

# 用 Eshelby 理论研究复合材料 线粘弹性本构关系

杨黎明 王礼立

(中国科技大学)

**摘要** 本文用 Eshelby 微力学理论分析,得到短纤维增强材料(SFRC)和基体材料两者的粘弹性本构方程之间存在简单的正比关系.发现体积含量为  $f$  的短纤维无序取向 SFRC 一维力学行为,等效于体积含量为  $F$  的短纤维单轴取向 SFRC 在取向轴上的力学行为.

**关键词** 复合材料 微力学 粘弹性本构方程

## 1. 引言

随着五十年代微力学(Micromechanics)的兴起,特别是近年来宏微观相结合的理论体系不断发展和逐步完善,含微结构材料力学性能的研究也越来越活跃<sup>[1-6]</sup>.其中 Eshelby 理论<sup>[7,8]</sup>在含细小颗粒或短纤维的复合材料本构关系的研究领域中一直得到普遍关注,并不断得到应用和改进<sup>[2]</sup>.但这一理论主要限于复合材料的基体和纤维都是线弹性的情况.

我们对短纤维增强塑料在高应变率下动态力学性能的试验研究表明<sup>[9]</sup>,在轴向应变  $\epsilon < 7\%$  的范围内,材料的本构非线性和应变率相关性(粘弹性)都是不可忽略的.而令人感兴趣的是发现增强材料的本构关系可以简单地由高聚物基体的非线性粘弹性本构方程

$$\begin{aligned} \sigma_M = & E_0 \epsilon + \alpha \epsilon^2 + \beta \epsilon^3 + E_1 \int_0^t \dot{\epsilon} \cdot \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_1}\right) d\tau \\ & + E_2 \int_0^t \dot{\epsilon} \cdot \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta}\right) d\tau + \eta \dot{\epsilon} \end{aligned} \quad (1)$$

与一个依赖于增强纤维特性的常量  $G$  的乘积来决定,即有

$$\sigma_c = G \cdot \sigma_M(\epsilon, \dot{\epsilon}) \quad (2)$$

式中,  $\sigma_M(\epsilon, \dot{\epsilon})$  满足基体的本构关系式(1).对这一试验研究结果,我们从微力学角度作进一步的理论研究,它包括两部份:第一部份先计及应变率相关性而忽略本构非线性,这相当于把式(1)中表征非线性响应的  $\epsilon^2$ 、 $\epsilon^3$  项暂先略去;第二部份再计及本构非线性.本文是这一研究的第一部份.若把增强纤维看作细长小椭球,则从原则上说 Eshelby 理论已为解决这一阶段问题提供了方法,但本文所得到的具体结果是新的,不仅对高应变率条件适用,原则上对任意载荷条件也是普遍适用的,在本文研究基础上进一步得到的第二部份结果将另文发表.

## 2. Eshelby 线弹性微力学理论

1990年11月3日收到原稿,1991年3月18日收到修改稿.

先回顾一下与研究 SFRC 的粘弹性本构方程有关的 Eshelby 理论的基本点, 考察一无限大均匀线弹性介质所包含的单个同质椭球状包含体 (inclusion), 在外力  $\sigma^0$  作用下, 包含体和基体有相同的均匀应变  $\varepsilon^0$ , 并满足虎克定律

$$\sigma_{ij}^0 = M_{ijkl} \varepsilon_{kl}^0 = \lambda \varepsilon_{kk}^0 \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^0 \quad (3)$$

本文限于讨论各向同性的基体材料, 式中  $\lambda, \mu$  是弹性参量。当包含体由于某种与边界力无关的物理化学原因产生一均匀应变即所谓的本征应变  $\varepsilon^*$  时, 将相应地引起一扰动应变  $\varepsilon'$ 。于是同质包含体的应力  $\sigma'$  现在为

$$\sigma'_{ij} = \lambda(\varepsilon_{kk}^0 + \varepsilon_{kk}^* - \varepsilon_{kk}^*) \delta_{ij} + 2\mu(\varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon'_{ij} - \varepsilon_{ij}^*) \quad (4)$$

而  $\varepsilon_{ij}^*$  与  $\varepsilon'_{ij}$  之间按照 Eshelby 理论有如下关系

$$\varepsilon'_{ij} = S_{ijkl} \varepsilon_{kl}^* \quad (5)$$

$S_{ijkl}$  称为 Eshelby 张量, 它仅是椭球包含体几何尺寸和材料泊松比的已知函数, 具体表达式可参阅文献[1,2]。

SFRC 中的增强纤维是具有与基体不同弹性参量的所谓异质包含体。但按 Eshelby 等效同质包含体概念, 异质包含体在外力  $\sigma_{ij}^0$  作用下因弹性参量不同所引起的扰动应变  $\varepsilon'_{ij}$  可看作某等效的同质包含体因本征应变  $\varepsilon_{ij}^*$  所引起, 因而异质包含体的应力满足

$$\lambda_f(\varepsilon_{kk}^0 + \varepsilon_{kk}^*) \delta_{ij} + 2\mu_f(\varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon'_{ij}) = \lambda(\varepsilon_{kk}^0 + \varepsilon_{kk}^* - \varepsilon_{kk}^*) \delta_{ij} + 2\mu(\varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon'_{ij} - \varepsilon_{ij}^*) \quad (6)$$

并且  $\varepsilon_{ij}^*$  与  $\varepsilon_{ij}^*$  之间有关系式(5)成立。由式(5)和式(6)即可解得未知量  $\varepsilon_{ij}^*$  和  $\varepsilon_{ij}^*$ 。从而根据 SFRC 的宏观量, 即平均应变<sup>[2]</sup>

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V (\varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon'_{ij}) dV = \varepsilon_{ij}^0 + f \varepsilon_{ij}^* \quad (7)$$

和平均应力

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \sigma_{ij}^0 \quad (8)$$

之间的关系, 可确定 SFRC 的材料参量, 式(7)中的  $f$  表示纤维的体积含量。

### 3. 短纤维单轴取向的 SFRC 线粘弹性本构关系

工程上使用的 SFRC 中的短纤维的取向是无序的, 在此先考察理想的短纤维单轴取向 SFRC 的本构行为。在理想材料中, 设纤维为弹性体, 基体是各向同性粘弹性材料, 且满足关系式

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \int_0^t \lambda(t-\tau) \cdot \varepsilon_{kk}(\tau) d\tau + 2 \int_0^t \mu(t-\tau) \varepsilon_{ij}(\tau) d\tau \quad (9)$$

记函数  $g(t)$  的 Laplace 变换为  $\bar{g}(s)$ , 则(9)式化为

$$\bar{\sigma}_{ij} = s \bar{\lambda} \bar{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2s \bar{\mu} \bar{\varepsilon}_{ij} \quad (10)$$

且仍定义, 在一维应力下材料的泊松比  $\nu$  为

$$\nu = - \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}$$

由于允许  $\nu$  值的变化范围很小, 且实验表明  $\nu$  对应变率的变化很不敏感, 即基本上不随时

间变化,我们假定粘弹性基体的泊松比是常数,  $\nu$  不是时间的函数意味着材料的杨氏模量和剪切模量具有相同的时间相关性。则

$$\bar{\epsilon}_{22} = -\nu \bar{\epsilon}_{11} \quad (11)$$

若考察粘弹性基体中含同质包含体的问题,则包含体满足的平衡方程经 Laplace 变换后,仍具有与弹性介质的平衡方程相同的形式。根据 Mura<sup>[2]</sup>的介绍,只需把  $\lambda, \mu$  换成  $s\bar{\lambda}, s\bar{\mu}$ , 弹性材料成立的 Eshelby 关系式(5)和式(6)可用来描述粘弹性材料。即 SFRC 中纤维的应力可由 Eshelby 的等效包含体方法得

$$\lambda_f(\bar{\epsilon}_{11}^0 + \bar{\epsilon}_{33}^0)\delta_{ij} + 2\mu_f(\bar{\epsilon}_{ij}^0 + \bar{\epsilon}_{ji}^0) = s\bar{\lambda}(\bar{\epsilon}_{11}^0 + \bar{\epsilon}_{33}^0 - \bar{\epsilon}_{33}^0)\delta_{ij} + 2s\bar{\mu}(\bar{\epsilon}_{ij}^0 + \bar{\epsilon}_{ji}^0) \quad (12)$$

$$\bar{\epsilon}_{ij} = S_{ij\mu} \bar{\epsilon}_{ij}^0 \quad (13)$$

$\lambda_f$  和  $\mu_f$  为纤维的弹性参量。记形如细长小椭球的短纤维长为  $a$ , 直径为  $b$ , 其径长比为  $k$ ,

$$k = b/a \ll 1$$

取小椭球的长轴为坐标架的  $x_1$  轴, 则  $S_{ij\mu}$  为<sup>[1]</sup>

$$\left. \begin{aligned} S_{1111} &= \frac{2-\nu}{1-\nu} k^2 \left[ \ln \frac{2}{k} - \frac{5-2\nu}{2(1-2\nu)} \right] \\ S_{2222} = S_{3333} &= \frac{5-4\nu}{8(1-\nu)} - \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} k^2 \left[ \ln \frac{2}{k} - \frac{1-8\nu}{4(1-2\nu)} \right] \\ S_{1122} = S_{1133} &= -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} k^2 \left[ \ln \frac{2}{k} - \frac{3-4\nu}{2(1-2\nu)} \right] \\ S_{2211} = S_{3311} &= \frac{\nu}{2(1-\nu)} - \frac{1+\nu}{2(1-\nu)} k^2 \left[ \ln \frac{2}{k} - \frac{3-2\nu}{2(1+\nu)} \right] \\ S_{2233} = S_{3322} &= -\frac{1-4\nu}{8(1-\nu)} + \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} k^2 \left[ \ln \frac{2}{k} - \frac{5-8\nu}{4(1-2\nu)} \right] \\ S_{1212} = S_{1313} &= \frac{1}{4}, \quad S_{2323} = S_{3232} = \frac{3-4\nu}{8(1-\nu)} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$S_{ij\mu}$  仅是  $\nu$  和  $k$  的函数。

本文仅限于讨论

$$\lambda_f \gg \lambda(t), \quad \mu_f \gg \mu(t) \quad (15)$$

即纤维刚度远大于基体刚度,短玻璃纤维增强高分子材料满足式(15)。

使坐标架的  $x_1$  轴与纤维取向轴一致,在外力  $\sigma_0^0$  作用下,从式(12)和式(13)求得 SFRC 内短纤维所对应的等效包含体的本征应变

$$\left. \begin{aligned} \bar{\epsilon}_{11}^* &= A_{11}\bar{\epsilon}_{11}^0 + A_{12}\bar{\epsilon}_{22}^0 + A_{13}\bar{\epsilon}_{33}^0 \\ \bar{\epsilon}_{22}^* &= A_{21}\bar{\epsilon}_{11}^0 + A_{22}\bar{\epsilon}_{22}^0 + A_{23}\bar{\epsilon}_{33}^0 \\ \bar{\epsilon}_{33}^* &= A_{31}\bar{\epsilon}_{11}^0 + A_{32}\bar{\epsilon}_{22}^0 + A_{33}\bar{\epsilon}_{33}^0 \\ \bar{\epsilon}_{12}^* &= B_1\bar{\epsilon}_{12}^0, \bar{\epsilon}_{23}^* = B_2\bar{\epsilon}_{23}^0, \bar{\epsilon}_{31}^* = B_3\bar{\epsilon}_{31}^0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中  $A_{ij}$  和  $B_i$  仅是  $S_{ij\mu}$  的函数。由于材料关于纤维轴 ( $x_1$  轴) 对称, 故有:  $A_{12} = A_{13}, A_{21} = A_{31}, A_{22} = A_{33}, A_{23} = A_{32}, B_1 = B_3$ , 并且可通过简单拉伸分析确定  $A_{ij}$ , 简单剪切分析求得  $B_i$ 。

## 1. 在纤维轴向作用一维应力

在一维应力作用下,基体的本构方程式(9)化为

$$\sigma_{11} = \int_0^t [1 - 2\nu)\lambda(t - \tau) + 2\mu(t - \tau)] \cdot \dot{\epsilon}(\tau) d\tau \quad (17a)$$

引入 Laplace 变换的基体“模量” $\bar{E}$ ,上式可写成

$$\bar{\sigma}_{11} = \bar{E} \bar{\epsilon}_{11} \quad (17b)$$

$$\bar{E} = (1 - 2\nu)s\bar{\lambda} + 2s\bar{\mu} \quad (17c)$$

那么在外力  $\sigma_{11}^0$  作用下,基体材料的应变

$$\bar{\epsilon}_{11}^0 = \bar{\sigma}_{11}^0 / \bar{E}, \quad \bar{\epsilon}_{22}^0 = \bar{\epsilon}_{33}^0 = -\nu \bar{\epsilon}_{11}^0, \quad \bar{\epsilon}_{ij}^0 = 0 (i \neq j)$$

把短纤维看成是具有  $\epsilon_{ij}^0$  的等效同质包含体,由对称性知  $\epsilon_{22}^0 = \epsilon_{33}^0$ ,根据式(12)、(13)和式(16),得

$$\bar{\epsilon}_{11}^* = A_{11} \bar{\epsilon}_{11}^0 + 2A_{12} \bar{\epsilon}_{22}^0$$

$$\bar{\epsilon}_{22}^* = A_{21} \bar{\epsilon}_{11}^0 + (A_{22} + A_{23}) \bar{\epsilon}_{22}^0 \quad (18)$$

其中,

$$A_{11} = -\frac{S_{2222} + S_{2233}}{\theta}, \quad A_{12} = \frac{S_{1122}}{\theta}$$

$$A_{21} = \frac{S_{2211}}{\theta}, \quad A_{22} + A_{23} = -\frac{S_{1111}}{\theta} \quad (19)$$

$$\theta = S_{1111}(S_{2222} + S_{2233}) - 2S_{1122}S_{2211} \quad (20)$$

通过对 SFRC 在另一个方向上受一维应力作用的分析,同样可以确定  $A_{22}$  和  $A_{23}$ 。根据式(7)可得 SFRC 的平均(宏观)应变

$$\langle \bar{\epsilon}_{11} \rangle = [1 - \frac{f}{\theta} (S_{2222} + S_{2233} + 2\nu S_{1122})] \bar{\epsilon}_{11}^0$$

将式(15)代入上式,则 Laplace 变换下的 SFRC 的“模量”

$$\bar{E}^c = \frac{q}{q - f} \bar{E} \quad (21)$$

其中,

$$q = 2(1 + \nu)k^2 \left[ \ln \frac{2}{k} - \frac{5 - 4\nu}{4(1 - \nu)} \right] \quad (22)$$

把式(17c)代入式(21)通过 Laplace 反变换下式

$$\langle \bar{\sigma} \rangle = \bar{E}^c \langle \bar{\epsilon} \rangle \quad (23)$$

得一维应力下的 SFRC 本构关系

$$\sigma = \frac{q}{q - f} \int_0^t [(1 - 2\nu)\lambda(t - \tau) + 2\mu(t - \tau)] \cdot \dot{\epsilon}(\tau) d\tau \quad (24)$$

记

$$G_0 = \frac{q}{q - f} \quad (25)$$

则  $G_0$  与基体所满足的粘弹性本构方程之乘积即得短纤维单轴取向 SFRC 一维本构关系。

把式(14)代入式(19)后容易看到,  $A_{12}$ 、 $A_{22}$ 、 $A_{23}$  与  $A_{11}$ 、 $A_{21}$  相比是  $k^2$  量级的小量。 $A_{12}$ 、 $A_{22}$ 、

$A_{23}$ 和  $A_{11}$ 、 $A_{21}$ 分别是表征基体在纤维横向和纵向上的变形对  $\epsilon_{ij}^0$  的影响。即基体在纤维横向上的变形对纤维受力的影响与基体在纤维纵向上的变形对纤维的影响相比是小量。这意味着,在 SFRC 中纤维横向对基体的增强效果可忽略。

2. 作用剪切应力

在剪切应力  $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$  作用下, SFRC 内纤维的应力从式(6)和式(14)可得

$$\bar{\epsilon}_{12}^0 = B_1 \bar{\epsilon}_{12}^0, \quad \bar{\epsilon}_{13}^0 = B_1 \bar{\epsilon}_{13}^0, \quad \bar{\epsilon}_{23}^0 = B_2 \bar{\epsilon}_{23}^0 \tag{26}$$

其中, 
$$B_1 = 2, \quad B_2 = -\frac{4(1-\nu)}{3-4\nu} \tag{27}$$

和  $A_{11}$  比较可知,  $B_i/A_{11} = O(k^2)$ , 即基体的剪切变形对  $\epsilon_{12}^0$  或  $\epsilon_{23}^0$  的影响远不如基体在纤维轴向上的变形对  $\epsilon_{11}^0$  的影响显著。

根据式(7)、式(26)和式(27)可以求得 SFRC 在简单剪切下的本构行为

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= \frac{1}{1-2f} \int_0^t \dot{\epsilon}_{12}(\tau) \cdot \mu(t-\tau) d\tau \\ \sigma_{23} &= \frac{1}{1-\frac{4(1-\nu)}{3-4\nu}f} \int_0^t \dot{\epsilon}_{23}(\tau) \mu(t-\tau) d\tau \end{aligned} \tag{28}$$

4. 短纤维无序取向的 SFRC 线粘弹性本构关系

当短纤维无序取向时, SFRC 为各向同性材料, 在一维载荷  $\sigma_{11}^0$  作用下, 考察其中任一根轴向与  $x_1$  轴(受力方向)成  $\theta$  角的短纤维, 如图1所示建立坐标系<sup>[10]</sup>,  $x_i'$  是作如下旋转得到的,  $x_1'$  轴转动  $\theta$  角使其与纤维轴重合得  $x_1''$ , 不失一般性, 使  $x_3'$  轴保留在  $\omega x_2 x_3$  平面内, 则  $x_i'$  与  $x_i$  的坐标变换矩阵为

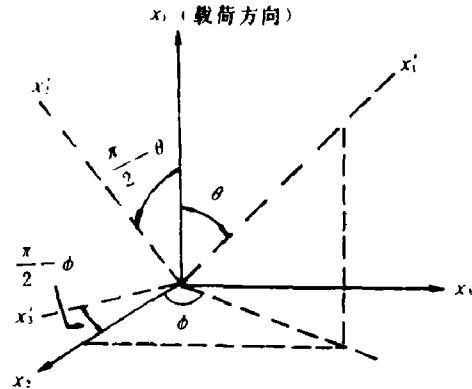


图1  $\{x_i'\}$  与  $\{x_i\}$  的关系

Fig. 1 The relation between  $\{x_i'\}$  and  $\{x_i\}$

已经知道短纤维对基体的增强效果仅需

考虑其纵向, 则这根纤维所对应的等效包含体的本征应变在坐标系  $x_i'$  中的分量可简化为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11}^{0'} &= A_{11} \epsilon_{11}^0 = A_{11} (\cos^2 \theta - \nu \sin^2 \theta) \epsilon_{11}^0 \\ \epsilon_{22}^{0'} &= \epsilon_{33}^{0'} = A_{21} (\cos^2 \theta - \nu \sin^2 \theta) \epsilon_{11}^0 \end{aligned} \right\} \tag{29}$$

本征应变  $\epsilon_{ij}^{0'}$  在  $x_i$  坐标系下的分量

$$\epsilon_{ij}^{0'} = T_{\alpha i} \cdot T_{\beta j} \cdot \epsilon_{\alpha\beta}^{0'} \tag{30}$$

上式表述与  $\sigma_{11}^0$  成  $\theta$  角的短纤维所对应的等效包含体的本征应变。对于纤维无序取向的 SFRC, 取  $\epsilon_{ij}^{0'}$  的平均值。

$$\langle \epsilon_{ij}^{0'} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \epsilon_{ij}^{0'} \sin\theta d\theta \tag{31}$$

则  $\langle \epsilon_{ij}^0 \rangle$  表示各向同性 SFRC 中所述问题的本征应变。由式(7)和式(29)~式(31), 考虑到  $A_{21} = -\nu A_{11}$ , 可求得在 Laplace 变换下各向同性 SFRC 的模量

$$\bar{E}^c = \frac{\langle \sigma_{11} \rangle}{\langle \epsilon_{11} \rangle} = \frac{\bar{E}}{1 + FA_{11}} \quad (32)$$

其中,

$$F = \frac{3 - 4\nu + 8\nu^2}{15} f \quad (33)$$

式(32)经 Laplace 反变换后可得 SFRC 的一维粘弹性本构关系

$$\langle \sigma_{11} \rangle = \frac{q}{q - F} \int_0^t [(1 - 2\nu)\lambda(t - \tau) + 2\mu(t - \tau)] \cdot \dot{\epsilon}(\tau) d\tau \quad (34)$$

记

$$G = \frac{q}{q - F} \quad (35)$$

则  $G$  与基体所满足的粘弹性本构方程之乘积即为各向同性 SFRC 一维本构关系。

比较式(34)和式(24), 可以看出在一维应力作用下, 体积含量为  $f$  的短纤维无序取向 SFRC 在受力方向上的力学行为等效于体积含量为  $F$  的短纤维单轴取向 SFRC 在轴向受一维应力作用时的力学行为。

式(33)给出  $F$  与  $f$  的正比关系, 当  $\nu = 1/4$  时, 其比例系数取极小值, 即  $F/f = 1/6$ ; 又当  $\nu = 0$  或  $\nu = 1/2$  时, 都有  $F/f = 1/5$ 。  $F/f$  与  $\nu$  的关系见图 2。对于通常的高聚物  $\nu \approx 1/3$ , 这时  $F/f = \frac{1}{6} \cdot \frac{46}{45}$ , 即若取  $F = f/6$ , 所产生的 SFRC 中等效纤维体积分含量的误差仅约 2%。

若把 SFRC 和基体的本构关系分别记为  $\sigma^c$  和  $\sigma^M$ , 则式(34)可改写成

$$\frac{\sigma^c}{\sigma^M} = G = \frac{q}{q - F} \quad (36)$$

取  $k = 1/7, \nu = 1/3$ , 纤维含量  $f$  对增强系数  $G$  的影响如图 3 的曲线所示。

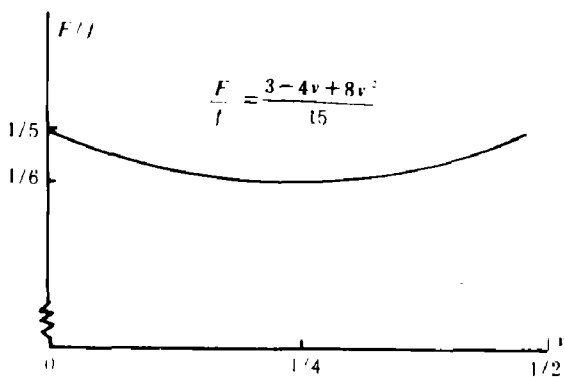


图 2  $F/f \sim \nu$  曲线  
Fig. 2  $F/f \sim \nu$  Curve

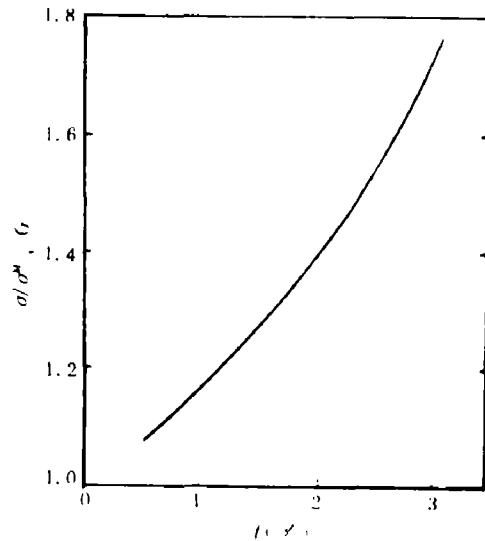


图 3  $G \sim f$  曲线  
Fig. 3  $G \sim f$  Curve

现在考察本构关系为式(1)线性部分的材料为基体的 SFRC 的本构关系。在高应变率

下,因  $\theta_1$  很大,式中的第一个积分表现出弹性行为,即基体的本构方程为

$$\sigma = (E_0 + E_1)e + E_2 \int_0^t \dot{\epsilon} \cdot \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_2}\right) d\tau \quad (37)$$

其中  $E_0, E_1, E_2, \theta_2$  为材料参量.若纤维模量  $E_f$  为

$$E_f \gg E_0 + E_1 + E_2$$

则由式(34)得各向同性 SFRC 的本构关系为

$$\sigma = G \cdot [(E_0 + E_1)e + E_2 \int_0^t \dot{\epsilon} \cdot \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_2}\right) d\tau] \quad (38)$$

上式是文献[9]得到的式(2)在线性情况下的特例。

基体的本构关系式(37)描述了弹簧与 Maxwell 体并联构成力学模型的行为(如图4所示),根据式(38),纤维增强效果导致基体的弹性常量  $E_0, E_1, E_2$  增大  $G$  倍,同时保持松弛时间  $\theta_2 = \eta_2/E_2$  不变,即粘性系数  $\eta_2$  也增大  $G$  倍。

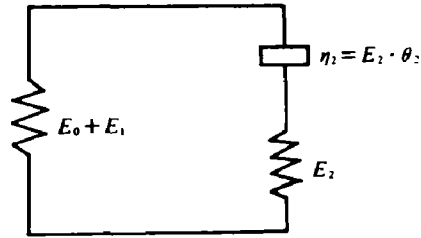


图4 弹簧和粘壶模型

Fig. 4 Spring and dashpot models

## 5. 结论

根据纤维和基体的本构方程,本文用 Eshelby 理论着重研究 SFRC 的一维本构关系。在假设:1)纤维的模量远大于基体的瞬态模量;2)基体的泊松比为常数的假定下,得到细长小椭球状的纤维增强材料本构关系的三点结论:

1. 短纤维对基体的增强作用主要体现在纤维的纵向。
2. 体积含量为  $f$  的短纤维无序取向 SFRC 的一维力学行为等效于体积含量为  $F$  的短纤维单轴取向 SFRC 在取向轴上的力学行为。
3. SFRC 的粘弹性本构方程可简单地表示为增强系数  $G$  与基体本构方程的乘积。

因 Eshelby 理论的限制,本文所得到的结论仅适用于低纤维含量的 SFRC,且假定纤维与基体的结合是完善的条件下得到的。作者用 Mori-Tanaka 理论修正的 Eshelby 方法,研究具有较高含量短纤维的 SFRC 力学行为,得到了与上述相似的三点结论,见文献[6]。对于考虑纤维与基体界面的损伤或破坏的问题有待进一步研究。

## 参 考 文 献

- [1] Christensen, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, New York, Wiley, (1979).
- [2] Mura, T., *Micromechanics of Defects in Solids*, Dordrecht, Martinus Nijhoff Publishers, (1987).
- [3] Kunin, I. A., *Elastic Media with Microstructure I, One Dimensional Models*, Berlin, Springer, (1982).
- [4] Kunin, I. A., *Elastic Media with Microstructure II, Three Dimensional Models*, Berlin, Springer, (1983).
- [5] Hashin, Z., *Journal of Applied Mechanics*, 50 (1983), 481.
- [6] 杨黎明, 博士论文, 中国科技大学(1989).
- [7] Eshelby, J. D., *Proc. Roy. Soc.*, A241, (1957), 376.
- [8] Eshelby, J. D., *Proc. Roy. Soc.*, A252, (1959), 561.
- [9] 杨黎明, 朱兆祥, 王礼立, *爆炸与冲击*, 8(1) (1986), 1.
- [10] Chou, T. W., Nomura, S., *Fiber Science and Technology*, 14, (1980-1981), 279.

AN INVESTIGATION ON THE LINEAR VISCOELASTIC  
CONSTITUTIVE RELATION FOR A COMPOSITE ON  
THE BASIS OF ESHELBY' S THEORY

Yang Liming , Wang Lili

*(University of Science and Technology of China)*

**ABSTRACT** According to Eshelby' s theory, a constitutive relation has been obtained for the short fiber reinforced composite (SFRC) with a considerable simple form. An equivalent fiber volume fraction  $F$  in isotropic SFRC has been discovered. One dimensional mechanical behavior of isotropic SFRC with fiber volume fraction  $f$  is equal to axial mechanical behavior of unidirectionally aligned short fiber composite with fiber volume fraction  $F$ .

**KEY WORDS** composite, micromechanics, viscoelastic constitutive relation.