荷的情形

考虑图1(a)所示长为 $L$ 的均匀截面的悬臂梁, 假设梁的材料是理想刚塑性的, 屈服应力为 $Y$ 。一个突加常载荷(或称阶跃载荷, 如图1(b)) $P$ 从 $t=0$ 时刻起作用在梁的自由端。

沿梁轴取 $x$ 坐标且取原点在梁的根部 $B$ 点, 则从梁的微元平衡可知

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x) \quad (1)$$

$$\frac{dM}{dx} = Q(x) \quad (2)$$

其中 $q(x)$ 为分布载荷,  $Q(x)$ 为剪力,  $M(x)$ 为弯矩, 它们的正向规定如图1(c)。

先考虑静力情形。这时只有自由端有外载荷, 于是 $q(x)=0$ , 从方程(1)和(2)解出 $Q(x)=P$ 和 $M(x)=P(x-L)$ , 于是剪力图和弯矩图如图1(d)所示。弯矩的最大值在 $B$ 点, 其值为 $M(0)=-PL$ 。对一根刚塑性梁, 弯矩的最大值不应超过塑性极限弯矩 $M_p$ , 它正比于屈服应力 $Y$ , 同

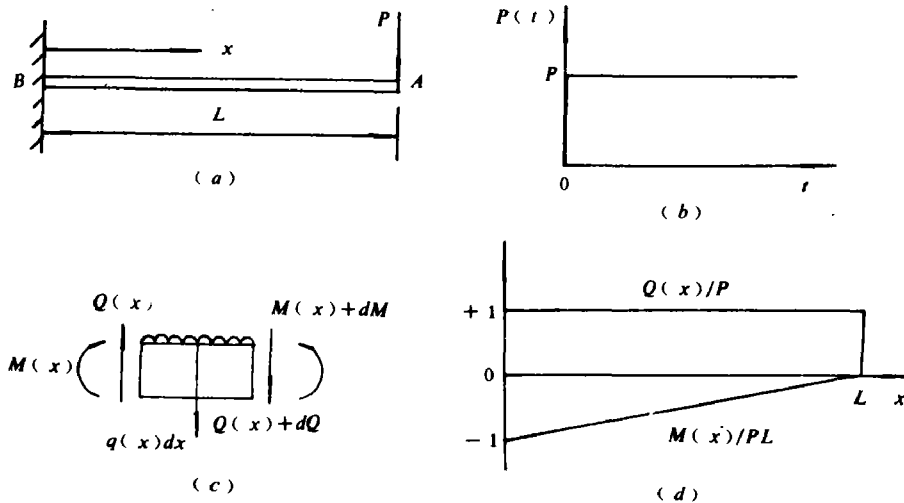


图 1 Fig. 1

时与截面形状有关。例如

$$M_p = \begin{cases} Ybh^2/4 & \text{对于宽 } b、\text{高 } h \text{ 的矩形截面;} \\ \frac{4Y}{3}[(R+h)^3 - h^3] & \text{对于内半径 } R、\text{厚 } h \text{ 的管截面。} \end{cases} \quad (3)$$

因而, 在静载荷 $P$ 的作用下, 极限载荷是

$$P_s = M_p / L$$

现在来考虑突加常载荷 $P$ 作用的情形。显然, 如果 $P < P_s$ , 那么梁将保持刚性、不发生运动。如果 $P > P_s$ , 根部会达到塑性极限状态, 即 $B$ 点形成塑性铰, 而梁将以角加速度 $\alpha$ 绕 $B$ 点旋转, 同时 $B$ 点具有剪力 $Q_B$ , 它们可决定如下(参见图2(a))。

设单位长度的梁的质量为 $m$ , 则梁的质心运动方程为

$$\frac{1}{2}mL^2\alpha = P - Q_B \quad (4)$$

同时, 绕  $B$  点转动的运动方程为

$$\frac{1}{3}mL^3\alpha = PL - M_p \quad (5)$$

从 (4) 和 (5) 式中消去  $\alpha$  后可以解出

$$Q_B = \frac{3M_p}{2L} - \frac{P}{2} \quad (6)$$

对于距根部为  $x$  的截面, 加速度为  $\alpha x$ , 惯性力为  $max$ , 但方向与图 1 (c) 中的  $q$  的正向相反, 因此  $q(x) = -max$ 。将它代入方程 (1) 积分, 并利用边条件  $Q(0) = Q_B$ , 得到

$$Q(x) = \frac{1}{2}max^2 + Q_B \quad (7)$$

将 (7) 式代入方程 (2) 积分, 并利用边条件  $M(L) = 0$ , 得到

$$M(x) = \frac{1}{6}ma(x^3 - L^3) + Q_B(x - L) \quad (8)$$

当  $Q_B > 0$  时的剪力图与弯矩图如图 2 (b) 所示。很明显  $Q_B$  是剪力的最小值。方程 (2) 表明,  $Q(x) = 0$  处弯矩  $M(x)$  取极值, 所以, 如果  $Q_B = 0$ ,  $B$  点的弯矩就是局部极小值。从 (6) 式可知这对应于

$$P = 3M_p/L = 3P_s \quad (9)$$

当  $P > 3P_s$  时情况, 这时根据 (7) 和 (8) 式画出的剪力图 and 弯矩图如图 2 (c) 所示。这时

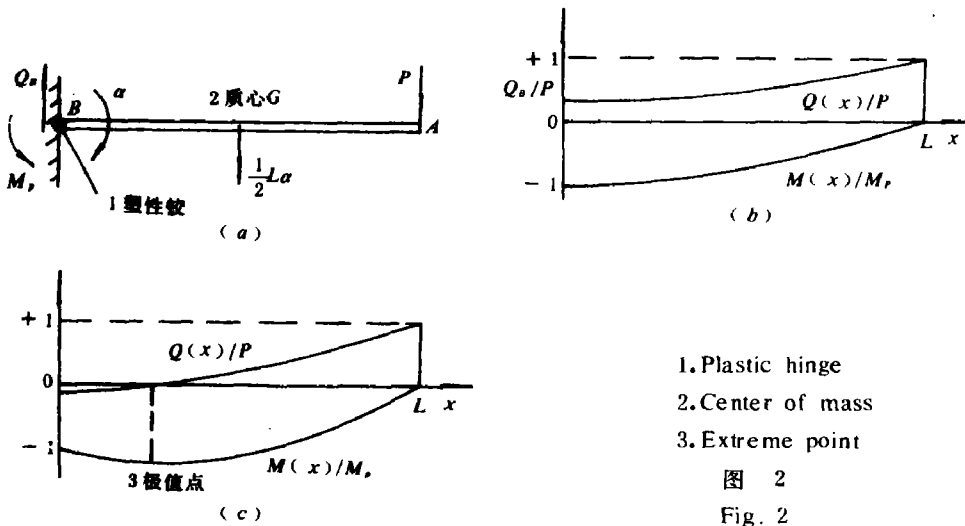


图 2  
Fig. 2

$Q_B$  是负的, 因而在某一  $\bar{x}$  ( $0 < \bar{x} < L$ ) 处有  $Q(\bar{x}) = 0$ , 且  $M(\bar{x})$  为  $M(x)$  的极小值。这意味着  $|M(\bar{x})| > M_p$ , 这是违背屈服条件的, 因此这样的解不适用。

让我们来尝试构造另一种变形模式 (图 3 (a))。假设塑性铰不是在根部, 而是在距离自由端为  $s (< L)$  的截面  $H$  处。为了保证在  $BH$  区段内不违背屈服条件, 此区段内应有  $Q = 0$ 。设  $AH$  段以角加速度  $\alpha$  绕  $H$  点作刚体转动, 对  $AH$  段列出运动方程, 则有

$$\frac{1}{2}ms^2 a = P \tag{10}$$

$$\frac{1}{3}ms^3 a = P_s - M_p \tag{11}$$

它们代替了前面的方程 (4) 和 (5)。注意这时  $Q_H = 0$  已知, 但  $s$  未知。从方程 (10) 和 (11) 可以解出未知量  $s$  和  $a$ , 得出

$$s = 3M_p / P \tag{12}$$

$$\alpha = \frac{6M_p}{ms^3} = \frac{2}{9} \cdot \frac{P^3}{mM_p^2} \tag{13}$$

不难画出这时的剪力图和弯矩图, 见图3 (b)。

小结 从本节的讨论中看到:

1) 静极限载荷是  $P_s = M_p / L$ , 相应的变形机构是在根部成铰; 在突加常载荷 (阶跃载荷) 的情况下, 保持这一变形机构时能承受的载荷为  $M_p / L \cdot P = 3M_p / L$ , 即承载能力最大可提高到静极限载荷的三倍。这是由于梁的惯性参加承载的结果。

2) 当载荷较低时, 变形机构与静极限分析得出的破坏机构一致; 而当载荷较高时, 可能导致与之不同的变形机构。这是由于梁的惯性力改变了弯矩分布的形态。

3) 当  $P = 3M_p / L$  时, 在梁的内部形成驻定的塑性铰, 其位置取决于  $s = 3M_p / P$ , 因而载荷越大时变形越局限于加载点附近。这体现了强动载荷作用下结构响应的局部性。

4) 在表达式  $s = 3M_p / P$  中并不出现  $m$ , 这说明只要梁是均匀的, 线密度的大小并不影响动态响应的变形机构。

### 2. 任意脉冲载荷 $P(t)$ 的情形

从上面一小节中已经看到, 塑性铰  $H$  的位置取决于外载  $P$  的大小。因此, 如果  $P = P(t)$  是随时间变化的 (但假定  $P$  的方向不改变, 或即  $P(t) \geq 0$ ), 那么应该允许  $s = s(t)$ , 即铰的位置也随时间变化。这样的铰称为移行铰。这时, 由于  $s$  不再是一个常数, 应该按照运动段的线动量和角动量的变化率来重新建立运动方程组。

参考图 4, 设梁的自由端  $A$  点的速度为  $\dot{z}$ , 加速度为  $\ddot{z}$ , 则考虑  $AH$  段的动量变化率, 有

$$d \left[ (1/2) ms\dot{z} \right] / dt = P(t) \tag{14}$$

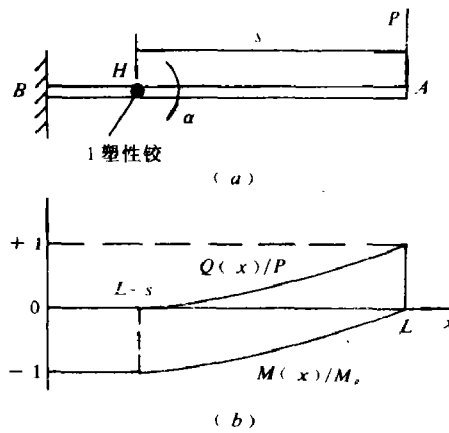


图 3

Fig. 3

1. Plastic hinge

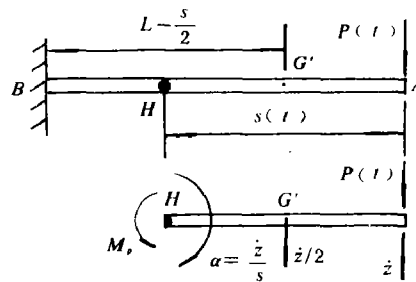


图 4

Fig. 4

由关于  $A$  点的动量矩变化率可得另一方程

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{12} m s^3 \cdot \dot{z} - \frac{1}{2} m s \dot{z} \cdot \frac{s}{2} \right] = -M_p$$

或即

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{6} m s^2 \dot{z} \right) = M_p \quad (15)$$

(14) 和 (15) 式都可直接积分, 分别得出

$$m s \dot{z} = 2 \int_0^t P(t) dt \quad (16)$$

$$m s^2 \dot{z} = 6 M_p t \quad (17)$$

这二式相除, 得到

$$s = \frac{3 M_p t}{\int_0^t P(t) dt} \quad (18)$$

这个方程给出了移行铰的位置  $s(t)$  与脉冲  $P(t)$  之间的关系。当  $P(t) = P = \text{常数}$  时, (18) 式就回到 (12) 式。

### 3. 矩形脉冲载荷的情形

作为以上分析的应用, 让我们考虑矩形脉冲的情形。参考图 5, 这时

$$P(t) = \begin{cases} P_0 & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & t_0 < t \end{cases}$$

1)  $0 \leq t \leq t_0$  时, (18) 式给出

$$s = s_0 = 3 M_p / P_0 \quad (19)$$

这是一个常数, 表明  $t \leq t_0$  时塑性铰是驻定不动的。利用

(16) 式得出  $\dot{z}$ , 再积分可得  $z(t)$ , 它们在  $t = t_0$  取值得

$$\dot{z}_0 \equiv \dot{z} \Big|_{t=t_0} = \frac{2 P_0 I}{3 m M_p} \quad (20)$$

$$z_0 \equiv z \Big|_{t=t_0} = \frac{I^2}{3 m M_p} \quad (21)$$

其中  $I = P_0 t_0$  是矩形脉冲的冲量。在驻定塑性铰  $s = s_0$  处的转角则为

$$\theta_0 = \frac{z_0}{s_0} = \frac{P_0 I^2}{9 m M_p^2} \quad (22)$$

2)  $t > t_0$  时, (18) 式给出

$$s = s(t) = \frac{3 M_p t}{I} \quad (23)$$

因而这个移行铰的移行速度为

$$v_h = \dot{s} = 3 M_p / I = \text{const} \quad (24)$$

这表明这个铰的移行速度是常数, 且反比于输入的冲量  $I$ 。移行铰到达根部的时间是

$$t = t_r = t_0 + \frac{L - s_0}{v_h} = \frac{IL}{3 M_p} \quad (25)$$

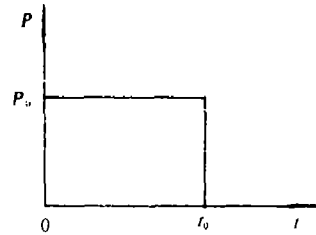


图 5

Fig. 5

在  $t = t_r$  时自由端的速度按 (16) 式决定为

$$\dot{z}_r \equiv \dot{z} \Big|_{t=t_r} = \frac{2I}{mL} \quad (26)$$

因而此时全梁具有的动能为

$$E_r \equiv E \Big|_{t=t_r} = \int_0^L \frac{1}{2} m \left( \dot{z}_r \cdot \frac{x}{L} \right)^2 dx = \frac{2I^2}{3mL} \quad (27)$$

当  $t \geq t_r$  时, 动能  $E_r$  将完全在悬臂梁根部的驻定铰上耗散掉, 因此可从能量平衡  $M_p \theta_r = E_r$  算出根部的总转角

$$\theta_r = E_r / M_p = \frac{2I^2}{3mLM_p} \quad (28)$$

若将初始驻定塑性铰阶段 ( $0 \leq t < t_0$ )、移行铰阶段 ( $t_0 \leq t < t_r$ ) 和根部驻定铰阶段 ( $t \geq t_r$ ) 所耗散的能量分别记为  $E_1$ 、 $E_2$  和  $E_3$ , 而将总耗散能量记为  $E$ , 则从上述各式不难证明

$$\frac{E_1}{E} : \frac{E_2}{E} : \frac{E_3}{E} = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} \left( \frac{\bar{p}-1}{\bar{p}} \right) : \frac{2}{3\bar{p}} \quad (29)$$

其中  $\bar{p} = \frac{P_0 L}{3M_p}$  ( $\bar{p} > 1$ ) 是无量纲载荷。

小结 从 2 和 3 两节的讨论中看到:

- 1) 当动载荷保持为常值时, 铰是驻定不动的; 当动载荷发生变化时, 铰要发生移行、在卸除载荷时, 铰将向远离载荷作用点的方向移动。
- 2) 对于矩形脉冲情形, 铰的移行是匀速的, 直到铰到达梁的根部为止。
- 3) 利用 (16)~(18) 式, 不仅可以确定任一时刻的铰的位置, 也能确定任一时刻梁上的速度分布和能量耗散情况。

4) 由 (29) 式可见, 在初始驻定塑性铰上吸收的能量总是总输入能量的  $1/3$ , 这与载荷的强度和持续时间都无关;  $\bar{p}$  越大, 即动载越强, 则在移行铰上耗散的能量越多。

#### 4. 移行铰的一般特性

移行铰的概念最早是在 1952 年 Lee 和 Symonds<sup>[1]</sup> 分析自由梁的塑性动力响应时引入的。

如果在一个动力响应的解里存在移行铰, 它有些什么一般特性呢? 驻定铰会保持位移连续 (否则梁本身就破坏了), 但铰两侧的斜率会发生间断, 即相对转动。如果这种相对转动仅在一个无穷小的时间区间内发生, 这时虽有  $\dot{\theta}$  (角速度) 间断, 却没有  $\theta$  (转角或斜率) 的间断。在移行铰处正是如此。位移  $y$  和转角  $\theta$  都是连续的, 但产生  $\theta$  的弱间断, 即  $\dot{\theta}$  (角速度) 和  $\theta' = y''$  (曲率) 的间断。

为考察塑性铰处各力学量的间断特性, 设  $x_h$  为铰的坐标,  $x_h^+$  和  $x_h^-$  表示铰的两侧。铰两侧的位移分别为  $y^+ = y(x_h^+)$  和  $y^- = y(x_h^-)$ 。这些  $y$  值除直接随时间变化外, 还可能因铰的移行而受到影响。为清楚起见, 不妨把  $y$  看成是  $t$  的复合函数  $y = y(u, x_h)$ , 其中  $x_h$  和  $u$  都是  $t$  的函数, 且  $u \equiv t$ 。由铰两侧位移的连续性, 即  $y^+ \equiv y^-$  可知  $(y^+ - y^-)$  对时间的各阶导数均为零。于是, 对  $(y^+ - y^-)$  求一次全微商就有

$$0 = \frac{d}{dt} (y^+ - y^-) = \left( \frac{\partial y^+}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} - \frac{\partial y^-}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} \right) + \left( \frac{\partial y^+}{\partial x_h} \cdot \frac{dx_h}{dt} - \frac{\partial y^-}{\partial x_h} \cdot \frac{dx_h}{dt} \right)$$

注意  $\partial u / \partial t = 1$ , 而  $\partial x_h / \partial t = v_h$  为铰的移行速度, 故

$$[\dot{y}] + v_h [y'] = 0 \quad (30)$$

其中  $[f] = f^+ - f^-$  表示某一函数  $f$  在铰两侧之值的间断量。由 (30) 式, 对驻定铰有  $[\dot{y}] = 0$ ,  $v_h = 0$ , 因此可以有  $[y'] \neq 0$ , 即存在斜率间断。而对移行铰有  $[\dot{y}] = 0$ ,  $v_h \neq 0$ , 因此必有  $[y'] = 0$ , 即只要铰移行, 就不存在斜率间断。

类似的演绎和讨论还可得到

$$[\ddot{y}] + v_h [\dot{y}'] = 0 \quad (31)$$

$$[\dot{y}'] + v_h [y''] = 0 \quad (32)$$

从这二式中消去  $[\dot{y}']$  还得出

$$[\ddot{y}] = v_h^2 [y''] \quad (33)$$

小结 从上面的结果看到:

1) 塑性铰处的间断性质可以归纳为下表:

	移行速度 $v_h$	位 移 $y$	转角、斜率 $y' = \theta$	曲率 $y''$	速度 $\dot{y}$	角速度 $\dot{y}' = \dot{\theta}$	加速度 $\ddot{y}$
驻定铰	$= 0$	连续	间断	连续	连续	间断	连续
移行铰	$\neq 0$	连续	连续	间断	连续	间断	间断

2) 角速度  $\dot{\theta}$  的间断是塑性铰 (包括驻定铰和移行铰) 的本质特征。有  $|M| = M_p$ , 就有  $\dot{\theta} \neq 0$ , 这是由理想塑性材料的流动法则所决定的基本力学行为。

3) 无论是驻定铰还是移行铰, 铰处的间断值需要满足一些关系式, 如 (30)~(33) 式。这些关系式在求解问题时常很有用, 如下节我们就利用 (33) 式来求悬臂梁变形后的挠曲线形状。

### 5. 矩形脉冲作用后梁的挠曲形状

本节旨在第 3 节的基础上求梁的挠曲形状。当铰位于  $s(t)$  处时,  $AH$  段上的速度分布为

$$\dot{y} = \left(1 - \frac{\xi}{s}\right) \dot{z} \quad 0 \leq \xi \leq s \quad (34)$$

其中  $\xi$  为所考察的截面到自由端  $A$  的距离。因为  $S$  和  $\dot{z}$  都是  $t$  的函数, 要从 (34) 式直接积分出  $y = y(t)$  是很困难的。为避开这一困难, 可以利用 (33) 式, 转而用对空间的积分来求  $y$ 。

将 (34) 式对  $t$  微商一次, 得出加速度分布

$$\ddot{y} = \frac{\xi \dot{s} \dot{z}}{s^2} + \left(1 - \frac{\xi}{s}\right) \ddot{z} \quad (35)$$

由于在移行铰  $s = s(t)$  的前方 (左侧), 加速度和曲率都为零, 于是 (33) 式给出

$$y''|_{H-} = \frac{1}{v_h^2} \cdot \ddot{y}|_{H-} = \frac{1}{v_h^2} \cdot \frac{\dot{s} \dot{z}}{s} = \frac{\dot{z}}{s v_h} \quad (36)$$

在矩形脉冲情形, 只有  $t_0 < t < t_1$  时有移行铰, 这时用 (17)、(23)、(24) 式给出的  $\dot{z}$ 、 $s$ 、 $v_h$  代入 (36) 式, 得

$$y''|_{H_0} = \frac{2I^4}{27mM_p^3t^2} = \frac{2I^2}{3mM_p s^2} \quad (37)$$

对于梁上任一截面来说, 仅当移行铰通过它时, 它才获得(37)式给出的曲率; 所以, 当移行铰到达梁根部( $s=L, t=t_r$ )时, (37)式实际上就给出了全梁的曲率分布

$$y''(\xi) = \frac{2I^2}{3mM_p \xi^2} \quad s_0 < \xi \leq L \quad (38)$$

其中 $\xi$ 为从自由端量起的坐标。利用根部的固定端条件( $t=t_r$ 时刻)对(38)式积分得出

$$y(\xi) = \frac{2I^2}{3mM_p} \left( \ln \frac{L}{\xi} + \frac{\xi}{L} - 1 \right) \quad s_0 < \xi \leq L \quad (39)$$

注意此式仅描述 $t=t_r$ 时刻梁的 $BH_0$ 段的形状; 对 $AH_0$ 段, 要加上转角为 $\theta_0$ (见(22)式)的一个转动; 对整个梁, 还要加上转角为 $\theta_r$ (见(28)式)的一个转动。图6画出了梁在 $t=t_0, t=t_r$ 和运动终止时刻 $t_r$ 的大致形状。

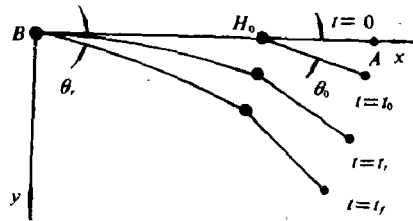


图 6

Fig. 6

### 三、承受突加载荷的梁的进一步分析

#### 1. 管道甩动问题及其分析

在核电站、常规电站和化工厂里, 常有许多管道用于输送高压、高速的液体。如果由于短时过载、地震或偶然事故, 一根管道的某处发生破裂, 那么因泄漏高压液体而产生的横向力会使断裂的管道获得很高的横向速度运动起来, 这种现象就称为管道甩动。由于发生甩动的管道可能打坏邻近的管道、容器或仪表, 造成连锁式的灾难, 所以近年来许多国家都开展了对管道甩动的研究, 并采取了各种限制甩动的措施来减少事故的危害。详细情况可参见文献[2]、[3]。

实验表明, 在管道破裂、甩动过程中作用于管道的推力接近于一个矩形脉冲, 所以前述对悬臂梁受突加载荷和矩形脉冲的分析完全可以用来估计铰区的位置、能量的分配以及最终的形状。例如 Salmon 和 Verma<sup>[4]</sup>采用这样的刚塑性模型分析了一个典型的管道——限制器系统。

#### 2. 曲梁的动力响应

以弯曲管道的甩动问题为工程背景, 余同希和 Johnson<sup>[5]</sup>首先研究了1/4圆弧悬臂曲梁端部承受面内突加载荷的问题。这时载荷作用在梁的弯曲平面内, 但可取任意方向; 因而梁截面上既有弯矩又有轴力, 在成铰条件中应考虑轴力的影响。研究结果表明, 成铰位置既与载荷大小有关, 也与载荷方向有关; 当载荷方向位于某些范围时, 铰只能生成在梁的根部。

如果曲梁端部突加载荷的方向与管道弯曲平面相垂直, 那么广义塑性铰是弯矩和扭矩联合作用



的结果。这一分析是由华云龙和余同希<sup>[6]</sup>给出的。他们采用的极限函数为

$$u \equiv \left( \frac{M}{M_p} \right)^2 + \left( \frac{T}{T_p} \right)^2 = 1 \quad (40)$$

其中  $T$  为扭矩， $T_p$  为塑性极限扭矩；进而要求

$$\begin{cases} \text{塑性铰处} & u = 1, \quad du/d\psi = 0, \quad d^2u/d\psi^2 \leq 0 \\ \text{刚性区内} & u < 1 \end{cases} \quad (41)$$

其中  $\psi$  为曲梁弧长对应的圆心角。

### 3. 变截面梁和阶梯梁的动力响应

前面讨论的都是等截面梁。对于承受突加载荷的变截面直梁，周青和余同希<sup>[7]</sup>指出，这时塑性铰的位置  $\xi$  应该由下式决定

$$u(x) \Big|_{x=\xi} = 0, \quad \frac{du}{dx} \Big|_{x=\xi} = 0, \quad \frac{d^2u}{dx^2} \Big|_{x=\xi} \leq 0 \quad (42)$$

其中  $u(x) \equiv M(x) - M_p(x)$ ， $M(x)$  是外力与惯性力引起的弯矩分布， $M_p(x)$  是梁截面的塑性极限弯矩，在变截面梁情形它随  $x$  变化。因而，在变截面梁情形，塑性铰处弯矩  $M(x)$  本身一般并不达到极值，此处的剪力  $Q(x) \Big|_{x=\xi} = dM/dx \Big|_{x=\xi}$  也不一定为零。

对于阶梯形截面梁和折梁对突加载荷的动力响应，华云龙和余同希曾作过仔细的分析，见文献 [8]。后来，他们又发现（见文献 [9]），在不少情况下这些梁中会出现双铰模式，也就是说同时出现两个驻定的塑性铰，其中之一通常处于截面突变处或梁的根部。在这些工作的基础上，杨嘉陵等人新近分析了带缺口或裂纹的梁的动力响应，为含缺陷结构的动力分析开辟了新路。

## 四、承受端部撞击的悬臂梁

### 1. 承受端部撞击的悬臂直梁（Parkes 问题）

1955 年 Parkes<sup>[10]</sup> 首先研究了悬臂直梁在自由端受到一个刚性物体撞击的问题。这个问题有两种等效的提法（参见图 7）。

(I) 一个以  $v_0$  运动的、质量为  $G$  的刚性物撞到梁的端点，然后附着在梁上一起运动；

(II) 悬臂梁的自由端原来附有集中质量  $G$ ，该处由于冲击载荷（即  $\delta$  函数型的脉冲载荷）的作用而获得速度  $v_0$ 。

由于在初始时刻，冲击载荷的量值为无穷大，因此从 (12) 式可知  $s = 0$ ，亦即在载荷作用点处形成塑性铰。当  $t > 0$  时，这个铰将向梁的根部方向移动，相当于矩形脉冲作用下梁的动力响应的第二阶段。在这个阶段，虽然外加载荷为零，但端部集中质量引起的惯性力仍作用在梁上，于是可取

$$P(t) = -G\ddot{z} \quad (43)$$

其中  $z = z(t)$  仍为梁端的位移。将 (43) 式代入前面的 (16) 式可得

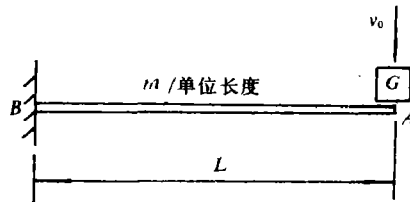


图 7

Fig. 7

1.  $m$  / Unit length.

$$ms\dot{z} = 2 \int_0^t (-G\ddot{z}) dt = 2G(v_0 - \dot{z})$$

其中  $v_0 = \dot{z}|_{t=0}$ 。若记  $v = \dot{z}(t)$ , 则可写出

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{m}{2G}s} \quad (44)$$

再由 (17) 式, 即  $ms^2v = 6M_P t$  可知

$$t = \frac{ms^2v}{6M_P} = \frac{mv_0}{6M_P} \cdot \frac{s^2}{(1 + \frac{m}{2G}s)} \quad (45)$$

此式给出了  $s-t$  函数关系, 再利用 (44) 式也就有了  $v-t$  函数关系。我们看到  $s(t)$ 、 $v(t)$  的变化情况主要取决于质量比  $G/mL$ 。

当  $s(t) = L$  时, 移行铰阶段结束, 余下的动能将在根部驻定塑性铰上耗尽。经过详尽的研究 (细节可参看文献 [11]), 发现:

1) 移行铰吸收的能量与初始总动能  $(1/2)Gv_0^2$  之比为

$$q = \frac{\beta(4+3\beta)}{3(1+\beta)^2} \quad \text{其中 } \beta \equiv mL/2G \quad (46)$$

因此, 受重而慢的撞击物撞击时,  $\beta \ll 1$ , 有  $q \ll 1$ , 即绝大部分能量将被梁根部吸收; 受轻而快的撞击物撞击时,  $\beta \gg 1$ , 有  $q \rightarrow 1$ , 即绝大部分能量在移行铰上吸收。

2) 梁的最终形状也强烈地依赖于质量比。若  $\beta \ll 1$ , 则梁基本上保持为直线形状, 只是绕根部发生刚体转动; 若  $\beta \gg 1$ , 则梁大体呈对数曲线, 越接近端部的地方曲率越大。这一理论预测也基本上得到了实验的支持。

## 2. 对 Parkes 问题的进一步研究

自 Parkes 之后, 人们发现把悬臂直梁受端部撞击的问题弄清楚对于求解复杂结构的动力响应问题助益极大, 因此在研究各种因素对结构动力响应的影晌时, 往往都从 Parkes 问题做起。上面介绍的基本分析, 假定了梁是由理想刚塑性材料制成的, 忽略了许多“二级因素”, 即塑性性质之外的影响因素。

1) 材料的应变率效应。众所周知, 某些材料 (为软钢) 的屈服应力随应变率的增加而提高,  $M_P$  值亦随  $K$  的增加而提高。T. C. T. Ting (丁启财) [12] 采用一种粘塑性的本构模型重新分析了 Parkes 问题, 发现这时不再有移行铰, 代替它的是一个逐渐向根部缩小的塑性区。

2) 几何大变形效应。若在动力响应过程中梁的挠度很大, 则应在瞬时构形而不是在初始构形上建立几何关系和运动方程。对 Parkes 问题的大变形分析也是 Ting [13] 首先做的。

3) 材料的强化效应。Stronge 和余同希最近的工作 [14] 给出了材料线性强化或线性弱化时悬臂梁受端部撞击问题的解。应变率效应、几何大变形效应和强化效应, 这三者都增强梁对动载的承受能力, 考虑这些效应算出的梁的挠度比 Parkes 原始分析为小, 也更符合实验。

4) 弹性效应。Symonds 曾经指出, 仅当输入的总能量比结构所能贮存的弹性能大得多时, 刚塑性理想化带来的误差才是足够小的。如果不是如此, 显然很有必要考虑弹性效应。1980年以来, 先后有 Symonds 和 Fleming [15], Reid 和 Gui [16] 采用 ABAQUS 大型非线性有限元程序计算了悬臂直梁在端部撞击下的弹塑性动力响应, 并与实验、与 Parkes 的刚塑性解作了比较。Reid 等

人发现, 由于弹性前驱波在梁根部固定端反射回来与入射的塑性扰动发生相互作用, 延缓了塑性扰动 (相应于刚塑性分析中的移行铰) 向根部的移动, 并在梁的中部造成一个高曲率区 (这有一定实验依据)。尽管这些数值分析对我们理解实际动力响应很有帮助, 但如何用解析方法来计入弹性效应还是一个未解决的问题。

5) 其它二级效应, 如剪力效应、轴力效应、转动惯量效应等, 也都有人考虑过, 但大都结合两端支承 (简支或固支) 的梁的动力响应来分析。在悬臂梁中, 这些效应一般较弱。最近还有人在研究, 如果撞击物本身的尺度不可忽略 (因而绕自身的质心有一定转动惯量), 对 Parkes 解有什么影响。

### 3. 承受端部撞击的悬臂曲梁

作为对 Parkes 问题的一个延拓, 余同希、Symonds 和 Johnson<sup>[17,18]</sup> 研究了 1/4 圆弧臂曲梁受到端部撞击时的动力响应, 对刚塑性解和弹塑性有限元解作了比较。与 Parkes 问题的一个重要不同是: 即使  $\beta = mR/2G \rightarrow 0$  (即撞击物极重), 也并非根部耗散全部能量, 初始动能至少有 1/2 消耗在曲梁中的移行铰上。

在上述工作的基础上, 张铁光等人对同一问题进行了刚塑性大变形分析<sup>[19]</sup> 以及实验<sup>[20]</sup>, 同样揭示了曲梁不同于直梁的许多特性, 图 8 给出了受撞击曲梁最终形状的计算结果, 其中虚线是小变形分析结果, 实线是大变形分析结果。从中也看到质量比  $G/mR$  的影响。

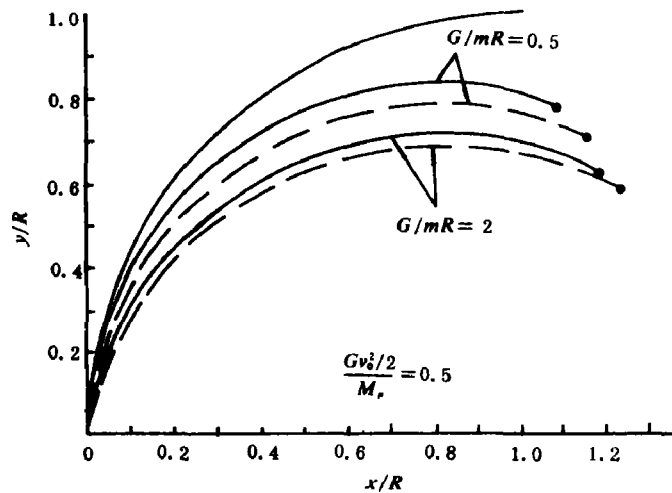


图 8

Fig. 8

### 参 考 文 献

- [1] Lee, E.H., Symonds, P.S., *J. Appl. Mech.*, 74 (1952), 308.
- [2] 余同希, 华云龙, 压力容器, 3(1) (1986), 70.
- [3] 华云龙, 余同希, 计算结构力学及其应用, 5(1) (1988), 105.
- [4] Salmon, M.A., Verma, V., *J. Eng. Mech.*, 102, EM3, (1976), 415.
- [5] Yu, T.X. (余同希), Johnson, W., The location of the plastic hinge in a quadrantal circular curved beam struck in its plane by a jet at its tip, *Advances in Aerospace Structures and*

- Materials-1 (Ed. S. S. Wang and W. J. Renton), ASME, (1981), 175.
- [6] Yu, T. X. (余同希), Hua, Y. L. (华云龙), Johnson, W., *Int. J. Impact. Engng.*, **3** (1985), 143.
- [7] 周宵、余同希, 爆炸与冲击, **7** (4) (1987), 311.
- [8] Hua, Y. L., Yu, T. X., Johnson, W., *Int. J. Impact. Engng.*, **3** (1985), 233.
- [9] Hua, Y. L., Yu, T. X., Reid, S. R., *Int. J. Impact. Engng.*, **7** (1988), 401.
- [10] Parkes, E. W., The permanent deformation of a cantilever struck transversely at its tip, *Proc. R. Soc.*, **A228**, (1955), 462.
- [11] Johnson, W., *Impact strength of Materials*, Edward Arnold, London, (1972).
- [12] Ting, T. C. T., *J. Appl. Mech.*, **31** (1964), 38.
- [13] Ting, T. C. T., *J. Appl. Mech.*, **32** (1965), 295.
- [14] Stronge, W. J., Yu, T. X., Dynamic plastic deformation in strain-hardening and strain-softening cantilevers, to be published in *Int. J. Solids Struct.*
- [15] Symonds P. S., Fleming, W. T., *Int. J. Impact Engng.*, **2** (1984), 1.
- [16] Reid S. R., Gui, X. G., *Int. J. Impact Engng.*, **5** (1987), 109.
- [17] Yu, T. X., Symonds, P. S., Johnson, W., A quadrantal circular beam subjected to radial impact in its own plane at its tip by a rigid mass, *Proc. R. Soc.*, **A 400** (1985), 19.
- [18] Yu, T. X., Symonds, P. S., Johnson, W., *Int. J. Impact Engng.*, **4** (1986), 221.
- [19] Zhang T. G., (张铁光) Yu, T. X., *Int. J. Impact Engng.*, **4** (1986), 229.
- [20] Zhang, T. G., Zhao, L. M., Liang, C., Yu, T. X., *Acta Mechanica Solida Sinica(English Edition)*, **1** (1988), 301.

## DYNAMIC PLASTIC RESPONSE OF STRUCTURES: PART I

Yu Tongxi

(Department of Mechanics, Peking University)