

# 正多边形板的塑性动力响应——小挠度 分析和大挠度分析\*

陈发良 余同希  
(北京大学力学系)

**摘要** 本文基于刚性板块的总体平衡,建立运动方程,首次完整地分析了正多边形板的塑性动力响应,得到了周边简支或固支的正多边形板在均布矩形脉冲作用下的塑性动力响应小挠度解析解,并用膜力因子法作了大挠度理论分析。所得的结果包含了作为特例的正方形板、圆板等情形,具有广泛应用价值,同时具有理论上和数学上的意义。

**关键词** 正多边形板 塑性动力响应, 大挠度, 膜力因子法

## 一、引言

以正方形板、正六边形板作为特例,以圆板作为边数  $n$  趋于无穷的极限情形,研究正多边形板具有理论上和数学上的意义和兴趣。

关于结构塑性动力响应方面的工作是非常多的(参见[1]),但是至今还没有对正多边形板作过完整分析。Cox和Morland<sup>[2]</sup>曾经讨论过正多边形板的重要特例——正方形板,给出了简支方板在均布矩形脉冲作用下的完全解,并在讨论中提到他们的分析可以推广到一般的正多边形板,然而Cox等人只作了小挠度分析,即其结果只适用于板的挠度远小于板的厚度的情形,并且由于问题本身的困难性(方板不同于轴对称的圆板,应力主方向事先不知道),虽然他们采用了Tresca屈服面的外包近似面——Johansen近似屈服面(见图1)

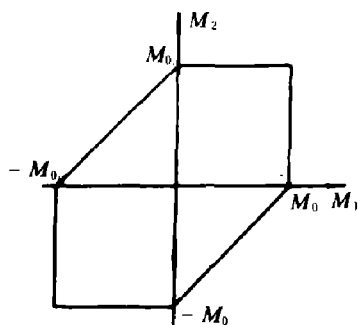


图1 (a) Tresca 屈服面

Fig 1 (a) Tresca's yield surface

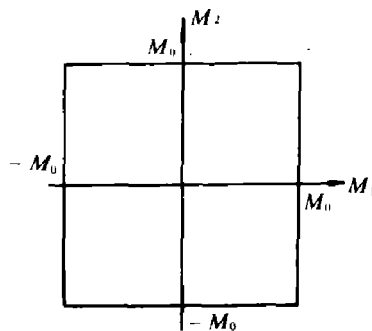


图1 (b) Johansen 屈服面

Fig 1 (b) Johansen's yield surface

●国家教委博士点基金资助课题。

1990年7月16日收到原稿。

$$\max (|M_1|, |M_2|) = M_0 \quad (1)$$

他们的分析仍十分繁冗。(1) 式中  $M_1, M_2$  为弯矩的主值,  $M_0$  为板的塑性极限弯矩。他们的分析还强烈地依赖于边界支承条件, 并不适用于边界固支的情形。

本文将基于刚性板块的总体平衡建立运动方程, 简便地得出周边简支或者周边固支的边数任意的正多边形板的小挠度理论解析解。

众所周知, 结构在强动载荷作用下将发生大变形塑性响应, 这时作为一阶近似的小变形理论失效, 必须进行大变形分析。可是, 在这类问题中, 物理非线性和几何非线性的耦合给理论分析带来了巨大困难, 在一般情况下用传统的方法无法求解。

对于边界受到约束的板, 几何大变形效应主要体现为膜力参与承载, 即膜力效应。余同希和 Stronge<sup>[3]</sup> 最近在对刚塑性地基梁的分析中提出了一种求解大变形塑性响应的“膜力因子法”, 随后本文作者进一步论述和发展了这种方法, 并用这种方法成功地分析了梁、圆板和矩形板<sup>[4-6]</sup>的大挠度塑性动力响应。本文将在小挠度分析的基础上, 用膜力因子法首次给出正多边形板的大挠度理论解。

## 二 小挠度理论分析

考虑一内切圆半径为  $a$ 、厚为  $H$  的正  $n$  边形板, 边界简支或者固支, 单位面积板的质量为  $\mu$ , 受均布脉冲载荷  $P(t)$  作用。假设材料是理想刚塑性的, 则其变形模式如图 2 所示。 $n$  块刚性块和中央与板自身形状相似的平台区 (该平台区在一定条件下消失) 之间由塑性铰线 (驻定铰或移行铰) 分开, 支承边为自然铰 (简支情形) 或塑性铰 (固支情形), 刚性块绕边界转动。

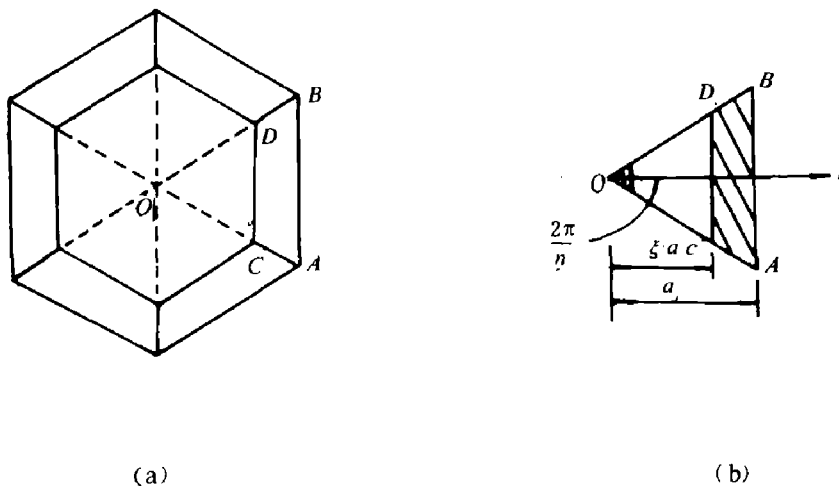


图 2 变形模式 (以正六边形板为例)

Fig.2 Pattern of deformation

由于对称性, 可以只讨论图 2 (b) 所示的顶角为  $2\pi/n$  的等腰三角形区域, 图中  $\xi(t)$  是表征铰线  $CD$  位置的参数。因为塑性铰线是应力主方向, 并且在塑性铰线上  $|M_m| = M_0$  ( $\vec{n}$  为铰线的法方向), 根据达朗贝尔原理得到运动方程组

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{12} \mu a^3 (1-\xi)^3 (1+3\xi) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= \frac{1}{6} P(t) a^2 (1-\xi)^2 (1+2\xi) - \alpha M_0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \mu a \frac{d}{dt} \left\{ (1-\xi)^3 \frac{d\varphi}{dt} \right\} = P(t) \right. \quad (2)$$

上面两式分别描述刚性板块  $ABDC$  的动量矩守恒和中心平台区  $OCD$  的动量守恒。 $d\varphi/dt$  为刚性板块绕边界的转动角速度； $\alpha$  表示边界支承条件，周边简支时  $\alpha=1$ ，周边固支时  $\alpha=2$ 。

引入无量纲参量

$$p(\tau) = \frac{P(t)a^2}{M_0}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi a}{H}, \quad \tau = \frac{t}{\sqrt{\mu a^2 H / M_0}}, \quad \dot{(\cdot)} = \frac{d}{d\tau} \quad (3)$$

将 (2) 式改写成

$$\begin{cases} (1-\xi)^3 (1+3\xi) \frac{\ddot{\varphi}}{\bar{\varphi}} = 2p(\tau) (1-\xi)^2 (1+2\xi) - 12\alpha & (4-a) \\ \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{\dot{\varphi}}{\bar{\varphi}} (1-\xi) \right\} = p(\tau) & (4-b) \end{cases}$$

积分 (4-b) 式得

$$\frac{\dot{\varphi}}{\bar{\varphi}} (1-\xi) = \int_0^\tau p(\tau) d\tau = I(\tau) \quad (5)$$

这里  $I(\tau)$  表示脉冲  $P(t)$  的冲量的无量纲值。利用 (5) 式在 (4) 式中消去  $\bar{\varphi}$ ，可得

$$-(1-\xi) (1+2\xi) I(\tau) \dot{\xi} + (1+\xi) (1-\xi)^2 p(\tau) = 12\alpha \quad (6)$$

上式描述铰线  $CD$  的移行规律。当  $\tau=0$  时

$$(1+\xi_0) (1-\xi_0)^2 p_0 = 12\alpha \quad (7)$$

式中  $p_0 = p(\tau)|_{\tau=0}$ 。由 (7) 式可确定铰线  $CD$  的初始位置  $\xi_0$ 。

在给定的载荷  $p(\tau)$  作用下，积分 (6) 式和 (4) 式就可得到响应的历程和板的最终变形。下面分别讨论矩形脉冲和冲击载荷作用的情形。

### 1. 矩形脉冲冲击作用的情形

这时

$$p(\tau) = \begin{cases} p_0, & 0 \leq \tau \leq \tau_T \\ 0, & \tau > \tau_T \end{cases} \quad (8)$$

由运动方程 (4-a) 看出，板要产生变形，即要  $\frac{\ddot{\varphi}}{\bar{\varphi}} > 0$ ，必须  $p_0 \geq 6\alpha$ ；因此得到极限载荷  $p_s = 6\alpha$ 。而从 (7) 式知道， $p_0$  越小， $\xi_0$  也越小，在  $p_0 = 12\alpha$  时， $\xi_0 = 0$ 。由此说明

当  $p_0 < p_s = 6\alpha$  时，板不变形；

当  $6\alpha = p_s \leq p_0 < 2p_s = 12\alpha$  时，整个响应过程中  $\dot{\xi} = 0$ ，无移行铰，也不出现中心平台区；

当  $p_0 > 2p_s = 12\alpha$  时，出现中心平台区  $OCD$ ，然后铰线  $CD$  向板中心移行，即该平台区收缩。

先讨论高载： $p_0 > 2p_s = 12\alpha$  的情形。响应过程可分为三相。

第一相:  $0 \leq \tau \leq \tau_T$ ,  $p = p_0$ , 则由 (6) 知  $\xi = \xi_0 = \text{const.}$ , 即铰线  $CD$  不移行, 由 (4-b) 知中心平台区  $OCD$  作匀加速运动, 那么不难求得在这一相结束时刻  $\tau = \tau_T$  的无量纲挠度分布为

$$\eta(s, \tau_T) = \begin{cases} \frac{1}{2} p_0 \tau_T^2 & 0 \leq s \leq \xi_0 \\ \frac{1}{2} p_0 \tau_T^2 \frac{1-s}{1-\xi_0} & \xi_0 \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (9)$$

其中  $\eta = w/H$ ,  $w$  为横向挠度;  $s = r/a$ , 坐标  $r$  见图 2 (b)。

第二相:  $\tau_T < \tau \leq \tau_2$ ,  $p(\tau) = 0$ ,  $I(\tau) = p_0 \tau_T \equiv I_T = \text{const.}$ , 则由 (6) 式得

$$-(1-\xi)(1+3\xi)I_T \dot{\xi} = 12\alpha \quad (10)$$

在初条件  $\xi|_{\tau=\tau_T} = \xi_0$  下积分, 得到

$$(\xi^3 - \xi_0^3) - (\xi_0^3 - \xi_0^3) - (\xi - \xi_0) = \frac{12\alpha}{I_T} (\tau - \tau_T) \quad (11)$$

随着  $\tau$  的增大,  $\xi$  减小, 这说明中心平台区收缩。到  $\xi = 0$  时, 第二相结束, 由 (11) 式知道此时

$$\tau_2 = \frac{I_T}{12\alpha} \quad (12)$$

在这一相中, 由 (4-b) 知中心平台区作匀速运动, 无量纲速度分布为

$$\dot{\eta}(s, \tau) = \begin{cases} I_T & 0 \leq s \leq \xi \\ I_T \frac{1-s}{1-\xi} & \xi \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (13)$$

积分上式, 并利用 (11) 式可得挠度。在  $\tau_2$  时刻, 无量纲速度和挠度分布为

$$\dot{\eta}(s, \tau_2) = I_T (1-s) \quad (14)$$

$$\eta(s, \tau_2) = \begin{cases} \frac{I_T^2}{24\alpha} (1+2\xi_0+2\xi_0^2)(1-s) & \xi_0 \leq s \leq 1 \\ -\frac{I_T^2}{24\alpha} + \frac{I_T}{24\alpha} (2-s^2-s^3) & 0 \leq s \leq \xi_0 \end{cases} \quad (15)$$

第三相:  $\tau_2 < \tau \leq \tau_f$ , 在这一相,  $\xi \equiv 0$ , 因而由 (4-a) 可得

$$\ddot{\eta} = -12\alpha \quad (16-a)$$

即有

$$\dot{\eta}_0 = -12\alpha \quad (16-b)$$

这里  $\eta_0 = w_0/H$ ,  $w_0$  为板中心  $O$  点的挠度。因此, 整块板作匀减速运动。

在初条件 (14) 下积分 (16) 式, 得到当  $\tau \geq \tau_2$  时, 无量纲速度表达式

$$\dot{\eta}(s, \tau) = \left\{ I_T + 12\alpha(\tau_2 - \tau) \right\} (1-s) \quad (17)$$

当  $\tau = \tau_f = I_T / 6\alpha (= 2\tau_2)$  时,  $\dot{\eta}(s, \tau) = 0$ , 板的变形终止。经计算不难得到最终挠度分布为

$$\eta(s, \tau_f) = \begin{cases} \frac{I_T}{12\alpha} (1 + \xi_0 + \xi_0^2) (1-s) & \xi_0 \leq s \leq 1 \\ -\frac{I_T}{2\rho_0} + \frac{I_T^2}{24\alpha} (3-s-s^2-s^3) & 0 \leq s \leq \xi_0 \end{cases} \quad (18)$$

特别地，板中心  $o$  点的最终无量纲挠度为

$$\delta_f \equiv \eta(0, \tau_f) = \frac{I_T^2}{8\alpha} - \frac{I_T}{2\rho_0} \quad (19-a)$$

具体说来，对周边简支的板， $\alpha = 1$

$$\delta_f = I_T \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{2\rho_0} \right) \quad (19-b)$$

对周边固支的板， $\alpha = 2$

$$\delta_f = I_T \left( \frac{1}{16} - \frac{1}{2\rho_0} \right) \quad (19-c)$$

对于中载： $6\alpha = \rho_0 \leq \rho_1$ ， $2\rho_0 = 12\alpha$  的情形， $\xi \equiv \xi_0 = 0$ ，没有移行阶段，由运动方程(4-a) 易于求得最终挠度分布为

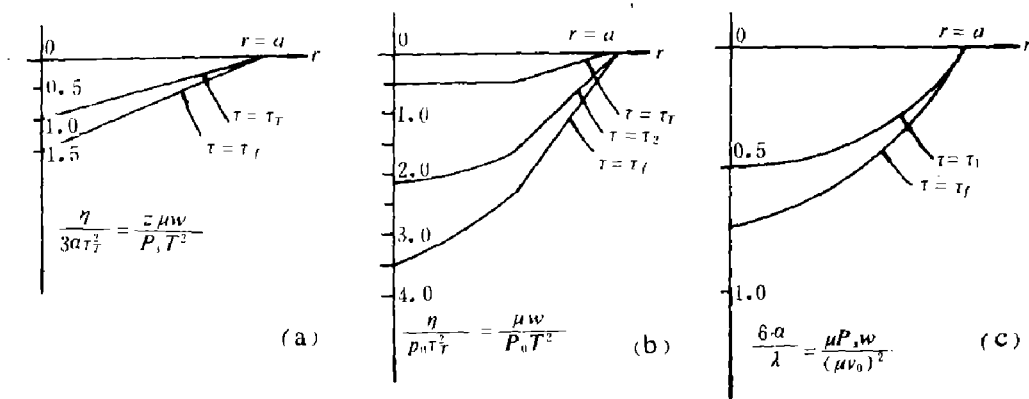
$$\eta(s, \tau_f) = I_T \left( \frac{1}{6\alpha} - \frac{1}{\rho_0} \right) (1-s) \quad (20)$$

周边简支 ( $\alpha = 1$ ) 和周边固支 ( $\alpha = 2$ ) 板的中心无量纲挠度分别为

$$\delta_f = I_T^2 \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{\rho_0} \right) \quad (21-a)$$

$$\delta_f = I_T^2 \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{\rho_0} \right) \quad (21-b)$$

### 2. 冲击载荷作用的情形



(a) 中载： $\rho_0/\rho_s = \rho_0/(6\alpha) = 1.5$  (b) 高载： $\rho_0/\rho_s = \rho_0/(6\alpha) = 16/3$ ， $\xi_0 = 1/2$  (c) 冲击载荷  
 (a) Medium load:  $\rho_0/\rho_s = 1.5$  (b) High load:  $\rho_0/\rho_s = 16/3$ ， $\xi_0 = 1/2$  (c) Impulsive load

图3 挠度沿坐标  $r$  的分布

Fig. 3 Deflections along coordinate curve  $r$

考虑板在冲击载荷作用下在初始时刻获得均匀速度  $v_0$  分布。这相当于上述高载情形中,  $\tau_T \rightarrow 0$ , 且  $p_0 \tau_T = (\mu v_0^2 a^2 / M_0 H)^{1/2} = \sqrt{\lambda}$ 。那么由 (18) 式就可得出这时最终挠度分布为

$$\eta(s, \tau_T) = \frac{\lambda}{24\alpha} (3 - s - s^2 - s^3) \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (22)$$

其中  $\lambda = \mu v_0^2 a^2 / M_0 H$  是与初始冲击动能成正比的一个载荷参数。这个式子表明正多边形板在冲击载荷作用下, 其挠度与输入的动能成正比, 而最终的形状是: 挠度  $w$  是坐标  $r$  的三次曲线。

图 3 给出了受中载、高载和冲击载荷作用的正多边形板在响应的各个阶段的挠度沿坐标  $r$  的分布。图 4 给出了板中心最终挠度与载荷大小的关系。图 4 表明, 当输入的冲量一定时载荷  $p_0$  的值越大, 板中心的挠度越大, 但它有一上限值, 这一上限值相应于冲击载荷作用的情形。

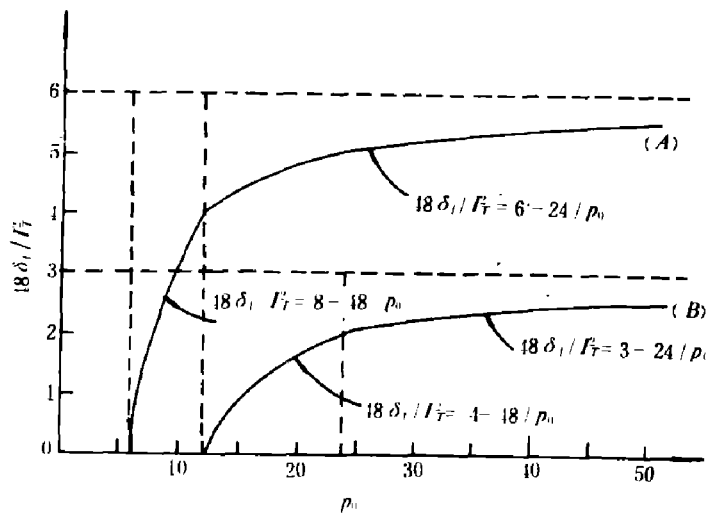


图 1 矩形脉冲作用下正多边形板最大挠度与载荷大小的关系  
(A) 周边简支, (B) 周边固支

Fig. 1 Relations between the maximum permanent deflections of regular polygonal plates subjected to uniformly-distributed rectangular pressure pulses and the pulse amplitudes

(A) Case of simply-supported condition of edge support. (B) Case of built-in condition of edge support

### 三、大挠度理论分析

上述小挠度分析只考虑弯曲内力的作用。但我们知道, 在板的弹性理论中, 当板的挠度达到其厚度量级时, 膜应变就达到弯曲应变的量级, 这时膜力作用不可忽略。这一现象是由变形几何学决定的, 在板的塑性动力响应中同样如此。因而对于边界受约束的板, 大挠度效应主要体现为膜力效应。

伴随大挠度产生的膜力将改变板的截面屈服条件 (由只有弯矩作用变成弯矩膜力联合作

用)和平衡方程(增添与膜力有关的项),从而提高板的承载能力。同时,膜力的出现也使问题变得十分复杂,这时用传统的方法求解就十分困难,然而基于能量观点的膜力因子法(参见[3—5])却提了一条有效的分析途径。根据这种方法,考虑到膜力对塑性铰成铰条件及能量耗散的影响,对塑性耗散功作等效代换,引入一个表征膜力效应的因子  $f_n$ , 然后在小挠度运动方程(4)中作替换  $M_0 \rightarrow M_0 f_n$ , 便得到大挠度运动方程

$$\begin{cases} (1-\xi)^3(1+3\xi)\bar{\varphi} = 2\rho(\tau)(1-\xi)^2(1+2\xi) - 12\alpha f_n & (23-a) \\ \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{\dot{\varphi}}{\varphi}(1-\xi) \right\} = \rho(\tau) & (23-b) \end{cases}$$

其中膜力因子  $f_n$  定义为

$$f_n \equiv J_{mn} / J_m \quad (24)$$

这里  $J_m$ ,  $J_{mn}$  分别表示仅有弯矩作用时和弯矩膜力联合作用时的塑性功耗散率。

从文献[7]可知,在考虑弯矩和膜力联合作用时板内单位长度塑性铰线的塑性功耗散率为

$$D = (Nw - M)\dot{\theta}_i \quad (25)$$

式中  $w$  为铰线处的挠度,  $N$ 、 $M$  分别为铰线上作用于平行铰线的法截面上的膜力和弯矩,  $\dot{\theta}_i$  为铰线两侧板块的相对转动角速度。显然,耗散函数  $D$  依赖于屈服准则的选取和板边界的支承条件。如果选用最大正应力屈服准则( $M$ 与 $N$ 交互作用)及其正交流动法则,并且利用 Euler-Bernoulli 假设,可以得到对于边界简支的板内的塑性铰线,

$$D = \begin{cases} M_0(1 + 4\frac{w^2}{H^2})\dot{\theta}_i, & \frac{w}{H} \leq \frac{1}{2} \\ 4M_0\frac{w}{H}\dot{\theta}_i, & \frac{w}{H} > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (26)$$

而对于边界固支的情形,

$$D = \begin{cases} M_0(1 + 3\frac{w^2}{H^2})\dot{\theta}_i, & \frac{w}{H} \leq 1 \\ 4M_0\frac{w}{H}\dot{\theta}_i, & \frac{w}{H} > 1 \end{cases} \quad (27)$$

当边界固支时,它本身往往就是塑性铰线,(27)式同样适用于这种铰线,由此有,

$$\begin{cases} J_{mn} = \sum_i \int_{l_i} D dl \\ J_m = \sum_i M_0 \dot{\theta}_i l_i \end{cases} \quad (28)$$

其中  $l_i$  表示第  $i$  条铰线之长度,  $\sum$  表示对所有铰线求和。

对于本文讨论的正多边形板及图2所示的变形模式,在计算  $f_n$  时取挠度的沿铰线的分段线性近似,计算得到

当周边简支 ( $\alpha = 1$ ) 时

$$f_n \approx \begin{cases} 1 + \frac{4}{3}(1+2\xi)\eta^2, & \eta \leq \frac{1}{2} \\ \end{cases} \quad (29)$$

$$\left( 2\eta + \frac{1}{6\eta} + \xi \left( 2\eta - \frac{1}{6\eta} \right) \right) \quad \eta \geq \frac{1}{2}$$

当周边固支 ( $\alpha = 2$ ) 时

$$f_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2}(1-\xi)\eta + \frac{3}{2}\xi\eta^2 & \eta \leq 1 \\ \frac{1}{2} + \eta(1+\xi) & \eta \geq 1 \end{cases} \quad (30)$$

在这一节中  $\eta = w_0/H$  表示板中心的无量纲挠度。可见膜力因子  $f_n$  仅与板中心挠度  $\eta$  及铰线  $CD$  的位置  $\xi$  有关。

有了表达式 (29)、(30), 在给定的载荷  $p(\tau)$  作用下, 大挠度运动方程 (23) 就可解了。如果考虑外载为矩形脉冲的情形, 可以发现, 大挠度分析除了给出的最终变形小于小挠度理论外, 它们还给出其它一些不同的结论, 如在常值载荷作用下, 小挠度分析中铰线  $CD$  不动, 大挠度分析中铰线  $CD$  却要移行等。这类似于矩形板的结果<sup>[10]</sup>。

下面主要讨论冲击载荷作用的情形。

正  $n$  边形板在  $t=0$  时刻有均布速度  $v_0$ , 它的响应过程可分为两相

第一相: 由大挠度运动方程 (23) 可导出相应于小挠度分析中 (6) 式的表征塑性铰  $CD$  移行规律的方程

$$(1-\xi)(1+3\xi)\dot{\xi} = -\frac{12\alpha f_n}{\lambda} \quad (31)$$

式中“ $\cdot$ ”表示对无量纲时间  $\tau' = t/(H/v_0)$  求导,  $\lambda = \mu v_0^2 a^2 / M_0 H$ , 在这一相, 铰线  $CD$  向板中心移行, 同时中心平台区作匀速运动, 有  $dw_0/dt = v_0$ , 即

$$\eta = \frac{w_0}{H} = \tau' \quad (32)$$

将 (32) 代入  $f_n$  的表达式 (29) 或 (30) 中, 然后可用 Runge-Kutta 法对 (31) 作数值积分求出  $\xi(\tau')$ , 直到  $\xi=0$ , 第一相结束。记此时刻为  $\tau'_1$ , 则  $\eta_1 = \tau'_1$ 。

第二相:  $\tau'_1 < \tau' \leq \tau'_2$ , 这时  $\xi \equiv 0$ , 无移行塑性铰。由 (23-a) 得到  $\ddot{\eta} = -12\alpha f_n/\lambda$ , 即

$$\ddot{\eta} = -\frac{12\alpha f_n}{\lambda} \quad (33)$$

其中  $f_n$  在这一相内只是板中心挠度  $\eta$  的函数, 因而将上式改写成

$$\frac{d}{d\eta} (\dot{\eta}^2) = -\frac{24\alpha f_n(\eta)}{\lambda} \quad (34)$$

这里

$$f_n = \begin{cases} 1 + \frac{4}{3}\eta^2 & \eta \leq \frac{1}{2} \\ 2\eta + \frac{1}{6\eta} & \eta \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{周边简支}) \quad (35)$$

或



$$f_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2}\eta & \eta \leq 1 \\ \frac{1}{2} + \eta & \eta > 1 \end{cases} \quad (\text{周边固支}) \quad (36)$$

将 (35) 或 (36) 式代入 (34) 式并积分, 得到微分方程 (34) 的相轨线  $\phi(\eta, \dot{\eta}) = 0$ , 然后在  $\phi(\eta, \dot{\eta}) = 0$  中令  $\dot{\eta} = 0$ , 便得到变形终止时刻板中心的无量纲挠度  $\eta_f$  的表达式

(I) 当周边简支 ( $\alpha=1$ ) 时,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{9}(\eta_f^3 - \eta_i^3) + (\eta_f - \eta_i) - \frac{\lambda}{24} = 0 \quad (\eta_i \leq \frac{1}{2}, R_1 \leq 0) \\ (\eta_i^2 - \frac{1}{4}) + \frac{1}{6} \ln(2\eta_f) - \frac{\lambda}{24} R_1 = 0 \quad (\eta_i \leq \frac{1}{2}, R_1 > 0) \\ (\eta_f - \eta_i^2) + \frac{1}{6} \ln(\eta_f/\eta_i) - \frac{\lambda}{24} = 0 \quad (\eta_i \geq \frac{1}{2}) \end{array} \right. \quad (37)$$

式中  $R_1 \equiv 1 - \frac{24}{\lambda} \left\{ \left( \frac{1}{2} - \eta_i \right) + \frac{4}{9} \left( \frac{1}{8} - \eta_i^3 \right) \right\}$ 。(37) 的三个等式依次相应于  $\eta_i \leq \eta_f \leq \frac{1}{2}$ ,  $\eta_i \leq \frac{1}{2} \leq \eta_f$ ,  $\frac{1}{2} \leq \eta_i \leq \eta_f$  三种情况。

(II) 当周边固支 ( $\alpha=2$ ) 时

$$\left\{ \begin{array}{l} (\eta_f^2 - \eta_i^2) + 4(\eta_f - \eta_i) - \frac{\lambda}{12} = 0 \quad (\eta_i \leq 1, R_2 \leq 0) \\ \eta_i^2 + \eta_f - \left( 2 + \frac{\lambda}{24} R_2 \right) = 0 \quad (\eta_i \leq 1, R_2 > 0) \\ (\eta_i^2 - \eta_i) + (\eta_f - \eta_i) - \frac{\lambda}{24} = 0 \quad (\eta_i > 1) \end{array} \right. \quad (38)$$

式中  $R_2 \equiv 1 - \frac{48}{\lambda} \left\{ (1 - \eta_i) + \frac{1}{4} (1 - \eta_i^2) \right\}$ 。(38) 的三个等式依次相应于  $\eta_i \leq \eta_f \leq 1$ ,  $\eta_i \leq 1 \leq \eta_f$ ,  $1 \leq \eta_i \leq \eta_f$  三种情况。

#### 四、讨 论

1) 从上面的分析可以看出, 所有的表达式不显含多边形的边数  $n$ 。这说明, 对于边数不同的正多边形板, 只要它们的内切圆半径  $a$  相等, 且载荷与周边支承条件相同, 则板中心的最终挠度都一样, 并且挠度沿坐标  $r$  的分布也相同。

2) 本文的分析结果具有广泛性, 显然它包含了作为特例的正方形板、正六边形板和圆板的情形, 而且边条件既可以是简支也可以是固支。第二节给出的简支方板和简支圆板的小挠度理论的结果同 Cox 等<sup>[2]</sup>关于方板的结果, 以及 Hopkins 等<sup>[8]</sup>和 Wang<sup>[9]</sup>关于圆板的结果一致。

3) 本文用于分析正多形板的方法不同于 Cox<sup>[2]</sup>、Hopkins<sup>[8]</sup>和 Wang<sup>[9]</sup>分析简支方板和简支圆板的方法。他们使用局部平衡微分方程, 而这里使用的是极为简明的刚性板块总

体运动方程，因而这里的分析要比他们的简洁得多。

4) 可以证明，在简支边条件的情形，第二节的小挠度分析在选取 Johansen 屈服面(图1)的前提下给出的结果是完全解。

事实上，如果取图5所示的直角坐标系  $Oxy$ ，那么能够找到一个具有下列形式的内力场

$$\begin{cases} M_{xx} = M_0 + x^2 f(r) \\ M_{yy} = M_0 + y^2 f(r) \\ M_{xy} = xy f(r) \end{cases} \quad (39)$$

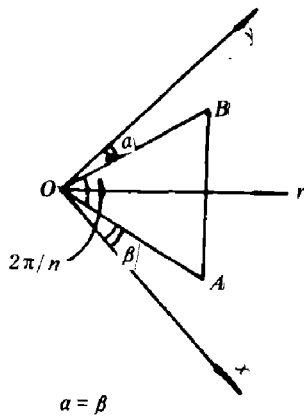


图5  $Oxy$  坐标系

Fig.5 Coordinate system  $Oxy$

与上述变形模式相对应，成为完全解。限于篇幅，详细证明这里略去。

5) 本文第三节给出的正  $n$  边形板大挠度理论分析，在  $n \rightarrow \infty$  时，就是圆板的结果，对于边界简支的情形与本文作者关于圆板的大挠度分析结果<sup>[5]</sup>是一致的；在  $n = 4$  时，就是方板的结果。我们在文献[5]中将简支圆板的理论分析与相关实验结果作了比较，而在图6中比较了固支正方形板的理论分析与 Jones 和 Baeder<sup>[10]</sup>

的实验数据。这些比较表明，在板的最大挠度接近板的厚度或达到几倍板厚时，本文基于弯矩与膜力交互作用准确屈服面得到的大挠度理论结果与实验结果符合良好。

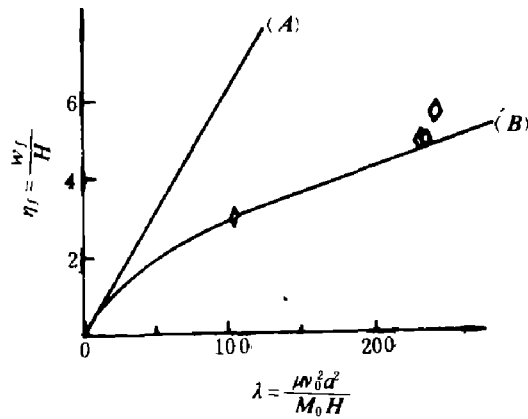


图6 冲击载荷作用下固支正方形板最大挠度的理论结果与实验结果的比较

(A) 小挠度理论解 (22)式; (B) 大挠度理论解(38)式;  $\diamond$  6061-T6 铝板实验结果 (Jones 和 Baeder<sup>[10]</sup>)

Fig.6 Comparison of theoretical and experimental maximum permanent deflection of impulsively loaded fully clamped square plates

(A) Bending only theory (Eq. (22))  
(B) Membrane-bending theory (Eq. (38))  
 $\diamond$  Experimental results for Al6061-T6 (Jones & Baeder<sup>[10]</sup>)

### 参 考 文 献

[1] 余同希, 爆炸与冲击, 10 (1) (1990), 85; 10 (2) (1990), 183.  
[2] Cox, A. D., Morland, L. M., *J. Mech. Phys. Solids*, 7 (1959), 229.  
[3] Yu, T. X., Stronge, W. J., Large Deflection of a Rigid-Plastic Beam-on-Foundation from

- Impact, *Int. J. Impact Engng.*, 9 (1990), 115.
- [4] 陈发良, 余同希, 用“膜力因子法”分析固支梁和简支梁的大挠度塑性动力响应, 固体力学学报, 待发表。
- [5] 余同希, 陈发良, 力学学报, 22 (5) (1990), 555.
- [6] Yu, T. X., Chen, F. L., The large deflection Dynamic Plastic Response of Rectangular Plates, to be Published in *Int. J. Impact Engng.*
- [7] Jones, N., *Int. J. Solids Struct.*, 7 (1971), 1007.
- [8] Hopkins, H. G., Prager, W., *J. Appl. Math. Phys.*, 5 (4) (1954).
- [9] Wang, A. J., *J. Appl. Mech.*; 22 (1955), 375.
- [10] Jones, N., Baeder, R. A., An Experimental Study of the Dynamic Plastic Behavior of Rectangular Plates, Symp. on Plastic Analysis of Structures, Ministry of Education, Polytech. Inst. of Jassy, Civil Engr. Fac., Rumania, 1 (1972), 476.

## DYNAMIC PLASTIC RESPONSE OF REGULAR POLYGONAL PLATES

Chen Faliang, Yu Tongxi

(*Department of Mechanics, Peking University*)

**ABSTRACT** By setting the equations of motion on the basis of the total equilibrium of the rigid plate zones, the dynamic response of rigid-plastic regular polygonal plates is completely studied for the first time. The analytical expressions are obtained for the final deflections of simply-supported and built-in regular polygonal plates subjected to uniformly distributed rectangular impulse, and the corresponding large deflection solutions are also obtained by a procedure called Membrane Factor Method. Obviously, the present analysis pertains to the important special cases of square plates and circular ones, so it is of theoretical as well as extensive practical significance.

**KEY WORDS** regular polygonal plate, dynamic plastic response, large deflection, Membrane Factor Method