第10卷 第3期　　爆 炸 与 冲 击　　Vol.10, No.3
1990年7月　　EXPLOSION AND SHOCK WAVES　　Jul., 1990

热点起爆理论的近似分枝点分析

章冠人
（流体物理研究所）

摘要　本文用变分法对热点起爆理论进行了分枝点分析，并不是建立在热平衡条件的基础上，所以比较普遍。

关键词　热点起爆　分枝点分析

一、引　　言

炸药的热点起爆理论是炸药热起爆的基础。其基本思想和方法是物理上的热传导和能量守恒。一方面发生化学反应产生热量，另一方面由热传导耗损热量。对一个热点来说两者处于竞争的地位，看那一方占优势，就决定了爆炸还是熄灭。所以温度和时间的关系存在两个分枝：一个分枝趋于爆炸，另一个分枝则趋于熄灭。因而热点起爆理论是一种分枝现象[1-4]。

分枝是现代物理新发展的一种新概念，已经开始应用于其它学科，例如非线性带化学反应的扩散方程和生物科学等问题。早在一百多年以前，热爆炸理论已在分枝点分析方面做了不少先驱性工作，不过均属定性方面。本文的目的就是应用热爆炸理论进行分枝点分析。

二、问题的提出

为了更广泛起见，对热爆炸理论中的化学反应项不给定具体的函数，而只对函数性质加一些限制。我们所提出的热点起爆过程遵守下列抛物型方程

$$\partial u/\partial t=\nabla^2 u+\delta f(u)\ ;\qquad x\in D,\ t>0 \tag{1}$$

初始条件和边界条件为

$$\begin{aligned} &u(x,\ 0)=u_0(x)\ , && x\in D \\ &(\partial u/\partial n)+\beta u=0\ , && x\in\delta D,\ t>0 \end{aligned} \tag{2}$$

式中u为无量纲温度，δ为一参量，D为热点范围，具有边界∂D，$0<\beta(x)\leqslant\infty$，函数$f(u)$为无量纲热源函数，是光滑的，$f(u)$，$f'(u)$，$f''(u)>0$对所有的$u$，$f$是一正的逐渐增加的凹函数。

热起爆问题是这样一个问题，当式(1)和式(2)在D中某点x，在有限时间内有无穷大解时，就称为起爆。问题在于在什么δ值和初始值u_0的情况下，存在无穷大解。

本文要证明的有两点：

(1) 证明当$\delta>\delta^*$时，方程(1)和(2)的解在有限时间内可以达到无穷大，不管$u_0(x)$是多少。

(2) 如$\delta\leqslant\delta^*$时，估计$u_0(x)$的下限，当超过此下限时，u可在有限时间内趋向无穷大。其中δ^*为稳态问题

1988年12月13日收到原稿，1989年11月18日收到修改稿。

$$\nabla^2 u^* + \delta^* f(u^*) = 0\ , \qquad x \in D \tag{3}$$

$$(\partial u^*/\partial n) + \beta u^* = 0\ , \qquad x \in \partial D \tag{4}$$

的参量。

三、对f(u)的限制

一般在炸药热起爆问题中$f(u)$取Arrhenius定律$\exp(-E/RT)$。在作用能E很大时，Frank-kamenetskii近似为$\exp(-E/RT_a)\exp u$，T_a为周围温度，$T=T_a[(1+RT_a u)/E]$。这里对$f(u)$的要求除渐增的凹函数外，还要求

$$\int_b^{\infty} \frac{ds}{f(s)} < \infty \tag{5}$$

b 为有限的。证明如下

从式（1）

$$\partial u/\partial t = \nabla^2 u + \delta f(u) \tag{6}$$

两边乘以u对dV积分

$$\int_D [u\nabla^2 u + \delta u f(u)]dV = \frac{1}{2}\int_D \frac{\partial u^2}{\partial t} dV \tag{7}$$

应用格林定律于式（7）左边第一项，有

$$\int_D u\nabla^2 u dV = \int_{\partial D} u\nabla u \cdot \vec{ds} - \int (\nabla u)^2 dV \tag{8}$$

用边界条件式（2）代入式（8），得

$$\int_D u\nabla^2 u dV = -\int_{\partial D} \beta u^2 ds - \int_D (\nabla u)^2 dV \tag{9}$$

由于u总为正，故$\nabla^2 u$总为负，它表示热流损失。因此在式（6）中$u_0(x)$是如此大以致可忽略$\nabla^2 u$项时，可得u的下限为下列方程之解

$$(du_m/dt) = \delta f(u_m)\ , \qquad t > 0 \tag{10}$$

$$u_m(0) = \mathrm{Inf}\, u_0(x) = u_{0m}\ , \qquad x \leqslant D$$

式（10）的解为

$$\delta t = \int_{u_{0m}}^{u_m} \frac{ds}{f(s)} = \int_{u_{0m}}^{\infty} \frac{ds}{f(s)} < \infty \tag{11}$$

式中u_{0m}是有限的值b，这就证明了式（5）和上节中的（2）点。下面用分枝点分析来证明其余部分。

四、过程的分枝点分析

令式（7）的右边等于W，则

$$W = \int_D [u\nabla^2 u + \delta u f(u)]dV \tag{12}$$

由于δ是温度u和热点大小的函数，如从平衡态$u^*(r_0, W^*)$出发，稍稍改变一下热点的边界，看其温度和W^*发生什么样的变化，即是所谓变分方法。令

$$\begin{aligned} r &= r_0 + \varepsilon r_1 \\ u &= u^* + \varepsilon u_1 \\ W &= W^* + \varepsilon W_1 + \varepsilon^2 W_2 \\ \delta &= \delta^* + \varepsilon \delta_1 \end{aligned} \tag{13}$$

带"*"表示稳态问题的解，故$W^*=0$。

应用格林定律将式（9）代入式（12），得

$$W = -\int_{\partial D} \beta u^2 ds + \int_D [-(\nabla u)^2 + \delta u f(u)] dV \tag{14}$$

然后用式(13)代入 式（14），按ε阶次分别列出等式到二阶项为止，得零阶项为

$$W^* = -\int_{\partial D} \beta (u^*)^2 ds + \int_D [-(\nabla u^*)^2 + \delta u^* f(u^*)] dV = 0 \tag{15}$$

由于δ 为常数，因此可得

$$\delta = \frac{\int_{\partial D} \beta (u^*)^2 ds + \int_D (\nabla u^*)^2 dV}{\int_D u^* f(u^*) dV} \tag{16}$$

对式（16）右边分子式应用格林公式（9），得

$$\delta = \frac{-\int_D u^* \nabla^2 u^* dV}{\int_D u^* f(u^*) dV} \tag{17}$$

用式（3）代入上式，分子分母去掉公共积分后，可得

$$\delta = \delta^* \tag{18}$$

这表示零阶项的确是平衡状态。

一阶项如忽略 $\nabla^2 u_1$ 项，可得

$$\begin{aligned} W_1 = &\int_{\partial D} [u^* \nabla^2 u^* + \delta u^* f(u^*)] (\vec{n} \cdot \vec{r}_1) ds \\ &+ \int_D u_1 \{\nabla^2 u^* + \delta [f(u^*) + u^* f'(u^*)]\} dV \end{aligned} \tag{19}$$

式中第一项为对边界的展开，第二项为对u 的展开。$\vec{n}$ 为界面的法线方向单位矢量。其中忽略 $\nabla^2 u_1$，是由于u_1在空间分布是光滑的热传导方程，在式（19）中比起其它项为二阶高次项，因而可以忽略。在平衡状态时，W_1 应该等于零。应用条件（3）代入式（19），可得

$$W_1 = \int_D u_1 u^* f'(u^*) dV = 0 \tag{20}$$

由于u 恒为正，$f'(u)$恒大于零，且为单调函数。要使式（20）积分为零，只有$u_1 \equiv 0$ 方有可能，否则不能满足$W_1=0$ 的要求。稍稍改变一下热点的边界，温度的一阶变化项各处等于零，这表示温度在平衡点附近变化是平缓的，所以从一阶项无法看出温度变化的趋势。

变分后的二阶项为

$$W_2 = \int_{\partial D} u_0 [\nabla^2 u_0 + \delta f(u_0)] k (\vec{n} \cdot \vec{r})^2 ds + \int_{\partial D} u_1 [\nabla^2 u_0$$

$$+\delta f(u_0))](\vec{r}\cdot\vec{n})ds+\int_{\partial D}u_0[\nabla^2 u_1+\delta f'(u_1)u_1](\vec{r}\cdot\vec{n})ds$$

$$+\frac{1}{2}\int_D\{u_0 f''(u_0)u_1^2+u_1[\nabla^2 u_1+\delta f'(u_0)]\}dV \tag{21}$$

式中k为界面的曲率。在平衡点由于$u_1\equiv 0$，忽略$\nabla^2 u_1$项和$f''(u_0)u_1^2$项，因而（21）式变为

$$W_2=\int_{\partial D}u_0[\nabla^2 u_0+\delta f(u_0)]k(\vec{n}\cdot\vec{r}_1)^2 ds \tag{22}$$

式中$u_0=u^*$。由于界面曲率k在含能介质有限大小情况下，总是正的。由此式可以看出，从平衡状态出发，W_2的正负决定于

$$\begin{aligned}\delta>\delta^* ;\quad & W_2>0\\ \delta=\delta^* ;\quad & W_2=0\\ \delta<\delta^* ;\quad & W_2<0\end{aligned} \tag{23}$$

由于

$$W=\frac{1}{2}\int_D\frac{\partial u^2}{\partial t}dV \tag{24}$$

W是u的泛函，W_2的大小决定于温度u。从（23）式可以看出，从平衡点开始，温度时间曲线分为三枝，$W_2>0$为上升枝；$W_2<0$为下降枝；$W_2=0$为平衡枝，这是由于u恒为正值，在下降枝上，意味着W为负，这表示温度u值随时间减小，这就意味着熄灭的情况；反之，当$W_2>0$时，意味着温度随时间上升，如在初始时刻，热点内的温度分布的最小值$u_{0\min}$

$$u_{0\min}=\mathrm{Inf}\,u_0(x)>u_{0m}^*=b \tag{25}$$

则由（11）式可见在有限时间内，温度可以升到无穷大而发生爆炸，式中u_{0m}^*为平衡状态时热点内的最低温度。

到此我们用变分方法近似证明了热点起爆的分枝理论，并未建立在稳态的基础上而只是应用了平衡点作为参考点，所以是比较普遍的证明。但是在证明中用了一些近似，更严格的证明将在以后发表。

秦承森同志在审阅本文时，提出了很多宝贵的意见并纠正了一些错误，谨表示衷心感谢。

参 考 文 献

[1] Франк-Каменецкий, Д. А., Диффузия и Теплопередача в Химической Кинетике, *Наука*, (1967).

[2] Merzhanov. A. G., *Combustion and Flame*, (10), (1966), 340.

[3] Morse, R. M. and Feshbach, H., Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill, Vol. 2. Chap. 9, New York (1953), 1106.

[4] Lacey, A. A., *SIAM J. Appl. Math.*, 43 (6), (1983), 1350.

BIFURCATION ANALYSIS OF THE APPROXIMATE THEORY OF HOT SPOT INITIATION OF EXPLOSIVES

Zhang Guanren

(Institute of Fluid Physics)

ABSTRACT Theory of the hot spot initiation of explosives is a nonlinear theory. Obviously, the initiation and decay of detonation are bifurcation of the process. In the usual proof of the theory, it is on the basis of equilibrium state. In this paper, contrasted with the equilibrium state, by the variational method, the author proves the bifurcation property of the hot spot initiation process approximately. This proof is more general than the equilibrium state case.

KEY WORDS hot spot initiation, bifurcation analysis.