

# 硬化材料中弹塑性柱面波的数值方法\*

王肖钧 胡秀章 李永池

(中国科学技术大学)

**摘要** 本文讨论了应变硬化材料中一种适宜于数值计算的增量型塑性应力应变关系, 并以弹塑性柱面波的传播为例进行了数值分析, 给出了一些有意义的结果。

**关键词** 弹塑性波 柱面波 数值计算

## 一、引言

弹塑性波传播的研究在国防工业, 航空航天事业以及受冲击载荷作用的动态响应问题里都有重要的价值。求解弹塑性波传播问题的困难在于: 非线性弹塑性本构关系的引入使得数学上求解波动方程的难度大大增加。虽然在一些特殊问题里(例如一维应力问题)有过一些弹塑性波的解析解或近似解<sup>[1][2]</sup>, 但是在更一般的情形里还无法获得这种解。数值方法, 作为一种精度较高的近似方法, 是目前解弹塑性波问题的重要手段。由此发展了不少计算波动问题的计算机程序<sup>[3][4][5]</sup>。

在很多计算流体弹塑性流动的程序里, 弹塑性本构关系的处理都采用所谓一级近似法<sup>[6]</sup>。这是一种以 Von Mises 屈服准则为基础, 仅适用于完全理想塑性体的数值近似方法。它从增量型线弹性本构关系出发计算应力状态, 当应力状态  $A$  点在  $\Delta t$  时间间隔内由弹性状态变形到  $B$  点时(见图 1), 最终的应力状态应该落在将  $B$  点沿与屈服面  $f = 0$  相垂直的方向“拉回”到屈服面的  $C$  点上。数学上这一过程可以表示成

$$s_{ij} = \begin{cases} s_{ij} & \text{弹性 } f < 0 \\ \frac{k_0}{\sqrt{J_2}} s_{ij} & \text{塑性 } f \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中  $s_{ij}$  为应力偏量,  $J_2 = (1/2)s_{ij}s_{ij}$  表示应力张量第二不变量。(1)式右边的  $s_{ij}$  表示由增量型线弹性本构关系求出的偏应力, 左边  $s_{ij}$  为调整后的偏应力,  $k_0 = (2/3)\sigma_0$ ,  $\sigma_0$  表示简单拉伸中的屈服应力。当计及硬化效应时, 计算的基本思想相同。只是将屈服面看成加载面, 它随塑性变形发展而向外扩展。此时  $k_0$  被取成塑性功  $W_p$  的函数  $k(W_p)$ 。这种处理方法对于硬化材料是否合适还没有经过严格的证明。

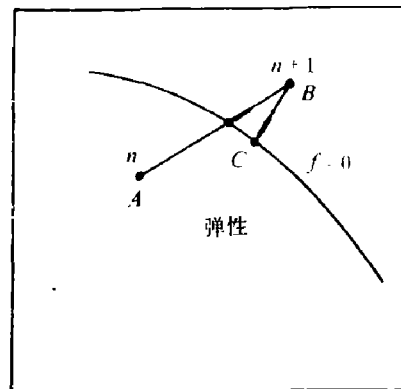


图 1  
Fig. 1

\*本文属国家自然科学基金资助项目。

1990年9月5日收到原稿, 12月3日收到修改稿。

本文从弹塑性基本关系出发导出一般情形下硬化材料中增量型弹塑性应力应变关系, 并用来计算弹塑性柱面波的传播。虽然算例是以线性硬化体为研究对象, 但本文的结果适用于更普遍的问题。

## 二、增量型弹塑性本构关系

在弹塑性流动计算里我们常用速度应变或者应变率张量  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  描述变形场,

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2)$$

式中  $x_i$  表示空间坐标分量,  $u_i$  为该方向上的速度分量。“·”表示对时间的导数, 应变率  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  可以分解为体积应变率  $\dot{\varepsilon}_v$  和偏应变率  $\dot{e}_{ij}$  之和

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_v \delta_{ij} + \dot{e}_{ij}, \quad (\dot{\varepsilon}_v = \frac{\dot{v}}{v}, \quad \varepsilon_v = \ln \frac{v}{v_0}, \quad v_0 \text{ 和 } v \text{ 分别为初始和瞬时比容。}) \quad (3)$$

根据流体弹塑性模型的基本思想, 体积变形  $\varepsilon_v$  仅仅与静水压  $P$  有关

$$P = P(\varepsilon_v) \quad (4)$$

形状变形  $e_{ij}$  中的弹性增量部分服从线性胡克定律

$$ds_{ij} = 2Gde_{ij}^e \quad (5)$$

应变增量  $de_{ij}$  由弹性部分  $de_{ij}^e$  和塑性部分  $de_{ij}^p$  组成

$$de_{ij} = de_{ij}^e + de_{ij}^p \quad (6)$$

因此 (5) 式又可写成

$$ds_{ij} = 2G(de_{ij} - de_{ij}^p) \quad (7)$$

(7) 式要比 (5) 式有用, 这是因为弹性应变增量  $de_{ij}^e$  在塑性变形过程中很难直接求出。然而塑性应变增量  $de_{ij}^p$  却可由 Drucker 公设<sup>[7]</sup>导出

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (8)$$

式中  $d\lambda$  是待定的标量函数 ( $d\lambda \geq 0$ )。在相关流动法则里,  $f$  表示应力空间中的加载面或者后继屈服面。 $d\varepsilon_{ij}^p$  表示塑性应变增量。根据塑性力学里的基本假定:  $d\varepsilon_{ij}^p = de_{ij}^p$ ,  $f$  与静水压  $P$  无关。故 (8) 式又可写作

$$de_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} \quad (9)$$

忽略应变率效应后, 一般形式的加载函数  $f$  为

$$f(s_{ij}, e_{ij}^p, k) = 0 \quad (10)$$

这里  $k$  为硬化参数, 它通常被表示成塑性功  $W_p$  的函数  $k(W_p)$

$$W_p = \int \sigma_{ij} ds_{ij} = \int s_{ij} de_{ij}^p \quad (11)$$

为了将各向同性硬化效应和随动硬化效应同时予以考虑, 我们以某种内插法将 Mises 屈服准则下的加载函数  $f$  表示成

$$f = \frac{3}{2} \{s_{ij} - (1-a)\beta_{ij}\} \{s_{ij} - (1-a)\beta_{ij}\} - k^2(aW_p) = 0 \quad (12)$$

其中  $\beta_{ij}$  是塑性应变  $e_{ij}^p$  的函数，它们的不同选取将代表不同特点的随动硬化性质，如同函数  $k$  的不同选取将代表不同特点的各向同性硬化性质一样。 $\alpha$  是本构关系选择开关： $\alpha = 0$  时，(12) 代表随动硬化体； $\alpha = 1$  时，(12) 式为各向同性硬化材料； $0 < \alpha < 1$  时，(12) 式则代表各向同性硬化 - 随动硬化的联合模型。

由 (12) 式对  $\sigma_{ij}$  求偏导数，得

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = 3\{s_{ij} - (1 - \alpha)\beta_{ij}\} \quad (13)$$

代入 (9) 式可得塑性应变增量  $de_{ij}^p$

$$de_{ij}^p = 3d\lambda\{s_{ij} - (1 - \alpha)\beta_{ij}\} \quad (14)$$

对 (12) 式作全微分，有

$$df = 3g_{ij}\{ds_{ij} - (1 - \alpha)C_{ijkl}de_{kl}^p\} - 2kk'de_{ij}^p = 0 \quad (15)$$

其中

$$k' = dk/dW^p, \quad g_{ij} = \{s_{ij} - (1 - \alpha)\beta_{ij}\}, \quad C_{ijkl} = \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial e_{kl}^p} \quad (15')$$

将 (7)、(14) 式代入上式，并注意到 (12) 式，整理后可得待定的标量函数  $d\lambda$

$$d\lambda = \frac{Gg_{ij}de_{ij}}{2Gk^2 + \frac{3}{2}(1 - \alpha)C_{ijkl}g_{ij}g_{kl} + kk'g_{ij}s_{ij}} \quad (16)$$

于是由 (14) 式（在适当整调哑标后）可得塑性应变增量

$$de_{ij}^p = \frac{3Gg_{ij}g_{kl}de_{kl}}{2Gk^2 + \frac{3}{2}(1 - \alpha)C_{mnlk}g_{mn}g_{kl} + kk'g_{kl}s_{kl}} \quad (17)$$

由 (7) 式得偏应力增量  $ds_{ij}$

$$ds_{ij} = 2G \left[ de_{ij} - \frac{3Gg_{ij}g_{kl}de_{kl}}{2Gk^2 + \frac{3}{2}(1 - \alpha)C_{mnlk}g_{mn}g_{kl} + kk'g_{kl}s_{kl}} \right] \quad (18)$$

(16)、(17) 和 (18) 式说明，在塑性变形的任一微过程中， $d\lambda$ 、 $de_{ij}^p$  以及偏应力增量  $ds_{ij}$  可以由当时状态（即  $s_{ij}$ 、 $e_{ij}^p$ 、 $W^p$ ）和微过程中的偏应变增量  $de_{ij}$  求出来。这对动力学问题应用起来是方便的。

我们指出，上述结果不但适用于稳定材料，也适用于应变软化时的非稳定材料。事实上只要以 Drucker 公设的修正表述为基础建立正交法，则并进行类似的推导即可<sup>[8]</sup>。虽然处于一维应力状态下的软化或理想塑性材料杆中，应力扰动无法传播出去，但在复杂应力状态下软化材料中却可以存在弹塑性波的传播。下一节的算例也说明了这一点。我们同时还指出，上述的推理思想对静水压影响屈服的情况也是适用的<sup>[8]</sup>。

(12) 包含了较一般的非线性随动硬化效应。最常用的非线性随动硬化模型是取  $\beta_{ij} = C(e_{ij}^p)e_{ij}^p$ ，即加载面的中心沿塑性应变  $e_{ij}^p$  方向移动。此时，象函数  $k$  一样，函数  $C$  也可由材料在一维应力下的应力应变曲线确定出来。特别，当选取线性硬化模型时， $C$  将是常数， $C$  和  $k$  都有着简单的表达式，即

$$C = \frac{2}{3} \frac{E \cdot E_p}{(E - E_p)} \quad (19)$$

$$k(aW_p) = [\sigma_s^2 + 3aCW_p]^{1/2} \quad (20)$$

其中  $E$  和  $E_p$  分别为材料在简单拉伸时的杨氏模量和硬化模量。此时公式 (16)、(17) 和 (18) 分别为

$$d\lambda = \frac{G\{s_{ij} - (1-a)Ce_{ij}^p\}de_{ij}}{\{2G + (1-a)C\}k^2 + kk'\{s_{ij} - (1-a)Ce_{ij}^p\}s_{ij}} \quad (16)'$$

$$de_{ij}^p = \frac{3G\{s_{kl} - (1-a)Ce_{kl}^p\}de_{kl}}{\{2G + (1-a)C\}k^2 + kk'\{s_{ij} - (1-a)Ce_{ij}^p\}s_{kl}} \{s_{ij} - (1-a)Ce_{ij}^p\} \quad (17)'$$

$$ds_{ij} = 2G \left\{ de_{ij} - \frac{3G\{s_{kl} - (1-a)Ce_{kl}^p\}de_{kl}}{\{2G + (1-a)C\}k^2 + kk'\{s_{kl} - (1-a)Ce_{kl}^p\}s_{kl}} \right. \\ \left. \{s_{ij} - (1-a)Ce_{ij}^p\} \right\} \quad (18)'$$

### 三、弹塑性柱面波的控制方程和计算流程

我们以柱面弹塑性波数值分析来说明上节本构关系的应用。忽略强间断波通过后的熵增，Lagrange 坐标下弹塑性柱面波的基本方程是

$$\text{质量守恒} \quad \rho_0 R dR = \rho r dr \quad (21)$$

$$\text{动量守恒} \quad \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial [-(p+q) + s_r]}{\partial R} + \frac{s_r - s_\theta}{R} \quad (22)$$

$$\text{速度定义} \quad u = \frac{\partial r}{\partial t} \quad (23)$$

$$\text{人工粘性} \quad q = \begin{cases} b^2 \rho (\Delta u)^2 & \frac{\partial u}{\partial R} < 0 \\ 0 & \frac{\partial u}{\partial R} \geq 0 \end{cases} \quad (24)$$

式中  $R$  表示径向 Lagrange 坐标,  $r$  为 Euler 坐标,  $u$  表示径向速度。  $\rho$  和  $\rho_0$  为瞬时和初始密度。人工粘性  $q$  用以平滑强间断引起的数值噪音。  $b$  是人工粘性系数。

在柱对称问题中应变率  $\dot{\epsilon}_{ij}$  简化为

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_r = \frac{\partial u}{\partial r} \\ \dot{\epsilon}_\theta = \frac{u}{r} \\ \dot{\epsilon}_z = 0 \end{cases} \quad (25)$$

于是体积应变率  $\dot{\epsilon}_v$  为

$$\dot{\epsilon}_v = \frac{1}{3} (\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta) \quad (26)$$

由此可得偏应变率或偏应变增量

$$\begin{cases} de_r = (\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_v) dt \\ de_\theta = (\dot{\varepsilon}_\theta - \dot{\varepsilon}_v) dt \\ de_z = -\dot{\varepsilon}_v dt \end{cases} \quad (27)$$

对于弹性加载或塑性变形后的弹性卸载 ( $d\lambda < 0$ ), 由胡克定律计算偏应力增量

$$\begin{cases} ds_r = 2Gde_r \\ ds_\theta = 2Gde_\theta \\ ds_z = 2Gde_z \end{cases} \quad (28)$$

对于塑性加载或中性变载 ( $d\lambda \geq 0$ ), 则由 (14) 式和 (7) 式 (或者 (17)、(18) 式) 计算塑性应变增量与偏应力增量

$$\begin{cases} de_r^p = 3 \cdot d\lambda \{s_r - (1-a)Ce_r^p\} \\ de_\theta^p = 3 \cdot d\lambda \{s_\theta - (1-a)Ce_\theta^p\} \\ de_z^p = 3 \cdot d\lambda \{s_z - (1-a)Ce_z^p\} \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{cases} ds_r = 2G(de_r - de_r^p) \\ ds_\theta = 2G(de_\theta - de_\theta^p) \\ ds_z = 2G(de_z - de_z^p) \end{cases} \quad (30)$$

式中  $d\lambda$  由 (16) 式确定。

静水压  $P$  则由流体型状态方程 (4) 式直接计算。

采用具有二阶精度的显式中心差分<sup>[9]</sup>对上述控制方程和本构关系进行离散, 得到一组完整的差分方程组。整个数值计算的流程如下:

- (i) 由动量守恒方程 (22) 式计算  $n+(1/2)$  时间层次上的径向速度  $u_r^{n+1/2}$ 。
  - (ii) 由速度定义 (23) 式计算新时间层 ( $n+1$ ) 上的空间坐标  $r^{n+1} = r^n + u_r^{n+1/2} \cdot \Delta t$ 。
  - (iii) 由质量守恒方程 (21) 式计算密度  $\rho^{n+1}$ 。
  - (iv) 由 (24) 式计算  $n+1$  时间层上的人工粘性  $q^{n+1}$ 。
  - (v) 由 (25)、(26) 两式计算  $n+1/2$  层上的应变率  $\dot{\varepsilon}_r, \dot{\varepsilon}_\theta, \dot{\varepsilon}_z, \dot{\varepsilon}_v$ , 并由此求出  $\Delta t$  时间间隔内的应变增量  $de_r, de_\theta, de_z, d\varepsilon_v$  (见 (27) 式)。
  - (vi) 由弹塑性本构关系计算偏应力增量  $ds_r, ds_\theta, ds_z$ 。
  - (A) 若  $n$  时刻处于弹性状态, 则由 (28) 式计算应力增量并求出  $n+1$  时刻应力  $s_r^{n+1}, s_\theta^{n+1}, s_z^{n+1}$ 。用 Mises 准则 (12) 式判别  $n+1$  时刻的弹塑性状态。 $f \leq 0$  表示弹性加卸载, 应力增量计算完毕。 $f > 0$  表示材料进入塑性并发生了塑性变形。通过中间过程调整  $s_r^{n+1}, s_\theta^{n+1}, s_z^{n+1}$ , 使得  $f = 0$ 。同时按 (B) 中类似方法计算塑性应变增量  $de_r^p, de_\theta^p, de_z^p$  和塑性功增量  $dW_p$ 。
  - (B) 若  $n$  时刻处于塑性状态, 则首先由 (16) 式计算  $d\lambda$ 。 $d\lambda < 0$  表示弹性卸载, 按 (28) 式计算应力增量。 $d\lambda \geq 0$  表示塑性加载或中性变载, 则由 (29)、(30) 式计算塑性应变增量和偏应力增量, 并求出相应的塑性功增量。
- 最后计算  $n+1$  时刻的塑性应变  $(e_r^p)^{n+1}, (e_\theta^p)^{n+1}, (e_z^p)^{n+1}$ , 偏应力  $s_r^{n+1}, s_\theta^{n+1}, s_z^{n+1}$  以及塑性功  $W_p^{n+1}$ 。

- (vii) 计算体积应变  $\varepsilon_v^{n+1} = \varepsilon_v^n + d\varepsilon_v$ , 由 (4) 式求压力  $P^{n+1}$ 。

(Viii) 一个时间步长的计算全部结束。返回 (i) 计算新的时间层次。

计算过程中时间步长  $\Delta t$  由 Courant 稳定性条件给出

$$\Delta t = \beta \frac{\Delta R}{c} \quad (31)$$

式中  $c$  为 Lagrange 声速。  $\beta$  为稳定性系数。

#### 四、计算结果与讨论

图 2 表示一厚壁圆筒，内壁面  $r = r_a$  上受到突加压力脉冲  $p(t)$  的作用。我们采用上节所述方法计算弹塑性波的传播。

设压力脉冲  $p(t)$  为

$$p(t) = \begin{cases} p_0(1-t/T_0) & t < T_0 \\ 0 & t \geq T_0 \end{cases} \quad (32)$$

式中  $T_0 = 80 \mu s$ ,  $p_0 = 8 \sigma_s$ ,  $\sigma_s = 0.4 \text{ GPa}$ 。为了分析方便，状态方程 (4) 取成线性关系

$$p = -3K \varepsilon_v \quad (33)$$

体模量  $K = 150 \text{ GPa}$ 。剪切模量  $G = 80 \text{ GPa}$ 。故弹性加卸载波波速  $c_0 = [(K + 4G/3)/\rho_0]^{1/2}$  为常数。

假定材料为线性硬化体。线性硬化模量  $E_p = E/7$ ,  $E$  为杨氏模量,  $E = 204 \text{ GPa}$ 。弹塑性本构关系中的常数  $C$  和硬化参数  $k$  可通过 (19)、(20) 式求出。

厚壁圆筒内径  $r_a = 10 \text{ cm}$ , 外径为  $110 \text{ cm}$ , 取 300 个网格。Lagrange 网络宽度  $\Delta R = 0.33 \text{ cm}$ 。由于塑性波波速通常要小于弹性波波速, 故由稳定性条件 (31) 式确定的时间步长  $\Delta t$  必等于  $\beta = \Delta R/c_0$ 。它与硬化模型无关。

图 3 和图 4 表示不同时刻各向同性硬化和理想塑性体的空间径向应力分布。为便于分析柱面波的特性, 我们作了一组大内径的计算 ( $r_a = 1000 \text{ cm}$ ,  $\Delta R$  为  $0.33 \text{ cm}$ )。此时波的柱面扩散效应已不显著, 可近似看成一维平面应变波 (见图 5)。比较这些波形, 我们可以看到:

(i) 柱面扩散效应使得一维平面应变波中的弹性前驱应力平台消失。计算结果表明, 不论是硬化材料还是理想塑性体, 应力波前方的弹性间断波均近似地以  $\sqrt{r}$  规律衰减。这与柱面弹性波的理论分析结果相一致。(ii) 柱面扩散效应使得塑性间断波的衰减远大于一维平面应变波的衰减。图 3 还显示, 在一维平面应变波里存在着明显的弹性卸载区与反向塑性加载区。柱面扩散效应使得反向塑性加载区缩小而不明显。

图 6、7 表示不同硬化模型 ( $a = 0$ ,  $a = 0.5$ ,  $a = 1$ ) 和理想塑性体的径向应力和周向应力分布比较图, 比较这些曲线我们发现: (i) 硬化体的塑性间断波波速较大。这是因为塑性波波速通常可表示成

$$c_p = \left( \frac{K + 4G_p/3}{\rho_0} \right)^{1/2} \quad (34)$$

这里  $G_p$  为硬化剪切模量。对于理想塑性体  $G_p = 0$ , 而硬化体  $G_p > 0$ 。(ii) 考虑硬化效应后,

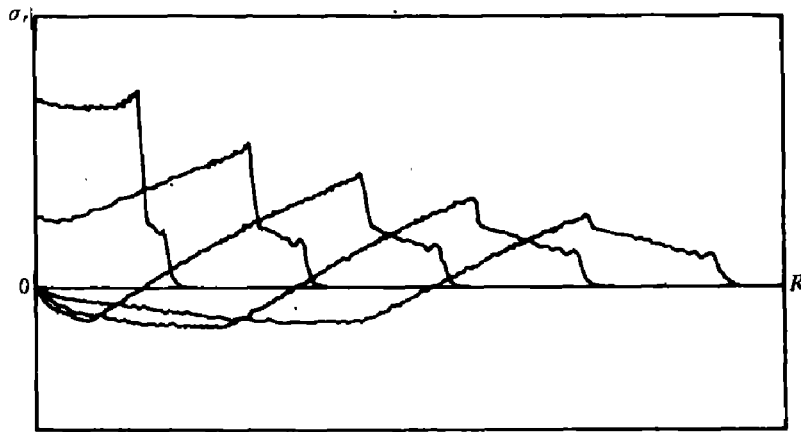


图 3 各向同性硬化体的径向应力分布

Fig. 3 Distributions of radial stress in isotropic hardening model

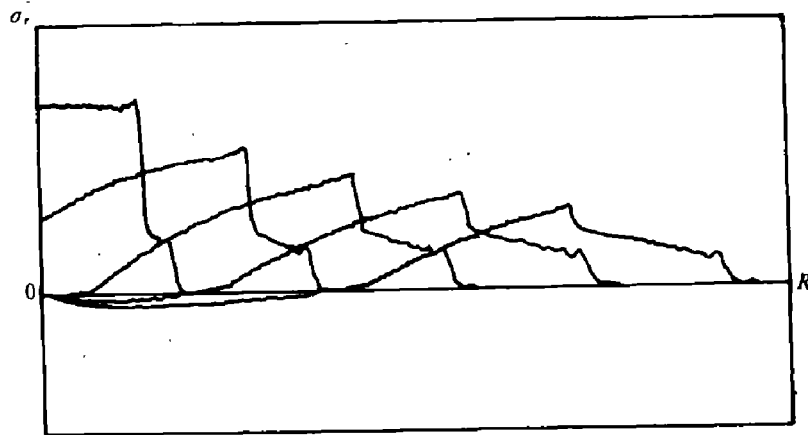


图 4 理想塑性体的径向应力分布

Fig. 4 Distributions of radial stress in ideally plastic model

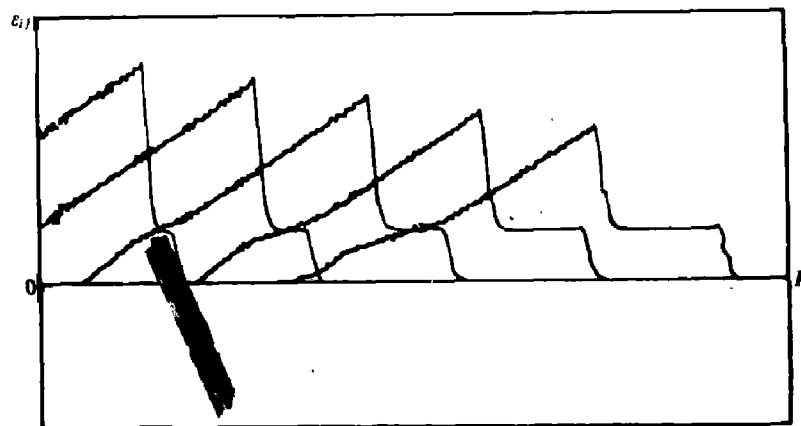


图 5 一维平面应变波的传播

Fig. 5 Propagations of uniaxial strain wave in ideally plastic model

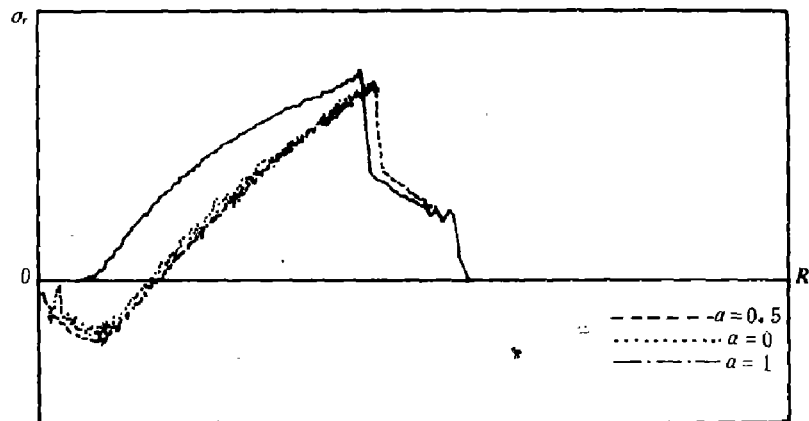


图6 理想塑性体和各类硬化模型的径向应力比较

Fig. 6 Radial stress distributions in ideally plastic and variable strain hardening models

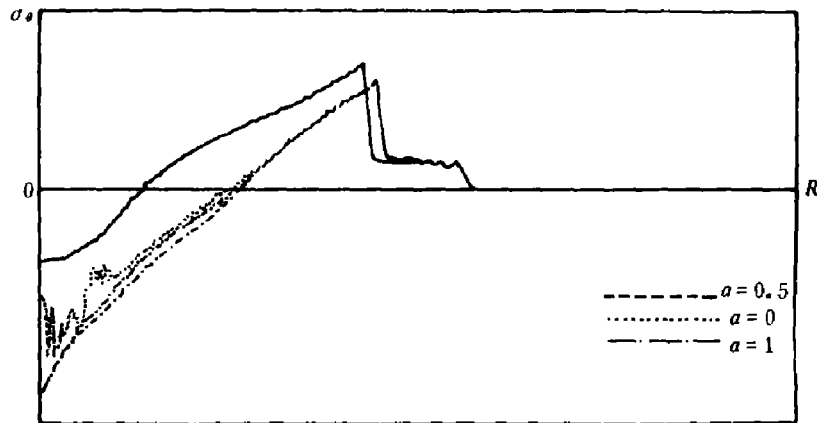


图7 理想塑性和各类硬化模型的周向应力比较

Fig. 7 Circumferential stress distributions in ideally plastic and variable strain hardening models

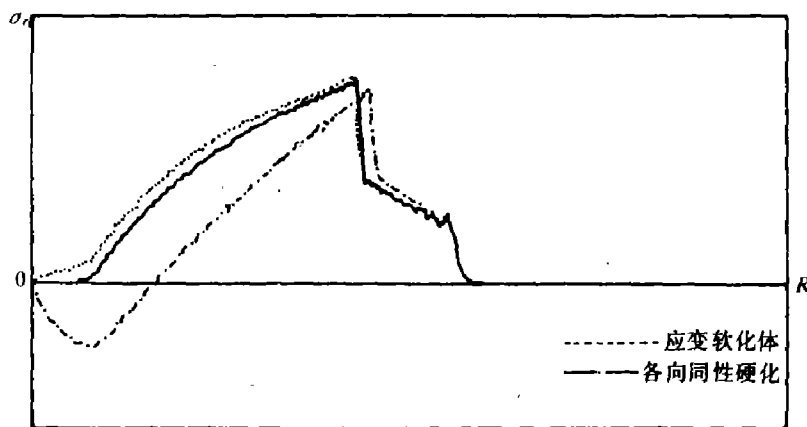


图8 理想塑性、各向同性硬化和应变软化体径向应力比较

Fig. 8 Comparison of radial stress in ideally plastic, isotropic hardening and strain softening models



波后应力卸载较快，并将出现强度较大的拉应力区。(iii) 当线性硬化模量 $E_p$ 相同时，不同硬化模型的计算结果差别并不很大。

图8给出了应变软化材料的径向应力分布(线性软化模量 $E_p = -0.02E$ )。可见在复杂应力状态下软化材料中可以有弹塑性波的传播。图中软化材料的应力分布接近于理想塑性体是由于 $E_p$ 取得较小之故。

综上所述，我们认为：

(1) 硬化效应对应力波传播，尤其是塑性波的传播有很大影响。因此在研究应力波传播及其相互作用的问题里(如层裂问题)，选取合适的本构模型和材料参数是十分重要的。

(2) 柱面扩散效应对弹塑性波的传播有重要影响。本文的工作对于柱壳和柱体的动态响应研究是有意义的。

(3) 本文给出的增量型弹塑性本构(18)式是在一般情况下导得的，适用于任何应力状态。因此具有广泛的应用价值，它可以方便地嵌入于弹塑性流动计算程序。

### 参 考 文 献

- [1] 王礼立，应力波基础，国防工业出版社，(1985)，72.
- [2] Nowaski W.K., Stress Wave in Non-Elastic Solids, Pergaman Press Ltd. Oxford (1978), 49.
- [3] Lawrence R. L., Mason D.S., WONDY IV-A Computer Program for One-Dimensional Wave Propagation with Rezoning. SC-RR-71-0284 (1971).
- [4] Berthelf L.D., Benzley S.E., TOODY II. A Computer Program for Two-Dimensional Wave Program. SC-RR-68-41 (1968).
- [5] Hageman L. J., Walsh J. M., HELP. A Multimaterial Eulerian Program for Compressible Fluid and Elastic-Plastic Flows in Two Space Dimensions and Time. BRLCR 39. (1971).
- [6] 王肖钧，胡秀章，李宗芬，爆炸与冲击，5(2)(1985)，32.
- [7] 王仁，黄文彬，塑性力学引论，北京大学出版社(1982)，8.
- [8] 李永池，唐之景，胡秀章，关于Drucker公设和塑性本构关系的进一步研究，中国科学技术大学学报，18(3)(1988)，339.
- [9] 朱兆祥，李永池，王肖钧，应用数学与力学，2(4)(1981)，353.

## A COMPUTATIONAL METHOD OF CYLINDRICAL ELASTIC-PLASTIC WAVES IN STRAIN HARDENING MATERIALS

Wang Xiaojun, Hu Xiuzhang, Li Yongchi

(University of Science and Technology of China)

**ABSTRACT** An incremental plastic stress-strain relation which is suitable for numerical analysis in strain hardening materials is presented. Numerical examples are given for the propagation of cylindrical elastic-plastic waves. Some significant results are obtained.

**KEY WORDS** elastic-plastic waves, cylindrical waves, numerical analysis.