

一定初缺陷杆在轴向冲击下弹塑性 动态屈曲有限元计算

揭 敏

(华中理工大学)

摘要 本文用有限元方法分析了一定初缺陷杆受轴向冲击的弹塑性动态屈曲。由变形功相关的屈曲判据求出屈曲时间, 计算了初缺陷及冲击载荷形状和大小对屈曲时间的影响。

关键词 动态屈曲 屈曲判据 轴向冲击

一、引言

结构动态屈曲因在工程中的广泛背景及理论上的特殊性质, 引起人们的重视。有关杆的分析开展较早, 文献较多^[1-6]。现有的理论一般都作以下假设: (1) 小变形; (2) 材料应力应变关系为分段线性, 塑性状态下不卸载; (3) 轴力沿杆均匀分布; (4) 忽略应力波对屈曲的影响。

Hayashi等^[1]首次用有限差分法求解杆的弹塑性动态屈曲问题, 计算中放弃了(2)、(3)两个假设, 但塑性时材料仍无卸载。Ari-Gur等^[6]用有限差分法计算动态屈曲中杆的最大横向位移与最大轴向应变的关系, 求出了位移骤增时的临界应变值。

本文用有限元法对杆的动态屈曲进行分析, 计算杆的变形功随时间的变化曲线(这里变形功指抵抗结构变形所作的功。弹性时为应变能, 塑性时则耗散了), 给出一个屈曲判据, 近似求出屈曲时间。分析仅用小变形假设, 对冲击载荷形状, 轴力分布及应力、应变关系无限制。虚功方程中横向弯曲波和纵向压缩波的影响自然被顾及。

二、基本方程

1. 虚功方程

图1中一长为 L 的杆, 横截面积 $A=b \times h$, 一端作用冲击载荷 $P(t)$ 。杆的初缺陷为 $w_0(x)$, 横向位移 $w(x, t)$, 纵向位移 $u(x, t)$ 。

为提高计算的收敛性, 采用二阶等参元, 将杆划分 n 段, 每段长为 l , 对第 k 个单元, 有

$$\begin{cases} x = \underline{N}^T x_k \\ u = \underline{N}^T u_k \\ w_1 = \underline{N}^T w_k \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\underline{N}^T = [-(1/2)(r-r^2), (1-r^2), 1/2(r+r^2)]$
($|r| \leq 1$), \underline{N}^T 为二阶等参元的插值函数。

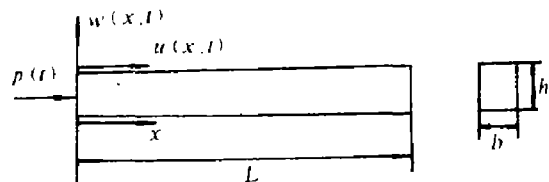


图 1

Fig. 1

1989年12月26日收到原稿, 1990年2月26日收到修改稿。

$\underline{x}_k = (x_{2k-1}, x_{2k}, x_{2k+1})^T$, $\underline{u}_k = (u_{2k-1}, u_{2k}, u_{2k+1})^T$, $\underline{w}_k = (w_{2k-1}, w_{2k}, w_{2k+1})^T$, x_i, u_i, w_i ($i = 1, \dots, 2n+1$) 为节点坐标和位移。

对于Euler梁, 由虚功原理, 有

$$\int_{V_k} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = p_{2k-1} \delta u_{2k-1} + p_{2k+1} \delta u_{2k+1} - \int_{V_k} \rho \ddot{u} \delta u dV - \int_{V_k} \rho \dot{w} \delta w dV \quad (2)$$

其中 p_i 为节点力 ($i = 1 \dots 2n+1$), σ_{ij} 为应力场, ρ 为材料密度, V_k 为 k 号单元的体积, “ \cdot ” 表示 “ d/dt ”。

单轴应力状态下 $\int_{V_k} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_{V_k} \sigma_k \delta \varepsilon_k dV$, σ_k, ε_k 为轴向应力和应变。忽略高阶小量, 有

$$\varepsilon_k = u' - w_1' w' + \frac{hs}{2} w'' \quad |s| \leq 1$$

结合 (1) 式, 可以导出

$$\begin{aligned} \int_{V_k} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_{V_k} \sigma_k \delta \varepsilon_k dV = \frac{A}{4} & \left[(-\sum_{k1} + 2\sum_{k2}), -4\sum_{k2}, (\sum_{k1} + 2\sum_{k2}), \left(\frac{2h}{l} \sum_{k3} \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{k4} - 2\sum_{k5} \right), \left(-\frac{4h}{l} \sum_{k3} + 4\sum_{k5} \right), \left(\frac{2h}{l} \sum_{k3} - \sum_{k4} - 2\sum_{k5} \right) \right] \delta (u_{2k-1}, \\ & u_{2k}, u_{2k+1}, w_{2k-1}, w_{2k}, w_{2k+1})^T \end{aligned}$$

其中 $(\sum_{k1}, \sum_{k2}, \sum_{k3}, \sum_{k4}, \sum_{k5}) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sigma_k(r, s) (1, r, s, w_{k0}(r), r w_k'(r)) dr ds$

$w_{k0}(r)$ 为第 k 个单元的初始形状。

利用 (1) 式, 还可以得到

$$\begin{aligned} \int_{V_k} \rho \ddot{u} \delta u dV &= \frac{lA\rho}{2} \ddot{u}_k^T \int_{-1}^1 \underline{N} \underline{N}^T dr \delta \underline{u}_k \\ &= \ddot{u}_k^T \frac{lA\rho}{30} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ & 16 & 2 \\ \text{对称} & & 4 \end{pmatrix} \delta \underline{u}_k \end{aligned}$$

同理有

$$\int_{V_k} \rho \dot{w} \delta w dV = \dot{w}_k^T \cdot \frac{lA\rho}{30} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ & 16 & 2 \\ \text{对称} & & 4 \end{pmatrix} \delta \underline{w}_k$$

将以上结果代入 (2) 式中, 并注意到 $\delta \underline{u}_k, \delta \underline{w}_k$ 的任意性, 可得

$$\frac{lA\rho}{30} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ & 16 & 2 \\ \text{对称} & & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_{2k-1} \\ \ddot{u}_{2k} \\ \ddot{u}_{2k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{2k-1} + \frac{A}{4}(\sum_{k1} - 2\sum_{k2}) \\ A\sum_{k2} \\ p_{2k+1} - \frac{A}{4}(\sum_{k1} + 2\sum_{k2}) \end{pmatrix} \quad (3)$$

及

$$\frac{2l\rho}{15} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ & 16 & 2 \\ \text{对称} & & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{w}_{2k-1} \\ \ddot{w}_{2k} \\ \ddot{w}_{2k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2h}{l} \Sigma_{k3} + (\Sigma_{k1} - 2\Sigma_{k5}) \\ -\frac{4h}{l} \Sigma_{k3} - 4\Sigma_{k5} \\ \frac{2h}{l} \Sigma_{k3} - (\Sigma_{k1} + 2\Sigma_{k5}) \end{bmatrix} \quad (4)$$

将(3)、(4)两式对所有单元组装,得

$$\begin{cases} \frac{lA\rho}{30} \underline{k} \cdot \underline{\ddot{u}} = \underline{D}_1 \\ \frac{2l\rho}{15} \underline{k} \cdot \underline{\ddot{w}} = \underline{D}_2 \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\underline{u} = (u_1, \dots, u_{2n+1})^T$, $\underline{w} = (w_1, \dots, w_{2n+1})^T$, \underline{k} 为 $(2n+1)$ 阶半总刚矩阵。

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & & & & & & & \\ & 2 & 16 & 2 & & & & 0 & & & \\ & -1 & 2 & 8 & 2 & -1 & & & & & \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ & & & & & -1 & 2 & 8 & 2 & -1 & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & 2 & 16 & 2 \\ & & & & & & & & & & & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D}_1 = \begin{bmatrix} p_1 + \frac{A}{4} (\Sigma_{11} - 2\Sigma_{12}) \\ A\Sigma_{12} \\ -\frac{A}{4} (\Sigma_{11} + 2\Sigma_{12}) + \frac{A}{4} (\Sigma_{21} - 2\Sigma_{22}) \\ \vdots \\ -\frac{A}{4} (\Sigma_{n-1,1} + 2\Sigma_{n-1,2}) + \frac{A}{4} (\Sigma_{n,1} - 2\Sigma_{n,2}) \\ A\Sigma_{n,2} \\ -\frac{A}{4} (\Sigma_{n,1} + 2\Sigma_{n,2}) + p_{2n+1} \end{bmatrix}$$

$$\underline{D}_2 = \begin{bmatrix} \frac{2h}{l} \Sigma_{13} + (\Sigma_{11} - 2\Sigma_{15}) \\ -\frac{4h}{l} \Sigma_{13} + 4\Sigma_{15} \\ \frac{2h}{l} \Sigma_{13} - (\Sigma_{11} + 2\Sigma_{15}) + \frac{2h}{l} \Sigma_{23} + (\Sigma_{21} - 2\Sigma_{25}) \\ \vdots \\ (2h/l) \Sigma_{n-1,3} - (\Sigma_{n-1,1} + 2\Sigma_{n-1,5}) + (2h/l) \Sigma_{n,3} + (\Sigma_{n,1} - 2\Sigma_{n,5}) \\ -\frac{4h}{l} \Sigma_{n,3} + 4\Sigma_{n,5} \\ \frac{2h}{l} \Sigma_{n,3} - (\Sigma_{n,1} + 2\Sigma_{n,5}) \end{bmatrix}$$

2. 应力应变关系

设材料为等向强化, 单轴应力应变曲线如图 2 所示, 当塑性状态下没有卸载时,

$$\sigma = \text{sign}(\varepsilon) f(|\varepsilon - \varepsilon_p|)$$

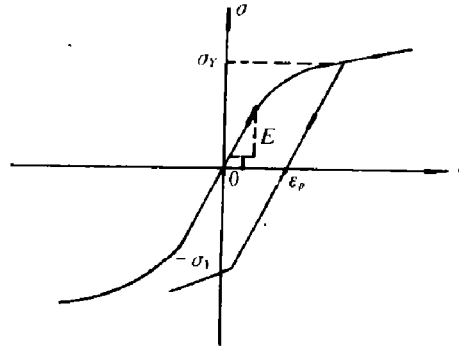


图 2
Fig. 2

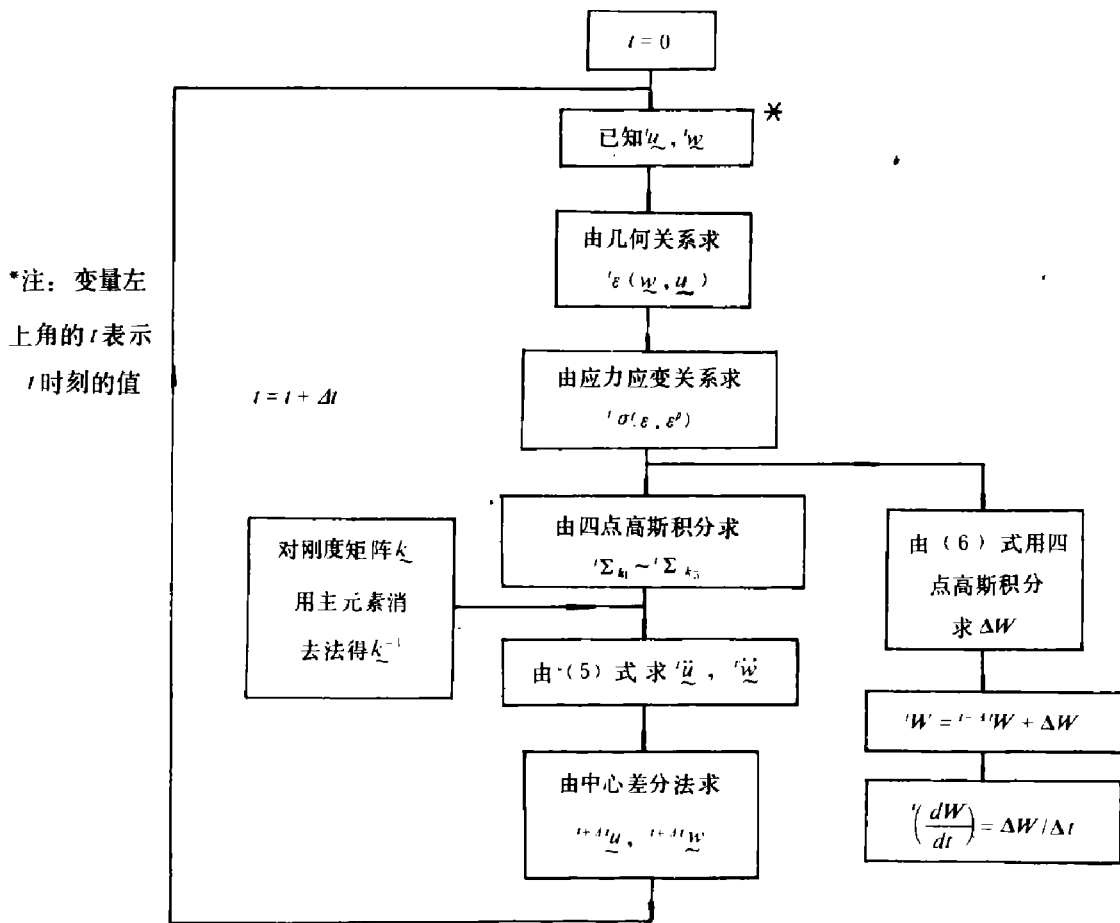


图 3
Fig. 3

ε_p 为塑性应变。若在塑性状态下卸载，则有增量形式

$$\Delta\sigma = \begin{cases} E\Delta\varepsilon & |\varepsilon - \varepsilon_p| < \sigma_Y/E \text{ 或 } |\varepsilon - \varepsilon_p| = \sigma_Y/E, \text{ 且 } \sigma \cdot \Delta\varepsilon \leq 0 \\ f'(|\varepsilon - \varepsilon_p|)\Delta\varepsilon & |\varepsilon - \varepsilon_p| = \sigma_Y/E, \text{ 且 } \sigma \cdot \Delta\varepsilon > 0 \end{cases}$$

其中 E 为 Young's 模量， σ_Y 为材料现时屈服极限，与塑性应变历史有关，可跟踪变形过程求得。

3. 变形功

单轴应力状态下单位体积的变形功增量为

$$\Delta(W/V) = \sigma \cdot \Delta\varepsilon + \frac{1}{2} \cdot \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon$$

其中 W 为变形功， V 为体积。将图 1 中的杆离散化后有

$$\Delta W = \sum_{k=1}^n lA/4 \cdot \int_{-l}^l (\sigma_k \cdot \Delta\varepsilon_k + \frac{1}{2} \Delta\sigma_k \cdot \Delta\varepsilon_k) dr ds \quad (6)$$

4. 程序流程图 (见图 3)

三、算 例

设杆材为铝合金 (LY 8)，单轴拉伸曲线可以简化为三线性模型 (见图 4)。取杆长 $L = 400 \text{ mm}$ ，横截面积 $A = 10 \times 2.5 \text{ mm}^2$ ，单元数 $n = 20$ ，单元长 $l = 20 \text{ mm}$ ，时间差分步长 $\Delta t = 0.25 \mu\text{s}$ ，考虑两端简支边界条件，在图 1 中设

$$w_0(x) = a \sin(m\pi x/L) \quad (7)$$

$$p(t) = \begin{cases} p_0 t/t_0 & t < t_0 \\ p_0 & t \geq t_0 \end{cases} \quad (8)$$

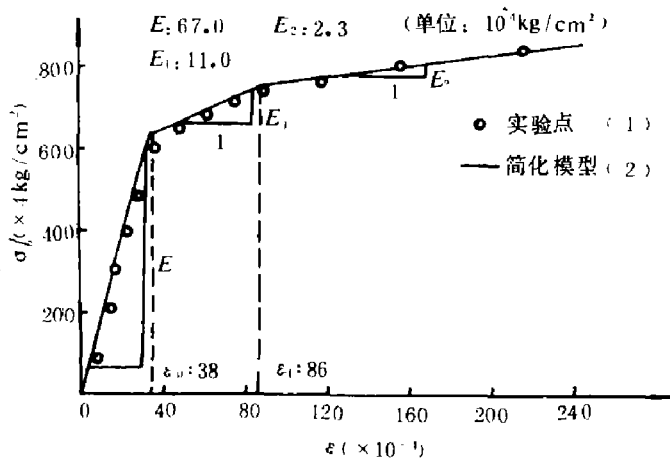


图 4
Fig. 4

- (1) Experimental point
- (2) Simplified model

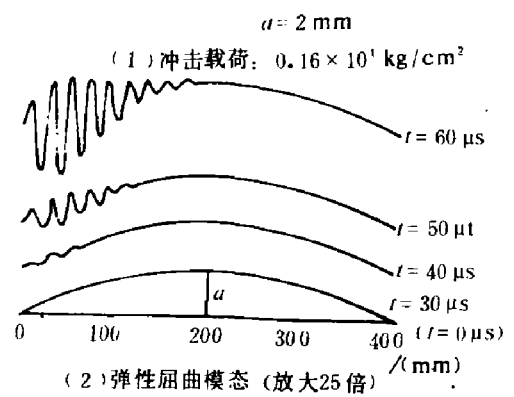


图 5
Fig. 5

- (1) Impact loading: $0.16 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$
- (2) Elastic buckling module ($\times 25$)

其中 m 为正整数, t_0 为载荷上升时间。 P_0/A 为单位面积上的冲击载荷,取 $P_0/t_0 = 0.02A \text{ kg/cm}^2$,分别改变初缺陷大小参数 a ,形状参数 m ,以及冲击载荷 P_0/A ,计算不同时刻的屈曲模态及变形功 W ,作图可得图5~8,从图可见,某一特定时刻后,屈曲模态明显增大,且变形功以接近常数的斜率迅速增加,取为屈曲时间 t_{cr} ,如图6所示。由于变形功是杆件的总体变形积累的度量,故它的急剧增长可以作为屈曲判据。考虑初缺陷大小、形状及冲击载荷大小对屈曲时间的影响,得到图9、10。

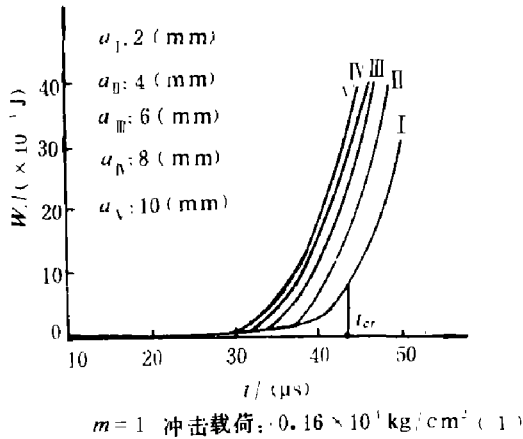


图 6
Fig. 6

(1) Impact loading: $0.16 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$

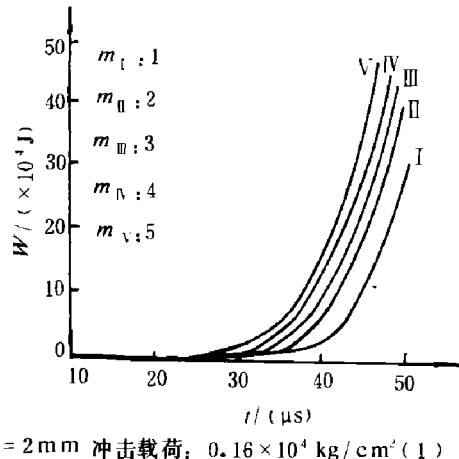


图 7
Fig. 7

(1) Impact loading: $0.16 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$

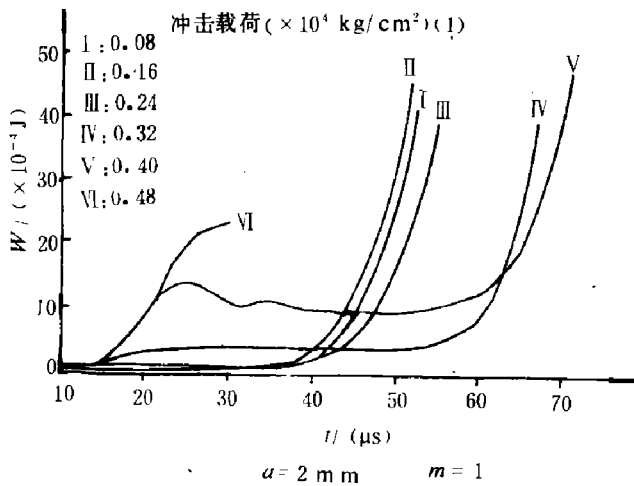


图 8
Fig. 8

(1) Impact loading ($\times 10^4 \text{ kg/cm}^2$)

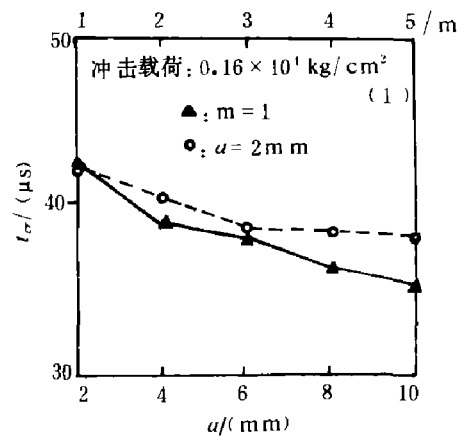


图 9
Fig. 9

(1) Impact loading: $0.16 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$

四、讨论与结论

图5中的各时刻屈曲模态不同，并且杆中横向扰动波自左向右扩散，图中看到，波前速度约为5000 m/s，与弹性纵波波速 $(\sqrt{E/\rho} = 1987 \text{ m/s})$ 一致，说明纵波所到处将伴随产生横向扰动，且扰动幅度随时间有无限增大的趋势。

由图9可知，初缺陷形状波数 m 一定时，随峰值 a 的增大，屈曲时间 t_{cr} 减小，且减小幅度渐缓 (a 由2 mm 增到1 mm 时， t_{cr} 约减小1 μs ， a 由1 mm 增到10 mm 时，每隔2 mm t_{cr} 减小约为2 μs)，若峰值 a 一定，随波数 m 的增加，屈曲时间同样减小，减小幅度也逐渐趋缓 (m 在1~3之间，每增加1， t_{cr} 减小约2.5 μs ， $m=3$ 时， t_{cr} 变化很小)。相对来说，初缺陷大小比形状对屈曲时间的影响要大。

一定初缺陷下，不同冲击载荷对变形功曲线的影响比较大，如图8所示，随冲击载荷的增大，杆进入塑性状态，会出现二次屈曲现象，第一次屈曲时间在15 μs 左右，经过一较长“平台”后发生二次屈曲，第二次屈曲时间较大 (超过60 μs)，这与实验观察到的现象一致。由于塑性波速为 $c_p = \sqrt{E_1/\rho} = 2021 \text{ m/s}$ ，故发生二次屈曲时塑性波前距冲击端大约为130 mm 左右，此时弹性波没有到达杆的另一端，故杆中没有卸载波出现，这实际上相当于半无限长杆的情形。实验观察表明，对于较短的杆，远端反射波会影响屈曲的发生和发展，这种影响依赖于远端的边界条件。本文讨论的是两端简支杆的实例，对于两端自由 (飞杆的情形)，或远端固支等情形可同样按以上方法进行分析。如当杆的冲击端自由，另一端固支时，可以假定杆的初始缺陷为如下形式

$$w_0 = a \sin(m\pi x / 2L)$$

式中 m 为奇数，代入程序进行计算即可。

综上所述，可得以下结论：

1. 动态屈曲最终模态由横向扰动波形发展而成。
2. 随时间增大，变形功存在着突变，这种突变和屈曲时间相关。
3. 冲击载荷一定时，初缺陷峰值和波数的增大，使屈曲时间减小，且前者对屈曲时间的影响比后者大。

1. 塑性情形下会有二次屈曲现象，两次屈曲时间间隔较长。

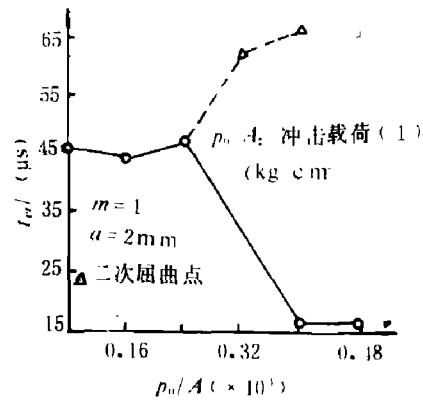


图 10

Fig. 10

(1) P_0/A : Impact loading (kg/cm²)

参 考 文 献

[1] Komng, C., Taub, J., NACA TM 718, (1931).
 [2] Meier, J. H., *Journal of the AERO. SCIE.*, 12 (1945), 433.

- [3] Hoff, N. J., *ASME Journal of Appl. Mech.*, **18** (1) (1951), 68.
- [4] Abrahamson, R., Goodier, J. N., *ASME Journal of Appl. Mech.*, **33** (1966), 241.
- [5] Lee, L. H. N., *Journal of Applied Mechanics*, **45** (1978), 100.
- [6] Jones, N. et al., *Int. J. Solids struct.*, **16** (11) (1980), 969.
- [7] Hayashi, T. et al., *Bulletin JSME*, **15** (89) (1972), 1333.
- [8] Ari-Gur, J. et al., *Int. J. Solids struct.*, **17** (1982), 619.
- [9] 揭 敏, 杆在轴向冲击下的动态屈曲现象中的波动效应, 北京大学硕士研究生毕业论文 (1988)。

FINITE ELEMENT CALCULATION ON ELASTIC-PLASTIC DYNAMIC BUCKLING OF A BAR WITH FINITE INITIAL IMPERFECTION UNDER AXIAL IMPACT

Jie Min

(Huazhong University of Science and Technology)

ABSTRACT Using the finite element method, the dynamic buckling of a bar with finite initial imperfection under axial impact is analyzed in this paper. The buckling time is solved through a deformation work dependence buckling criterion. The effects of the shape and magnitude of initial imperfection and impact load on the buckling time are also calculated.

KEY WORDS dynamic buckling, buckling criterion, axial impact