第12卷 第1期　　爆 炸 与 冲 击　　Vol. 12, No. 1
1992年1月　　EXPLOSION AND SHOCK WAVES　　Jan., 1992

SH波作用下各向异性介质中裂缝的侧向扩展——摄动方法*

刘国利　刘殿魁
(国家地震局工程力学研究所,哈尔滨150080)

摘要　本文利用摄动法求解在SH波作用下各向异性介质中半无限长裂缝的侧向扩展问题。摄动参数为裂缝的转向角 $\delta=k'\pi$。结果表明,强度因子的零阶摄动解具有 $0[(k'\pi)^2]$ 的精度并指出强度因子与裂缝的长度和扩展速度有关。

关键词　各向异性介质　SH波　裂缝侧向扩展　摄动法

一、前　言

研究在SH波作用下,高速扩展的裂缝出现的分岔现象,是近十几年来在断裂动力学研究中出现的新课题。但是,由于该问题自身的复杂性,给理论和实验研究都带来了许多困难。实验研究表明,在外荷载的作用之下,脆性介质中的裂缝可以极高的速度向前扩展,但其扩展速度却要低于理论上的Rayleigh波波速[1,2,3]。以这样高的速度扩展的裂缝,由于来不及与其周围的介质进行能量交换,而发生失稳,即出现分岔现象(Bifurcation)[1,2,3]。另外,实验也表明,在高荷载或强度足够大的应力波作用之下,也会出现直裂缝的侧向扩展现象(Kinking)[1,2,3]。通常用这些实验来模拟断层的活动,以及断层在强大地震波作用下所发生的一些现象。

早在六十年代,人们利用静力模型对裂缝的分岔现象进行了分析[4]。1974年Achenbach[5]对裂缝分岔问题进行了专门研究。八十年代,人们利用半无限长裂缝在分岔或侧向扩展时不具有特征长度的特点,建立了自模拟解法[6]。此外,人们还利用数值方法,求解了比较复杂的问题[7]。

最近,人们在研究阶跃波作用下的半无限长裂缝的分岔和侧向扩展问题时,给出了一个非自模拟解[9,10]。它考虑了裂缝在阶跃波作用下,经过一段延迟时间之后,所发生的分岔与侧向扩展问题

Achenbach等人[8]给出了一种分析裂缝侧向扩展问题的近似方法——摄动法。他们利用裂缝在侧向扩展时,其转向角 δ 的大小对强度因子影响很小这一事实,建立了以转向角 δ 为摄动参数摄动解法。

本文将利用摄动法求解在SH波作用之下各向异性介质中裂缝的侧向扩展问题。

---

* 本课题为国家自然科学基金资助项目。
1990年4月5日收到原稿,1991年2月6日收到修改稿。

二、各向异性介质中 SH 波对半无限长裂缝的散射

1. 反平面剪切运动

我们研究弹性波作用下,各向异性介质中裂缝的侧向扩展问题,其最简单的模型就是反平面剪切运动。若反平面剪切运动发生在 xy 平面内,则位移只有 z 方向的分量 w,且与 z 轴无关。相应地,应力分量也只有 τ_{xz}和 τ_{yz},其它分量一律为零。若不计体力,则运动方程可写成:

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{2.1}$$

其中 ρ 为介质的质量密度。若利用各向异性介质中应力与位移的关系:

$$\tau_{xz}=c_{55}\frac{\partial w}{\partial x}+c_{45}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{2.2}$$

$$\tau_{yz}=c_{45}\frac{\partial w}{\partial x}+c_{44}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{2.3}$$

则方程(2.1)可写成:

$$c_{55}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2c_{45}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+c_{44}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{2.4}$$

其中 c_{55},c_{45}和 c_{44}为介质的弹性模量。为了保证弹性矩阵的正定性,它们之间应有如下的关系:

$$c_{44}>0,\qquad c_{44}c_{55}-c_{45}^2>0 \tag{2.5}$$

将沿 $\vec{n}$方向入射的平面波 $w^{(i)}(c_\alpha t+x\sin\alpha-y\cos\alpha)$(图 1),其中 c_α 为平面波沿 $\vec{n}$方向的传播速度,代入运动方程(2.4),则可求得 c_α:

$$c_\alpha=\left[\frac{1}{\rho}(c_{55}\sin^2\alpha-2c_{45}\sin\alpha\cos\alpha+c_{44}\cos^2\alpha)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.6}$$

而在一般的情况下,入射的平面 SH 波可写成:

$$w^{(i)}(x,y;t)=H(s_\alpha+x\sin\alpha-y\cos\alpha)\int_0^{s_\alpha+x\sin\alpha-y\cos\alpha}g'(v)dv \tag{2.7}$$

其中,$s_\alpha=c_\alpha t$;$H(\cdot)$为 Heaviside 阶跃函数;$g'(v)$为任意函数。

2. SH 波对半无限长裂缝的散射

如图 1,入射波 $w^{(i)}$在 $t=0(s=0)$时刻到达裂缝的端点,而在 $t=t_m(s=s_m)$时刻裂缝开始扩展。我们现在求解在 $t<t_m(s<s_m)$时刻,SH 波对半无限长裂缝的散射问题。此时,它必须满足如下的初、边值条件:

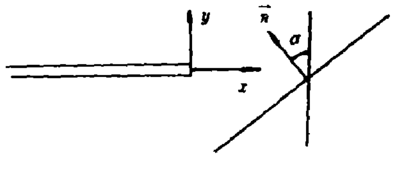

图 1　SH 波被半无限长裂缝散射

Fig. 1 Scattering of SH-wave by a semi-infinite crack

$$y=0,x<0,\tau_{yz}=(c_{44}\cos\alpha-c_{45}\sin\alpha)g\cdot(s+x\,k\sin\alpha)H(s+x\,k\sin\alpha) \tag{2.8}$$

$$x\geqslant 0,\qquad w=0 \tag{2.9}$$

和

$$(s = 0 \quad w(x,y;0) = \frac{\partial w(x,y;0)}{\partial t} = 0 \tag{2.10}$$

其中

$s=c_T t,\quad k=c_T/c\alpha),\quad c_T=[(c_{44}c_{55}-c_{45}^2)/c_{44}\rho]^{\frac{1}{2}}$

如果在 $y=0$ 的表面上,作用的应力为已知,即为 $\tau_{yz}(x,0;s)=\tau(x,s)$,则可用 Green 函数法来求得 $y\geqslant 0$ 的半空间中任一点的位移。它们是[11]:

$$w(x_0,y_0;s_0) = \frac{1}{\pi\mu}\iint_{\Omega}\frac{\tau(x,s)}{R}dxds \tag{2.11}$$

其中 $\mu=(c_{44}c_{55}-c_{45}^2)^{\frac{1}{2}}, R^2=(s_0-s)^2-r^{*2}, r^{*2}=(x_0^*-x)^2+y_0^{*2}$ 和 $x_0^*=x_0-\frac{c_{45}}{c_{55}}y_0; y_0^*=\frac{(c_{44}c_{55}-c_{45}^2)^{\frac{1}{2}}}{c_{44}}y_0$,积分(2.11)式中 Ω 为 $\tau(x,s)$在 xy 平面上落在$(s-s_0)-[(x_0-x)^2+y_0^2]^{\frac{1}{2}}\geqslant 0$ 内之部分。当 $y_0=0$ 时,Ω 退化为 $x-s$ 平面上的一个三角形区域。如果引进新变量:

$$\xi = \frac{s-x}{\sqrt{2}}, \qquad \eta = \frac{s+x}{\sqrt{2}} \tag{2.12}$$

则式(2.11)可写成:

$$w(x_0,y_0;s_0) = \frac{1}{\pi\mu}\int\frac{d\xi}{(\xi_0-\xi)^{1/2}}\int\frac{\tau(\xi,\eta)d\eta}{(\eta_0-\eta)^{1/2}} \tag{2.13}$$

进一步则可利用裂缝前端位移为零的条件,求得裂缝端点前的未知应力 $\tau(x,s)$。如图2,若计算(ξ_0,η_0)点之位移,则积分区域为图中之阴影部份,所以有:

$$(c_{44}\cos\alpha - c_{45}\sin\alpha)\int_0^{\xi_0}\frac{d\xi}{(\xi_0-\xi)^{1/2}}\int_{-\kappa\xi}^{\xi}\frac{g(\xi,\eta)d\eta}{(\eta_0-\eta)^{1/2}} + \int_0^{\xi_0}\frac{d\xi}{(\xi_0-\xi)^{1/2}}\int_{\xi}^{\eta_0}\frac{\tau(\xi,\eta)d\eta}{(\eta_0-\eta)^{1/2}} = 0 \tag{2.14}$$

其中 $\kappa=(1-k\sin\alpha)/(1+k\sin\alpha)$。

式(2.14)还可以写成:

$$\int_{\xi}^{\eta_0}\frac{\tau(\xi,\eta)d\eta}{(\eta_0-\eta)^{1/2}} = (c_{45}\sin\alpha - c_{44}\cos\alpha)\int_{-\kappa\xi}^{\xi}\frac{g(\xi,\eta)d\eta}{(\eta_0-\eta)^{1/2}} \tag{2.15}$$

式(2.15)为一 Abel 型积分方程,则解为:

$$\tau(\xi,\eta) = \frac{(c_{45}\sin\alpha - c_{44}\cos\alpha)}{\pi(\eta-\xi)^{1/2}}\int_{-\kappa\xi}^{\xi}\frac{g(\xi,u)(\xi-u)^{1/2}du}{(\eta-u)} \tag{2.16}$$

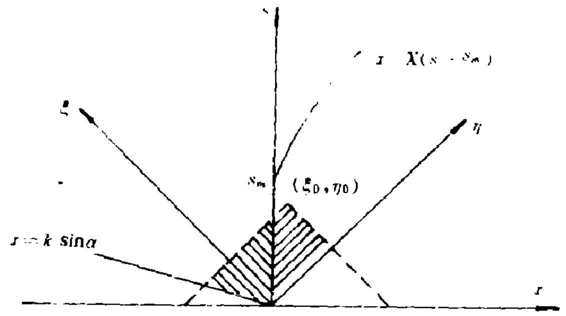

图2 $x-s$ 平面上的积分区域

Fig. 2 Integration area in the $x-s$ plane

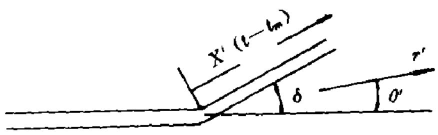

图3 裂缝的侧向扩展

Fig. 3 Kinking of the Crack

3. 裂缝尖端附近的应力场

在求解裂缝前端的应力场之后，则可以求出下半平面中的位移和应力。

如图3，在任一侧面 $\theta=\delta$ 上，其散射应力 $\tau_{\theta z}^{(s)}$ 可写成：

$$\tau_{\theta z}^{(s)}=\tau_{yz}^{(s)}\cos\theta-\tau_{xz}^{(s)}\sin\theta=\tau_{0}^{(s)}(r,\theta,s,\alpha) \tag{2.17}$$

而入射波在 $\theta=\delta$ 面上的入射应力 $\tau_{\theta z}^{(i)}$，同样可以写成：

$$\begin{aligned}\tau_{\theta z}^{(i)}&=\tau_{yz}^{(i)}\cos\theta-\tau_{xz}^{(i)}\sin\theta=[c_{45}\sin(\alpha+\theta)-c_{44}\cos\alpha\cos\theta-\\&\quad c_{55}\sin\alpha\sin\theta]g[s+rk\sin(\alpha-\theta)]H[s+rk\sin(\alpha-\theta)]\\&=\tau_{0}^{(i)}(r,\theta,s,\alpha)\end{aligned} \tag{2.18}$$

迭加式(2.17)和(2.18)，则可求得 $\theta=\delta$ 截面上的总应力 $\tau_{(\theta z)}^{(t)}$：

$$\tau_{\theta z}^{(t)}=\tau_{\theta z}^{(i)}+\tau_{(\theta z)}^{(s)}=\tau_{0}^{(i)}(r,\theta,s,\alpha)+\tau_{0}^{(s)}(r,\theta,s,\alpha) \tag{2.19}$$

三、半无限长裂缝侧向扩展的摄动解

1. 控制方程

下面我们将求解各向异性介质中半无限长裂缝在SH波作用下的侧向扩展问题。$s\geqslant s_m$ 时，裂缝在与原裂缝面成 $\delta=k'\pi$ 角的方向上扩展，如图3所示。其中 $X'(s-s_m)$ 是新裂缝面的长度。在极坐标 $x=r'\cos\theta'$，$y'=r'\sin\theta'$ 中，裂缝面上的条件可写成：

$$\theta'=\pm\pi,\qquad r'>0,\qquad \tau_{\theta' z}=0 \tag{3.1}$$

$$\theta'=k'\pi\pm0,\qquad 0<r'\leqslant X'(s-s_m),\qquad \tau_{\theta' z}=-\tau'^{(i)}(r,\theta,\delta,\alpha) \tag{3.2}$$

和初始条件：

$$t=0,\quad w(r',\theta',0)=\frac{\partial w(r',\theta',0)}{\partial t}=0 \tag{3.3}$$

为了求解上述的初边值问题，我们首先引入坐标变换：

$$\begin{cases}x'=x-(c_{45}/c_{44})y\\ y'=[(c_{44}c_{55}-c_{45}^2)^{1/2}/c_{44}]y\end{cases} \tag{3.4}$$

利用坐标变换，控制方程(2.4)可以写成：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y'^2}=\frac{\rho'}{\mu}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{3.5}$$

其中 $\rho'=(c_{44}/\mu)\rho$，如果在坐标系 (x',y') 中，再次引入极坐标 $x'=r\cos\theta$，$y'=r\sin\theta$，则方程(3.5)可以写成为：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}=s_T^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{3.6}$$

其中 $s_T^2=\rho'/\mu$。

在坐标系 (r,θ) 中，裂缝面上的边界条件(3.1)～(3.2)可以写成：

$$\theta=\pm\pi,\qquad 0<r,\qquad \frac{\mu}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}=0 \tag{3.7}$$

$$\theta=k\pi\pm0,0<r<X(s-s_m),\frac{\mu}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}=-\tau^{(i)} \tag{3.8}$$

其中：

$$\mathrm{tg}k\pi=\frac{\mu}{c_{44}}\mathrm{tg}k'\pi/(1-\frac{c_{45}}{c_{44}}\mathrm{tg}k'\pi)$$

$$X(s-s_m)=X'(s-s_m)[\cos^2 k'\pi-\frac{c_{45}}{c_{44}}\sin 2k'\pi+\frac{c_{55}}{c_{44}}\sin^2 k'\pi]^{\frac{1}{2}}$$

和：

$$\tau^{(t)}=\frac{c_{44}\tau'^{(t)}}{[\mu^2\sin^2 k'\pi+(c_{44}\cos k'\pi-c_{45}\sin k'\pi)^2]^{1/2}}$$

这样，我们就在坐标系(r,θ)中得到求解各向异性介质中裂缝侧向扩展问题的控制方程(3.6)和相应的边界条件(3.7)～(3.8)。因为它们与文献[8]中给出的求解各向同性介质中Ⅲ型裂缝侧向扩展问题的方程组具有相同的数学形式，所以我们可以采用文献[8]给出的方法——摄动法进行求解。

2. 摄动法

首先，我们引入映射变换[8]：

$$\psi=\frac{k}{\pi(1-k^2)}\theta^2+\theta-\frac{k\pi}{1-k^2} \tag{3.9}$$

或者

$$\theta=-\frac{k}{\pi}\psi^2+\psi+k\pi \tag{3.10}$$

这个变换可将$\theta=-\pi,k\pi$和π映射为$\psi=-\pi,0$和π。因此，在坐标系(r,ψ)中，侧向扩展的裂缝被映射成裂缝的直向扩展问题。

利用映射变换(3.9)或(3.10)，控制方程(3.6)和边界条件(3.7)和(3.8)可以写成：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}-s_T^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{2k}{\pi(1-k^2)}\frac{1}{r^2}\{\frac{\partial w}{\partial\psi}+2(\psi+\frac{k\pi}{1-k^2})\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}\} \tag{3.11}$$

和

$$\psi=\pm\pi,0<r,\frac{\mu}{r}(1\pm\frac{2k}{1-k^2})\frac{\partial w}{\partial\psi}=0 \tag{3.12}$$

$$\psi=0,0<r<X(s-s_m),\frac{\mu}{r}(1+\frac{2k^2}{1-k^2})\frac{\partial w}{\partial\psi}=-\tau^{(t)} \tag{3.13}$$

由式(3.8)知，当$k'\pi$很小时，$k\pi$同样也很小。因此，可取$k\pi$为摄动参数，用摄动法求解上述问题。此时，位移函数$w(r,\psi,t)$可以写成：

$$w(r,\psi,t)=w^{(0)}(r,\psi,t)+k\pi w^{(1)}(r,\psi,t)+\cdots \tag{3.14}$$

按照强度因子的定义：

$$K_{\mathrm{I}}(k,t)=\lim_{[r-X(s-s_m)]\to 0}\{2\pi[r-X(s-s_m)]^{\frac{1}{2}}\tau_{\theta z}(r,\psi,t)\} \tag{3.15}$$

则显然：

$$K_{\mathrm{I}}=K_{\mathrm{I}}^{(0)}+k\pi K_{\mathrm{I}}^{(1)}+\cdots \tag{3.16}$$

代式(3.14)至(3.11)～(3.13)式，并比较等式两边$k\pi$的零次幂项，则有：

$$\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial\psi^2}=\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial s^2} \tag{3.17}$$

和：

$$\psi = \pm \pi, 0 < r, \frac{\mu}{r}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \psi} = 0 \tag{3.18}$$

$$\psi = \pm 0, 0 < r < X(s - s_m), \frac{\mu}{r}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \psi} = \tau^{(i)}(r, s) \tag{3.19}$$

按照文献[11],上述问题给出的裂缝前端的应力 $\tau^{(0)}(r,s)$ 可以写成:

$$\tau^{(0)}(r,s) = -\frac{1}{\pi[r - X(s_1 - s_m)]}\int_0^{X(s_1-s_m)} \frac{\tau^{(i)}(v, s - r + v)[X(s_1 - s_m) - v]^{\frac{1}{2}}}{r - v}dv \tag{3.20}$$

其中 s_1 由下式决定:

$$s - r = s_1 - X(s_1 - s_m) \tag{3.21}$$

而裂缝尖端附近的应力为:

$$\tau^{(0)}(r,s) = -\frac{1}{\pi}\frac{[1 - \frac{dX}{ds}]^{\frac{1}{2}}}{[r - X(s - s_m)]^{\frac{1}{2}}}\int_0^{X(s-s_m)} \frac{\tau^{(i)}[v, s - X(s - s_m) + v]}{[X(s - s_m) - v]^{\frac{1}{2}}}dv \tag{3.22}$$

按式(3.15),则强度因子 $K_{\mathrm{I}}^{(0)}$ 为:

$$K_{\mathrm{I}}^{(0)} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}(1 - \frac{dX}{ds})^{\frac{1}{2}}\int_0^{X(s-s_m)} [X(s - s_m) - v]^{-\frac{1}{2}}\tau^{(i)}[v, s - X(s - s_m) + v]dv \tag{3.23}$$

同样,若比较摄动方程中 $k\pi$ 的一次幂项,则有:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial \psi^2} - s_T^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$
$$= -\frac{1}{r^2}\frac{2}{\pi^2}[\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \psi} + 2\psi\frac{\partial^2 w\,(0)}{\partial \psi^2}] \tag{3.24}$$

和:

$$\psi = \pm \pi, 0 < r, \frac{\mu}{r}\frac{\partial w^{(1)}}{\partial \psi} = 0 \tag{3.25}$$

$$\psi = \pm 0, 0 < r < X(s - s_m), \frac{\mu}{r}\frac{\partial w^{(1)}}{\partial \psi} = 0 \tag{3.26}$$

因为零阶摄动的位移解 $w^{(0)}(r,\psi,t)$ 是关于 $\psi=0$ 的反对称场,而 $\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \psi}$ 和 $\psi\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \psi^2}$ 是对称场,所以一阶摄动解是关于 $\psi=0$ 的一个对称场。所以,我们有 $K_{\mathrm{I}}^{(1)}=0$,这样:

$$K_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I}}^{(0)} + 0[(k\pi)^2] \tag{3.27}$$

至此,我们求得了各向异性介质中裂缝扩展问题的摄动解。当取 $c_{44}=c_{55}, c_{45}=0$ 时,上述结果就退化为各向同性介质的情况[8]。

参 考 文 献

[1] Ravi-Chandar K, Knauss W G. Int J Fracture, 1984, 25: 247～262

[2] Ravi-Chandar K, Knauss W G. Int J Fracture, 1984, 26: 65～80

[3] Ravi-Chandar K, Knauss W G. Int J Fracture, 1982, 20: 209～212

[4] Sih G C. J Appl Mech, 1965, 32: 51～58

[5] Achenbach J D, Varatharajula V K. Quart Appl Math, 1974, 32: 123～135

[6] Burgers P, Dempsey J P. J Appl Mech, 1982, 49: 366~370

[7] Burgers P. J Appl Mech, 1982, 49: 371~376

[8] Kuo M K, Achenbach J D. Int J Solids Struct, 1985, 21: 273~298

[9] Ma C C, Burgers P. Int J Solids Struct, 1986, 22: 883~899

[10] Ma C C, Burgers P. J Appl Mech, 1988, 55: 111~119

[11] 刘殿魁, 爆炸与冲击, 1990, 10(2): 97~106

KINKING CRACK UNDER SH-WAVE IN ANISOTROPIC MEDIA —— PERTURBATION METHOD

Liu Guoli　　Liu Diankui

(*Institute of Engineering Mechanics, State Seismological Bureau, Harbin*, 150080)

ABSTRACT The Perturbation method is used in this paper to solve the problem of a semi-infinite crack of mode Ⅲ in an anisotropic media kinked by a SH-wave. The kinking angle $\delta = k\pi$ is used as the perturbation parameter. The solution indicates that the intensity factor of the zero order perturbation possesses the precision of $0[(k'\pi)^2]$ and the intensity factor is a function of the kinking length and the kinking speed of the crack.

KEY WORDS anisotropic media, SH-wave, kinking, perturbation method