

分析薄壳塑性动力响应问题的一种数值方法*

刘福林

(辽宁大学)

摘要 探索薄壳塑性动力响应问题的分析与数值方法,是当今力学中的重要课题之一。笔者曾给出联合应用拉普拉斯变换和最小二乘法分析梁、板、壳塑性动力响应的方法。本文分别针对承受中载的短壳和长壳问题,给出只用最小二乘法分析其塑性动力响应的方法。

关键词 短壳 长壳 塑性动力响应 最小二乘法

1. 引言

塑性动力响应问题是塑性动力学中的重要问题。在塑性力学及塑性动力学问题中,不但物理上是非线性的,而且一般都要处理大变形,在几何上也常是非线性的,因此在问题的分析上造成很大困难^[1,2],所以探索其分析与数值方法是极为重要的。最小二乘法在固体力学中已有广泛应用^[3],但在塑性动力学问题中应用还不多。近几年来,笔者曾结合梁、板、壳的塑性动力响应问题,给出联合应用拉普拉斯变换和最小二乘法的分析方法^[4-6]。上述方法对某些梁、板、壳塑性动力响应问题的分析较方便,但对长壳和高载问题,由于塑性铰环是移动的,不便于进行拉普拉斯变换及其逆变换。鉴于上述情况,本文分别以承受中载的短壳和长壳的塑性动力响应问题为例,给出只用最小二乘法的分析方法。

2. 数值方法

本文主要针对壳体的如下基本方程,应用最小二乘法进行求解。

运动方程

$$\sigma_{,i,i} + F_i - \rho \ddot{u}_i = 0 \quad (\text{在 } V \text{ 内})$$

屈服条件

$$\varphi(\sigma_{,ij}) \leq 0 \quad (\text{在 } V + S \text{ 上})$$

塑性流动法则

$$\dot{\varepsilon}_{,ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{,ij}} \quad \dot{\lambda} \geq 0$$

运动边界条件

$$u_i = \hat{u}_i, \quad \dot{u}_i = \hat{\dot{u}}_i \quad (\text{在 } S_u \text{ 上})$$

应力边界条件

$$\sigma_{,ij} n_j = \hat{T}_i \quad (\text{在 } S_T \text{ 上})$$

* 辽宁省教委科学基金资助的课题。

1990年3月3日收到原稿,9月1日收到修改稿。

初始条件

$$u_i = u_i^0, \quad \dot{u}_i = \dot{u}_i^0 \quad (t = t_0)$$

式中 V 为结构的体积、 S 为其表面; $\varphi(\sigma_{ij}) = 0$ 为屈服函数; t_0 为结构运动的初始时间。

应用本文方法求解, 首先假设试函数

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sum_{k=1}^{n_1} a_k N_k, \quad \tilde{u} = \sum_{k=n_1+1}^{n_2} a_k N_k \quad (n_2 > n_1)$$

式中 a_k 为待定系数, N_k 为试函数项。一般情况, 所假设的试函数满足边界条件与塑性流动法则, 此时由试函数、运动方程及屈服条件可得到内部余量 R 。再应用最小二乘法消除余量

$$\int_V R \frac{\partial R}{\partial a_j} dV = 0, \quad j = 1, 2, \dots$$

由此方程组及初始条件就可确定出全部待定系数, 进而求出问题的近似解。

3. 模型及符号说明

设圆柱壳两端固支, 长为 $2L$, 半径为 a , 厚度为 $2h$, 如图 1(a)。材料为理想刚塑性的。壳体在 $t=0$ 时刻开始承受均布冲击荷载 $p(t) = p$ 的作用, 作用时间为 t_0 。壳体元素内力如图 1(b)。

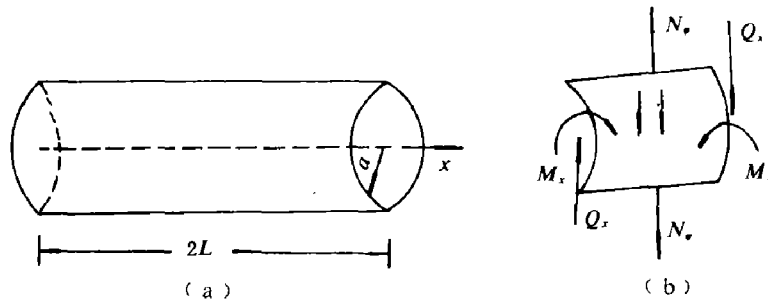


图 1

Fig. 1

文中采用柱壳的弱作用屈服条件, 如图 2。

符号说明:

$$\left\{ \begin{array}{ll} m = M_x / M_0, & n = N_x / N_0 \\ \tau = t / t_0, & P = pa / N_0 \\ y = x / L, & C = L / \sqrt{ah} \\ M_0 = \sigma_0 h^2, & N_0 = 2\sigma_0 h \\ W = (\mu a \omega) / (N_0 t_0^2), & m'' = \partial^2 m / \partial y^2 \\ \dot{W} = \partial W / \partial \tau, & \ddot{W} = \partial^2 W / \partial \tau^2 \end{array} \right. \quad (1)$$

其中 μ 为单位中面面积上壳体的质量, ω 为壳体中面法线方向位移, C 为壳体的长度参数, σ_0 为极限应力。取壳体左端面处为坐标原点, 并以一半壳体为研究对象, 即 $0 \leq y \leq 1$ 。

壳体静态塑性格式为图 2 中的 AB 边 ($n = -1$)^[2], 静态极限载荷为

$$P_0 = 1 + 2/C^2 \quad (2)$$

4. 用最小二乘法分析短壳塑性动力响应

当 $P \geq P_0$ 时，壳体开始产生运动。对于短壳和中载，壳体的运动可分为如下两个阶段

1. 第一阶段 ($0 \leq \tau \leq 1$)

运动方程

$$\frac{m''}{2C^2} + n + P = \ddot{W} \quad (3)$$

屈服条件：由于是短壳和中载，设塑性格式与静态的塑性格式相同

$$n = -1 \quad (4)$$

相应的广义应变率为

$$\dot{W}'' = 0 \quad (5)$$

边界条件

$$\begin{cases} m(0) = -1, & m(1) = 1 & (6) \\ m'(1) = 0 & (7) \\ W(0, \tau) = 0, & \dot{W}(0, \tau) = 0 & (8) \end{cases}$$

初始条件

$$W(y, 0) = 0, \quad \dot{W}(y, 0) = 0 \quad (9)$$

设试函数

$$\begin{cases} \tilde{m} = -1 + 2y + a_1 y(1-y) + a_2 y^2(1-y) & (10) \\ \tilde{W} = a_3 y & (11) \end{cases}$$

其中 a_i 为待定系数。(11) 式已满足 (5) 式及边界条件 (8) 式；(10) 式满足边界条件 (6) 式，但还不一定满足 (7) 式。由边界条件 (7) 式及试函数 (10) 式，得

$$a_1 + a_2 = 2 \quad (12)$$

将试函数 (10)、(11) 式与屈服条件 (4) 式代入运动方程 (3) 式，并注意到 $\ddot{W} = \ddot{\tilde{W}} = \ddot{a}_3 y$ ，得到余量

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{\tilde{m}''}{2C^2} - 1 + P - \ddot{\tilde{W}} \\ &= \frac{1}{2C^2} (-2a_1 + 2(1-3y)a_2) + (P-1) - \ddot{a}_3 y \end{aligned} \quad (13)$$

采用最小二乘法消除余量^[3]

$$\int_0^1 (\partial R_1 / \partial a_1) R_1 dy = 0; \quad a_1 + 2a_2 + C^2 \ddot{a}_3 = C^2 (P-1) \quad (14)$$

$$\int_0^1 (\partial R_1 / \partial \ddot{a}_3) R_1 dy = 0; \quad 3a_1 + 9a_2 + 4C^2 \ddot{a}_3 = 3C^2 (P-1) \quad (15)$$

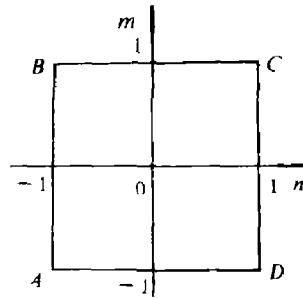


图 2

Fig. 2

由 (12)、(14)、(15) 式, 求出三个待定系数

$$\begin{cases} a_1 = 1 + \frac{C^2}{4}(P-1) \\ a_2 = 1 - \frac{C^2}{2}(P-1) \\ \ddot{a}_3 = \frac{3}{C^2} \left[\frac{C^2}{2}(P-1) - 1 \right] \end{cases} \quad (16)$$

由初始条件 (9) 式及试函数 (11) 式, 并注意到 $\tilde{W} = \dot{\tilde{W}} = \dot{a}_3 y$, 得到 $a_3(\tau)$ 的初值及具体表达式

$$\begin{aligned} a_3(0) &= 0, \quad \dot{a}_3(0) = 0 \\ a_3(\tau) &= \frac{3}{2C^2} \left[\frac{C^2}{2}(P-1) - 1 \right] \tau^2 \end{aligned} \quad (17)$$

将 a_1 、 a_2 、 a_3 代回试函数 (10)、(11) 式, 得壳体第一阶段运动的塑性格式

$$\begin{cases} m = -1 + \left[3 + \frac{C^2}{2}(P-1) \right] y - C^2(P-1)y^2 + \left[\frac{C^2}{2}(P-1) - 1 \right] y^3 \\ n = -1 \\ W = \frac{3}{2C^2} \left[\frac{C^2}{2}(P-1) - 1 \right] \tau^2 y \\ \dot{W} = \frac{3}{C^2} \left[\frac{C^2}{2}(P-1) - 1 \right] \tau y, \quad 0 \leq \tau \leq 1 \end{cases} \quad (18)$$

2. 第二阶段 ($1 \leq \tau \leq \tau_f$)

当 $\tau=1$ 时荷载卸去, 壳体进入第二阶段运动。由于考虑短壳和中载, 该阶段的塑性格式与第一阶段相同, 边界条件也相同, 只是运动方程和初始条件不同。

运动方程

$$\frac{m''}{2C^2} + n = \dot{W} \quad (19)$$

初始条件

$$\begin{cases} W(y, 1) = \frac{3}{2C^2} \left[\frac{C^2}{2}(P-1) - 1 \right] y \\ \dot{W}(y, 1) = \frac{3}{C^2} \left[\frac{C^2}{2}(P-1) - 1 \right] y \end{cases} \quad (20)$$

仍设 (10)、(11) 式为试函数, 且有 (12) 式成立。将 (10)、(11) 式与 (4) 式代入 (19) 式, 得余量

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{\tilde{m}''}{2C^2} - 1 - \tilde{W} \\ &= \frac{1}{C^2} [-a_1 + (1-3y)a_2] - 1 - \dot{a}_3 y \end{aligned} \quad (21)$$

消除余量

$$\int_0^1 \frac{\partial R_2}{\partial a_1} R_2 dy = 0; \quad a_1 + 2a_2 + C^2 \ddot{a}_3 = -C^2 \quad (22)$$

$$\int_0^1 \frac{\partial R_2}{\partial \ddot{a}_3} R_2 dy = 0; \quad 3a_1 + 9a_2 + 4C^2 \ddot{a}_3 = -3C^2 \quad (23)$$

由 (12)、(22)、(23) 式, 得

$$\begin{cases} a_1 = 1 - C^2/2, & a_2 = 1 + C^2/2 \\ \ddot{a}_3 = -\frac{3}{C^2} \left(1 + \frac{C^2}{2}\right) \end{cases} \quad (24)$$

由初始条件 (20) 式及试函数 (11) 式, 得 $a_3(\tau)$ 的初始条件

$$\begin{cases} a_3(1) = \frac{3}{2C^2} \left[\frac{C^2}{2} (P-1) - 1 \right] \\ \dot{a}_3(1) = \frac{3}{C^2} \left[\frac{C^2}{2} (P-1) - 1 \right] \end{cases} \quad (25)$$

由 (24)、(25) 式, 求出 $a_3(\tau)$ 的具体表达式

$$a_3(\tau) = -\frac{3}{2C^2} \left(1 + \frac{C^2}{2}\right) \tau^2 + \frac{3}{2} P \tau - \frac{3}{4} P \quad (26)$$

将待定系数代回试函数 (10)、(11) 式, 得到壳体第二阶段的塑性动力响应

$$\begin{cases} m = -1 + \left(3 - \frac{C^2}{2}\right) y + C^2 y^2 - \left(1 + \frac{C^2}{2}\right) y^3 \\ n = -1 \\ W = \left[-\frac{3}{2C^2} \left(1 + \frac{C^2}{2}\right) \tau^2 + \frac{3}{2} P \tau - \frac{3}{4} P\right] y \\ \dot{W} = \left[-\frac{3}{C^2} \left(1 + \frac{C^2}{2}\right) \tau + \frac{3}{2} P\right] y, \quad 1 \leq \tau \leq \tau_f \end{cases} \quad (27)$$

在 (27) 式中令 $\dot{W}(y, \tau_f) = 0$, 得壳体停止运动时间

$$\tau_f = \frac{PC^2}{2+C^2} = P/P_0 \quad (28)$$

(18)、(27) 式需满足所选择的塑性格式 AB 的条件。为使在 $0 \leq y \leq 1$ 区域内有 $-1 \leq m \leq 1$, 由 (18)、(27) 式, 得

$$\begin{cases} P_0 < P \leq P_1 = P_0 + 4/C^2 & (\text{中载}) \\ 0 < C^2 \leq 6 & (\text{短壳}) \end{cases} \quad (29)$$

5. 用最小二乘法分析长壳塑性动力响应

当 $C^2 > 6$ 时, 壳体为长壳。下面, 仍用最小二乘法分析长壳在中载条件下的塑性动力响应。

1. 第一阶段 ($0 \leq \tau \leq 1$)

由于荷载仍为中载, 故第一阶段的运动规律与短壳相同, 即仍为 (18) 式。

2. 第二阶段 ($1 \leq \tau \leq \tau_f$)

若仍选择塑性格式 AB , 则结果为 (27) 式。但在 $C^2 > 6$ 的条件下, 由 (27) 式有 $m'(0) = 3 - (C^2/2) < 0$, 这表明在 $y=0$ 附近将有 $m < -1$ 的区域, 这是不许可的。因此, 需要另选择塑性格式。

运动方程和初始条件与短壳情况相同, 即仍为 (19)、(20) 式, 而塑性格式^[2]

$$\begin{cases} m = -1, & \dot{W} = 0, & 0 \leq y \leq u(\tau) \\ n = -1, & \dot{W}'' = 0, & u(\tau) \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (30)$$

其中 $u(\tau)$ 表示塑性铰环的位置, 且 $u(\tau)$ 从零开始扩展。

(1) $0 \leq y \leq u(\tau)$

由运动方程 (19) 式和塑性格式 (30) 式, 得

$$m = -1, \quad n = 0, \quad \dot{W} = 0 \quad (31)$$

(2) $u(\tau) \leq y \leq 1$

边界条件

$$\begin{cases} m(u) = -1, & m'(u) = 0 \\ m(1) = 1, & m'(1) = 0 \\ \dot{W}(u, \tau) = 0 \quad (\text{连续条件}) \end{cases} \quad (32)$$

设试函数

$$\begin{cases} \tilde{m} = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 \\ \tilde{W} = a_4 (y - u) \end{cases} \quad (33)$$

$$\tilde{W} = a_4 (y - u) \quad (34)$$

其中 (34) 式满足边界条件 (32) 式中的第 5 式, 而 (33) 式中的待定系数可直接由 (32) 式中的前 4 式确定

$$m(u) = -1: \quad a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 = -1 \quad (35)$$

$$m'(u) = 0: \quad a_1 + 2a_2 u + 3a_3 u^2 = 0 \quad (36)$$

$$m(1) = 1: \quad a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 \quad (37)$$

$$m'(1) = 0: \quad a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \quad (38)$$

由 (35)~(38) 式, 求出

$$\begin{cases} a_0 = 1 - 2(1 - 3u)(1 - u)^{-3} \\ a_1 = -12u(1 - u)^{-3} \\ a_2 = 6(1 + u)(1 - u)^{-3} \\ a_4 = -4(1 - u)^{-3} \end{cases} \quad (39)$$

将试函数 (33)、(34) 式代入运动方程 (19) 式, 并注意到

$$\tilde{W} = \dot{\tilde{W}} = \dot{a}_4(y-u) - a_4 \dot{u}$$

得余量

$$\begin{aligned} R_3 &= \frac{\tilde{m}''}{2C^2} - 1 - \tilde{W} \\ &= \frac{1}{C^2}(a_2 + 3a_3 y) - 1 - \dot{a}_4(y-u) + a_4 \dot{u} \end{aligned} \quad (40)$$

消除余量

$$\int_u^1 \frac{\partial R_3}{\partial a_4} R_3 dy = 0: \quad (1-u)\dot{a}_4 - 2\dot{u}a_4 = -2 \quad (41)$$

$$\int_u^1 \frac{\partial R_3}{\partial \dot{a}_4} R_3 dy = 0: \quad 2(1-u)\dot{a}_4 - 3\dot{u}a_4 = -3 - \frac{6}{C^2}(1-u)^{-2} \quad (42)$$

由(41)、(42)式, 得

$$\begin{cases} a_4 = \frac{6}{C^2 \dot{u}} \left[\frac{C^2}{6} - (1-u)^{-2} \right] & (43) \\ \dot{a}_4 = -\frac{12}{C^2} (1-u)^{-3} & (44) \end{cases}$$

将(39)、(43)式代回试函数(33)、(34)式, 得长壳第二阶段中区域 $u(\tau) \leq y \leq 1$ 内的塑性动力响应

$$\begin{cases} m = 1 + [-2(1-3u) - 12uy + 6(1+u)y^2 - 4y^3](1-u)^{-3} \\ n = -1 \\ \dot{W} = \frac{1}{C^2 \dot{u}} \left[\frac{C^2}{6} - (1-u)^{-2} \right] (y-u) \\ 1 \leq \tau \leq \tau_1, \quad u \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (45)$$

下面研究 $u(\tau)$ 的变化规律: 由(43)式, 得

$$\dot{a}_4 = (a_4)_{,\tau} = -\frac{6\ddot{u}}{C^2 \dot{u}^2} \left[\frac{C^2}{6} - (1-u)^{-2} \right] - \frac{12}{C^2} (1-u)^{-3} \quad (46)$$

与(44)式比较, 得

$$\frac{6\ddot{u}}{C^2 \dot{u}^2} \left[\frac{C^2}{6} - (1-u)^{-2} \right] = 0 \quad (47)$$

由于 $\dot{W} \neq 0$, 由(45)式知上式中方括号内的值不能为零, 所以, 只有

$$\ddot{u}(\tau) = 0 \quad (48)$$

这是 $u(\tau)$ 所满足的微分方程。根据 $u(\tau)$ 的一个初始条件

$$u(1) = 0 \quad (49)$$

及初始条件(20)式、 \dot{W} 的表达式(45)式, 得 $u(\tau)$ 的另一个初始条件

$$\dot{u}(1) = (1/3)(C^2 - 6)[(C^2/2)(P-1) - 1]^{-1} \quad (50)$$

由(48)~(50)式,得 $u(\tau)$ 的变化规律

$$u(\tau) = \frac{1}{3}(C^2 - 6) \left[\frac{C^2}{2}(P-1) - 1 \right]^{-1} (\tau - 1) \quad (51)$$

在(45)式中令 $\dot{W}(y, \tau_f) = 0$, 可得壳体运动的停止时间

$$\tau_f = 1 + \frac{3}{C(C + \sqrt{6})} \left[\frac{C^2}{2}(P-1) - 1 \right] \quad (52)$$

6. 结语

1. 本文将最小二乘法初次单独应用于壳体的塑性动力响应问题中, 短壳与长壳的计算结果(18)、(27)、(28)、(31)、(45)、(51)、(52)式, 与文献〔2〕中结果一致。由此看出, 本文的方法是可行的。

2. 文中对弯矩和挠度(或速度)分别选择三次和一次多项式为试函数, 试函数简单, 计算结果合理、准确, 由此显示出本文方法的优越性。

3. 用本文方法分析壳体塑性动力响应问题, 关键在于试函数的选择。在已知解的基本形式的情况下, 试函数的形式也便于选取。如果问题的解是未知的, 一方面可根据边界条件选取试函数, 如本文中的(10)、(11)、(34)式, 这也容易选取; 另一方面, 若由边界条件不易看出试函数的形式, 则可用适当项的幂级数来选取试函数, 如本文中的(33)式, 此时可由边界条件和最小二乘法确定出所有的待定系数。

4. 本文的例题为承受中载的圆柱壳问题, 对于承受高载的圆柱壳问题, 应用本文方法也容易求解。由于承受高载的圆柱壳与承受中载的长壳问题都存在移动的塑性铰环, 所以, 承受高载的圆柱壳问题的解法及步骤, 与本文中长壳例题相类似。

5. 本文方法便于分析较复杂的壳体塑性动力响应问题。虽然文中的两道例题均为圆柱壳, 而对于一般形状的壳体本文方法也是适用的。对于一般形状的壳体, 只要运动方程、几何方程及边界条件可知, 再适当地选择出合理的塑性格式(对于塑性动力学问题, 不管用什么样的方法, 此步必不可少), 按6.3节的说明, 试函数容易假设, 应用本文方法也容易求出近似解。

6. 在文献〔4〕~〔6〕中, 笔者给出了联合应用拉普拉斯变换和最小二乘法的分析方法, 此法对于某些梁、板、壳塑性动力响应问题的分析较方便, 避免求解待定系数对时间 τ 的一阶和二阶的常微分方程。但对于长壳和高载问题, 由于塑性铰环是移动的, 不便于进行拉氏变换及其逆变换。此时, 应用本文方法就不会遇到上述问题。

参 考 文 献

- [1] 王仁、黄克智、朱兆祥主编, 塑性力学进展, 中国铁道出版社, 北京(1988), 1。
- [2] 杨桂通、熊祝华编著, 塑性动力学, 清华大学出版社, 北京(1984), 231。
- [3] 徐次达编著, 固体力学加权残值法, 同济大学出版社, 上海(1987), 2。
- [4] 刘福林, 机械强度, 11(1)(1989), 48。
- [5] 刘福林, 爆炸与冲击, 10(2)(1990), 118。
- [6] 刘福林, 力学与实践, 12(1)(1990), 46。

A NUMERICAL METHOD OF ANALYSING PLASTIC DYNAMIC RESPONSE OF THIN SHELLS

Liu Fulin

(Liaoning University)

ABSTRACT Studies of the analytic and numerical methods of plastic dynamic response of thin shells are the important problems in mechanics nowadays. The author had given a method of combined the Laplace transform and the least square method to solve the problems of beams, plates and shells years before. In this paper, only by the least square method, the problems of the plastic dynamic response of short and long shells under uniform distributed and middle loaded impacts are solved as examples.

KEY WORDS short shell, long shell, plastic dynamic response, least square method