

隐式 Newmark 法分析波动问题精度的探讨

方 秦

(南京工程兵工程学院, 南京210007)

摘要 本文研究了用平均加速度的 Newmark 积分格式求解一维平面弹性波动问题的精度。由于平均加速度的 Newmark 积分格式没有振幅衰减、不产生数值阻尼,因此采用此法分析波动问题会产生较强的“高频振荡”,尤其是加速度的计算值误差甚大。本文对防护工程中常见的平台型荷载和升压三角形荷载作用下的波动问题,应用有限元分析的实例表明:采用有数值阻尼的 Newmark 积分格式是改进有限元求解波动问题的一个有效方法,可以大大地提高应力和加速度求解精度。文中推荐的有数值阻尼 Newmark 积分参数的积分参数($\delta=0.9, \beta=0.49$)可供工程中土与结构动力分析时参考使用。

关键词 有限元法 应力波 Newmark 法 数值阻尼

在诸如抗核爆炸、常规武器爆炸以及抗偶然性爆炸的地下结构等的动力分析中,常遇到瞬态波传播问题。求解瞬态波动问题的一种有效方法是特征线法。但特征线法只适用于一些简单的波动问题,因此,对于复杂的瞬态波动问题的求解常常采用有限元法。众所周知,有限元法求解波动问题是采用时空域分离的半离散化方法,即将波动问题的空域用有限元离散,把波动方程转化为二阶常微分方程,然后利用各种方法求得常微分方程的解。由此可见,由于有限元求解波动问题是采用半离散方法,在空域的单元划分,时域的步长选取时,常常不满足原波动问题的特征线上关系,因此必然导致有限元解的误差。文献[1~5]讨论了时空域离散产生的各种误差问题。在这些文章中,一般都以稳态波动问题为例进行分析。关于瞬态波动问题的有限元解的精度,尤其是有限元求解加速度误差问题的讨论较少。

有限元求解波动问题存在“低通滤波”现象。即一个单元存在一个截止频率 ω_{cut} ,瞬态波中的成份高于截止频率将被滤掉,只有低于 ω_{cut} 的瞬态波才可通过。这是用有限元法求解波动问题时误差的主要来源之一。波动问题与振动问题一个主要区别在于运动的高频分量对振动问题影响不大,即结构可取前几个低振型反应的叠加;而运动的高频分量对波动问题影响较大,一般不能轻易地舍弃^[5]。因此,采用有限元法求解波动问题时,单元尺寸和时间步长应足够小,以充分反映瞬态波的高频分量的响应。为了在运动方程的数值积分中反映高频分量的影响,常常建议采用无振幅衰减的平均加速度的 Newmark 积分格式。

本文以一维平面弹性波动问题为例,比较系统地研究了平均加速度的 Newmark 积分格式求解波动问题的精度。算例表明:平均加速度的 Newmark 积分格式没有振幅衰减,不

能消除由于时空域离散和荷载的间断等产生的应力和加速度的“高频振荡”。为了消除有限元解的高频振荡,本文利用 Newmark 积分格式产生的数值阻尼技巧,大大地改善了有限元法求解波动问题中应力和加速度的精度。

一、Newmark 积分格式的滤波特性分析

波动方程经有限元的空域离散化后,成为

$$M\ddot{d} + C\dot{d} + Kd = F(t) \quad (1)$$

式中 M 为质量矩阵, C 为阻尼矩阵, K 为刚度矩阵, $F(t)$ 为荷载矢量, d , \dot{d} 和 \ddot{d} 分别为位移, 速度和加速度矢量。方程(1)常用直接积分法进行求解, 在直接积分法中使用较多的是 Newmark 法。(1)式的 Newmark 积分格式可表述为^[1]

$$\begin{cases} Ma_{n+1} + Cv_{n+1} + Kd_{n+1} = F_{n+1} & (2) \\ d_{n+1} = d_n + \Delta t v_n + \frac{\Delta t^2}{2} \{ (1 - 2\beta)a_n + 2\beta a_{n+1} \} & (3) \\ v_{n+1} = v_n + \Delta t \{ (1 - \delta)a_n + \delta a_{n+1} \} & (4) \end{cases}$$

式中 δ , β 为 Newmark 法积分参数。为了研究 Newmark 积分格式的稳定性和收敛性, 将(2)~(4)式改写为

$$y_{n+1} = Ay_n + \mathcal{L}_n \quad (5)$$

式中

$$y_n = \begin{Bmatrix} d_n \\ v_n \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$A = A_1^{-1} A_2 \quad (7)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 + \Delta t^2 \beta \omega^2 & 2\Delta t \beta \zeta \omega \\ \Delta t \delta \omega^2 & 1 + 2\Delta t \delta \zeta \omega \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta) \omega^2 & \Delta t [1 - \Delta t (1 - 2\beta) \zeta \omega] \\ -\Delta t (1 - \delta) \omega^2 & 1 - 2\Delta t (1 - \delta) \zeta \omega \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathcal{L}_n = A_1^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta)F_n + 2\beta F_{n+1}] \\ \Delta t [(1 - \delta)F_n + \delta F_{n+1}] \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中 A 为放大矩阵, \mathcal{L}_n 为荷载矢量, ω 为有限元系统的频率, ζ 为材料的内阻尼比。

对方程(5)进行谱半径分析, 结果为

1° 当 $0 \leq \zeta < 1$, $\delta \geq 1/2$, $\beta \geq (\delta + \frac{1}{2})^2/4$ 时, 积分格式为无条件稳定;

2° 当 $0 \leq \zeta \leq 1$, $\delta \geq 1/2$, $\Omega < \Omega_{bf}$ 时, 积分格式为条件稳定。

其中

$$\Omega_{bf} = \frac{\frac{1}{2}\zeta(\delta - \frac{1}{2}) + [\frac{1}{4}(\delta + \frac{1}{2})^2 - \beta + \zeta^2(\beta - \frac{1}{2}\delta)]^{1/2}}{\frac{1}{4}(\delta + \frac{1}{2})^2 - \beta}, \Omega = \Delta t \cdot \omega$$

为了反映 Newmark 积分格式的求解精度, 可作出放大矩阵 A 的谱半径 $\rho(A)$ 与 $\Delta t/T$ 的关系曲线(图 1), 其中 Δt 为时间步长, T 为有限元系统的周期。由图 1 可知, 当积分参数为 $\delta=0.5, \beta=0.25$ 时(即平均加速度法), 谱半径 $\rho(A) \equiv 1.0$, 即此 Newmark 积分格式对

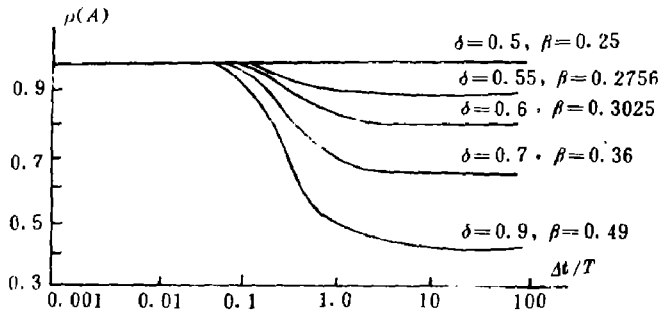


图 1 Newmark 微分格式的谱半径 $\rho(A)$ 与 $\Delta t/T$ 关系曲线

Fig. 1 Relation of Spectral radii $\rho(A)$ with $\Delta t/T$ for Newmark method

所有的运动频率分量都能准确地反映出来, 而没有振幅衰减。当 $\delta > 0.5$ 时, $\rho(A)$ 随 $\Delta t/T$ 增加而减小, 且 δ 越大, $\rho(A)$ 衰减越快。这表明 $\delta > 0.5$ 的 Newmark 积分格式对运动的高频分量起了“阻尼”作用; δ 值越大, 频率越高, “阻尼”就越大。当 $\Delta t/T$ 较小时(比如 $\Delta t/T = 0.05$), $\rho(A) \approx 1.0$, 即不存在“阻尼”作用。这种阻尼并不是材料本身的内阻尼, 而是数值方法产生的“数值阻尼”或称“算法阻尼”。可以证明, Newmark 积分格式的数值阻尼 $\bar{\zeta}$ 可表达为

$$\bar{\zeta} = \Delta t \cdot \omega \left(\delta - \frac{1}{2} \right) / 2 \quad (11)$$

由此可见, 在保证数值积分稳定性条件下, 要使 Newmark 积分格式产生数值阻尼, 则必须使 $\delta > 0.5$ 。

由于 $\rho(A)$ 随 $\Delta t/T$ 增大而减小, $\Delta t/T$ 太小, 不产生数值阻尼, $\Delta t/T$ 太大时会产生过大的数值阻尼。根据笔者经验, 选用 $0.1 \leq \Delta t/T \leq 1.0$ 比较合适。考虑到 $\Delta t/T \leq \Delta t/T_{\min}$, 其中 T_{\min} 为有限元系统中的最小的周期, 即

$$T_{\min} \geq \frac{2\pi}{\max_{(e)} \omega_{\max}^{(e)}} \quad (12)$$

其中 $\max_{(e)} \omega_{\max}^{(e)}$ 为有限元网格中所有单元中的单元最高频率。对某些形式单元, 可计算得 $\omega_{\max}^{(e)}$ 。例如, 四结点矩形单元,

$$\omega_{\max}^{(e)} = \frac{2c_p}{ab} \sqrt{a^2 + b^2} \quad (13)$$

式中 c_p 为介质压缩波波速, a 和 b 分别为矩形单元的两个边长。根据以上分析, 参照图 1, 可给出 $\Delta t/T$ 的最高值

$$\Delta t/T \leq \Delta t/T_{\min} \leq \frac{\Delta t}{2\pi / \max_{(e)} \omega_{\max}^{(e)}} = \frac{c_p \cdot \Delta t \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}{\pi ab} \quad (14)$$

若取 $a=b, c_p \Delta t = a$, 则 $\Delta t/T \leq 0.45$ 。

以上从理论上分析了 Newmark 积分格式的滤波特性。下面通过典型算例说明有数值阻尼的 Newmark 积分格式改善有限元法求解波动问题的精度。

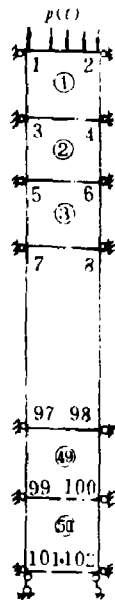
二、算 例

有限元分析波动问题时常常遇到时间步长的选取,目前还未给出统一的选取准则。文献[6]根据荷载函数的升压时间给出步长选取的经验公式如下

$$\Delta t/l_{\text{升}} \leq \frac{1}{10} \quad \frac{c_p l_{\text{升}}}{l} \geq 5 \quad (15)$$

其中 $l_{\text{升}}$ 为荷载的升压时间, l 为波传播方向有限元网格中的最大单元尺寸。(15)式的经验准则似乎是从有限元法计算应力的精度分析得出的,而对于求解加速度的精度是否合适,值得进一步研究。一般认为,有限元法计算加速度的精度最差,应力和速度次之,位移最好。本文采用文献[7]推荐的时间步长与单元尺寸的关系式

$$\Delta t = l/c_p \quad (16)$$



1. 弹性模量 $E=6200\text{MPa}$
2. 泊桑比 $\mu=0.15$
3. 密度 $\rho=1.637 \times 10^{-3}\text{N} \cdot \text{s}^2/\text{cm}^4$
4. 单元边长 $a=b=c_p \Delta t$
5. 波速 $c_p=20000\text{cm/s}$

图2 有限元计算网格及计算参数

Fig. 2 Mesh and material properties employed in FE analysis

1. Elastic modulus, 2. Poisson's ratio,
3. Density, 4. Element size, 5. Wave velocity

图2为有限元法的计算网格及其计算参数。

例1 平台型荷载作用下情况: $p(t) = p_0 H(t)$

利用一维波动方程的特征线关系,可以求得平台型荷载作用下一维弹性波动问题的理论解

$$\text{位移} \quad u(x, t) = p_0 \cdot (t - t_0) / \rho c_p \quad (17)$$

$$\text{速度} \quad v(x, t) = p_0 H(t - t_0) / \rho c_p \quad (18)$$

$$\text{应力} \quad \sigma(x, t) = p_0 H(t - t_0) \quad (19)$$

$$\text{加速度} \quad a(x, t) = p_0 \delta(t - t_0) / \rho c_p \quad (20)$$

式中 $H(t)$ 为 Heaviside 函数, $\delta(t)$ 为 Dirac 函数, $t_0 = x/c_p$ 。图3为单元⑩的位移时程曲线。从图3可知,平均加速度法和有数值阻尼的 Newmark 积分格式 ($\delta=0.9, \beta=0.49$ 或 $\delta=0.7, \beta=0.36$) 均得到准确的位移计算值。由此可以推断:位移主要由运动的低频分量所组成

的, 荷载函数的间断以及时空域离散等产生的“高频振荡”对其影响不大, 因此有数值阻尼和无数值阻尼的 Newmark 法均得到准确的位移计算值。图 4 为突加平台型荷载作用下单元⑩的应力时程曲线。由图 4 可见, 由于荷载强间断特性, 所以计算得应力时程曲线出现了“初始病态”和“超越现象”, 其中, 平均加速度法计算得应力误差为 50%, 而有数值阻尼的算法(取 $\delta=0.9, \beta=0.49$ 或 $\delta=0.7, \beta=0.36$)得到了与理论值基本一致的结果。图 5 为突加平台型荷载作用下单元⑩的加速度时程曲线, 由该图可见, 有数值阻尼的算法计算得到的加速度值与理论值相比较比不采用数值阻尼的算法接近。这个算例说明了: 波动有限元法采用的半离散化法以及荷载本身间断产生解的“高频振荡”可采用数值阻尼进行消除。

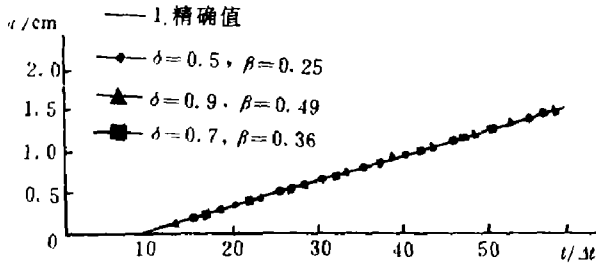


图 3 突加载作用下位移时程曲线
Fig. 3 Displacement-time histories for step loading 1. Exact value

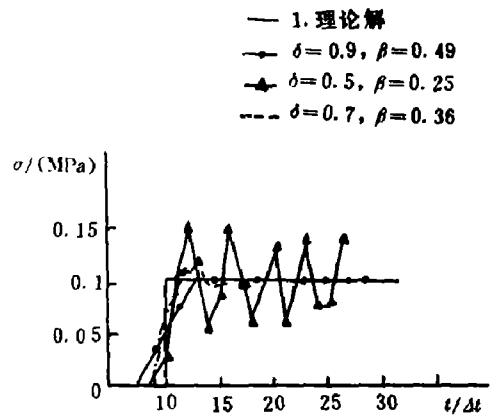


图 4 突加载作用下应力时程曲线
Fig. 4 Stress-time histories for step loading 1. Theoretical solution

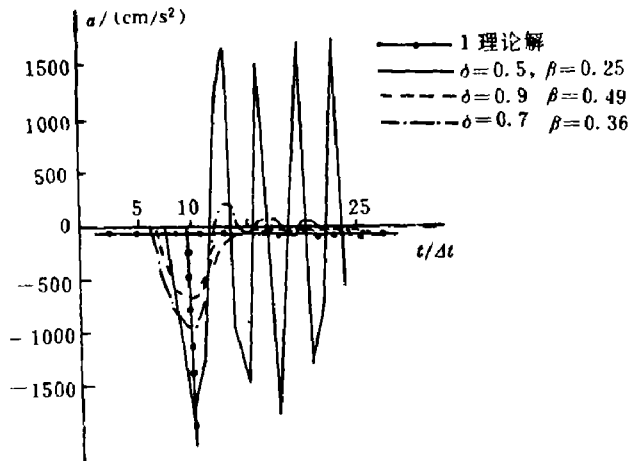


图 5 突加载作用下加速度时程曲线
Fig. 5 Acceleration-time histories for step loading 1. Theoretical solution

例 2 有升压的三角形荷载作用情况:

$$p(t) = \begin{cases} p_0 \cdot t/t_1 & 0 \leq t \leq t_1 \\ p_0 \cdot \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} & t_1 < t \leq t_2 \end{cases} \quad (21)$$

由于三角形荷载导数不连续,所以其加速度出现间断。不难求得理论解为
位移

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{p_0}{\rho c_p} \cdot \frac{(t - x/c_p)^2}{2t_1} & 0 \leq t \leq t_1 \\ \frac{p_0}{2\rho c_p t_1} \cdot (t_1 - x/c_p)^2 + \frac{p_0}{\rho c_p (t_2 - t_1)} \left\{ t_2 \cdot \left(t - \frac{x}{c_p} - t_1 \right) - \frac{1}{2} [(t - x/c_p)^2 - t_1^2] \right\} & t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases} \quad (22)$$

速度

$$v(x,t) = \begin{cases} \frac{p_0 t}{\rho c_p t_1} & 0 \leq t \leq t_1 \\ \frac{p_0}{\rho c_p} \cdot \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} & t_1 < t \leq t_2 \end{cases} \quad (23)$$

应力

$$\sigma(x,t) = \begin{cases} p_0 t / t_1 & 0 \leq t \leq t_1 \\ p_0 \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} & t_1 < t \leq t_2 \end{cases} \quad (24)$$

加速度

$$a(x,t) = \begin{cases} \frac{p_0}{\rho c_p t_1} & 0 \leq t \leq t_1 \\ -\frac{p_0}{\rho c_p (t_2 - t_1)} & t_1 < t \leq t_2 \end{cases} \quad (25)$$

计算时取 $t_1 = 1\text{ms}$, $t_2 = 1000\text{ms}$ 。

图 6 为三角形荷载作用下单元⑩的应力时程曲线,由图 6 可知,当 $\Delta t = 0.1\text{ms}$ 时(满足(15)式,无论 Newmark 积分参数取 $\delta = 0.5, \beta = 0.25$ 或 $\delta = 0.7, \beta = 0.36$ 或 $\delta = 0.9, \beta = 0.49$ 均得到与理论值一致的应力计算结果。图 7 为三角形荷载作用下单元⑩加速度时程曲线。由此可见,即使平均加速度法计算得应力值是正确的,但计算得加速度却增大了 33%,而有数值阻尼的算法得到了与理论值基本一致的结果。取积分参数 $\delta = 0.7, \beta = 0.36$,算得加速度峰值增大了 9.3%,而 $\delta = 0.9, \beta = 0.49$ 算得加速度峰值与理论值一致。

图 8 为取 $\Delta t = 0.2\text{ms}$ (即 $\Delta t/t_{\pi} = 1/5$)计算得单元⑩的应力时程曲线,当 $\Delta t/t_{\pi} = 1/5$ 时,用平均加速度法计算得应力峰值误差为 20%,而有数值阻尼的算法(取积分参数 $\delta = 0.9, \beta = 0.49$ 或 $\delta = 0.7, \beta = 0.36$ 均得到与理论值一致的结果。图 9 为 $\Delta t = 2\text{ms}$ (即 $\Delta t/t_{\pi} = 1/5$)时的单元⑩加速度时程曲线,由图 9 可见,平均加速度法计算得加速度值出现了高频振荡,峰值误差高达 125%, $\delta = 0.7, \beta = 0.36$ 计算得加速度峰值误差为 33%,而 $\delta = 0.9, \beta = 0.49$ 得到的加速度峰值与理论值基本一致的结果。图 6、图 7 与图 8、图 9 相比,当时间步长减小一倍时,用平均加速度法得到的应力计算值虽有一定的改善,但其加速度计算值误差仍较大。算例表明^[8]:通过减小时间步长来提高加速度计算精度是不可取的,也不能得到与理论值一致的加速度计算值。

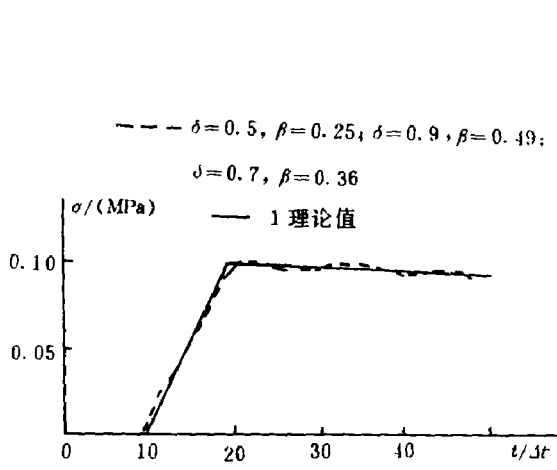


图 6 三角形荷载作用下应力时程曲线 ($\Delta t=0.1\text{ms}$)

Fig. 6 Stress-time histories for triangular loading with rise time ($\Delta t=0.1\text{ms}$)
1. Theoretical value

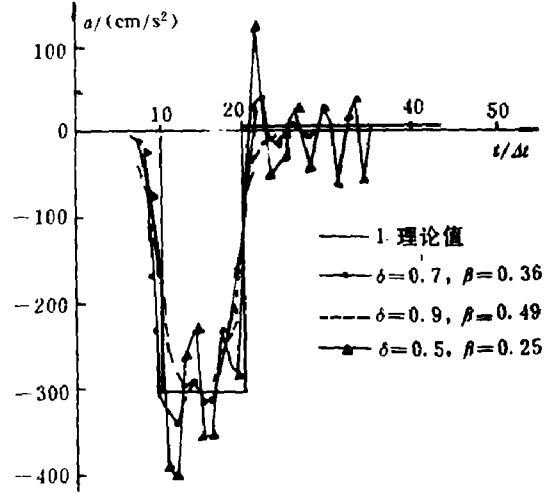


图 7 三角形荷载作用下加速度时程曲线 ($\Delta t=0.1\text{ms}$)

Fig. 7 Acceleration-time histories for triangular loading with rise time ($\Delta t=0.1\text{ms}$)
1. Theoretical value

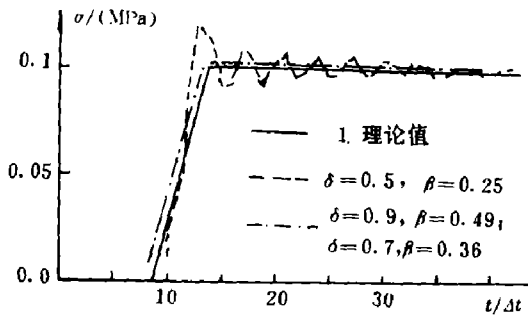


图 8 三角形荷载作用下应力时程曲线 ($\Delta t=0.2\text{ms}$)

Fig. 8 Stress-time histories for triangular loading with rise time ($\Delta t=0.2\text{ms}$)
1. Theoretical solution

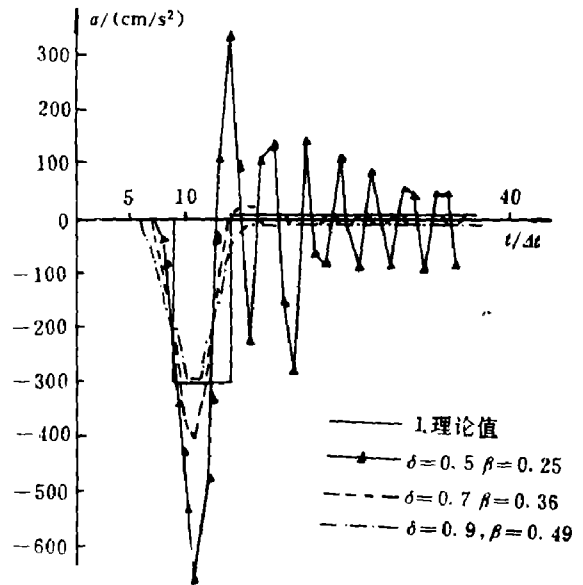


图 9 三角形荷载作用下加速度时程曲线 ($\Delta t=0.2\text{ms}$)

Fig. 9 Acceleration-time histories for triangular loading with rise time ($\Delta t=0.2\text{ms}$)
1. Theoretical value

三、结 论

通过以上理论分析及算例,可得到以下几点看法:

1. 有限元法分析波动问题时,无论采用有无数值阻尼的 Newmark 法均能得到准确的位移计算值。

2. 当满足一定条件时,如式(15)平均加速度法能得到可靠的应力计算值,但加速度计算值误差较大。误差随荷载本身间断性的强弱,时间步长的大小等而变化。荷载本身间断性越强,时间步长越大,误差越大;反之亦然。因此,平均加速度法不宜用于波动问题有限元分析。

3. 采用有数值阻尼的 Newmark 积分格式时,无论是在突加平台型荷载,还是有升压三角形荷载作用下均得到与理论值基本一致的应力和加速度计算结果。建议在波动问题有限元分析时采用积分参数为 $\delta=0.9, \beta=0.49$ 的 Newmark 积分格式。

4. 有限元法分析波动问题时,由于荷载间断,时空域离散等所产生解的“高频振荡”可用数值阻尼进行消除。因此较其它办法^[6]简单方便。

5. 应用数值阻尼的 Newmark 法分析波动问题时,对于有升压的荷载,选取时间步长可放宽为 $\Delta t_n \leq \frac{1}{5}$ 。

本文的结论虽在一维平面弹性波情况下得出的,但其结论可供二、三维波动问题有限元法分析时参考使用。由于篇幅所限,关于中心差分法、Wilson—0 法,显式 Newmark 法以及二维相互作用分析另文讨论。

参 考 文 献

- [1] Belytschko T, Hughes T J R. Computational Methods for Transient Analysis, Elsevier Science Publishers, 1983
- [2] 廖振鹏, 刘晶波. 地震工程与工程振动, 1986, 6(2): 1~6
- [3] 刘晶波, 廖振鹏. 地震工程与工程振动, 1989, 9(2): 1~11
- [4] 刘晶波, 廖振鹏. 地震工程与工程振动, 1990, 10(2): 1~9
- [5] Valliappan S, Ang K K. Dynamic Analysis Applied to Rock Mechanics Problems 5th Int Conf on Nume Meth, Geomech, 1985, 119~134.
- [6] 孙 钧, 吴逸群. 岩土工程学报, 1981, 5(4): 28~42
- [7] Bathe K J. Finite Element Procedures in Engineering Analysis. New Jersey: Prentice—Hall Inc Englewood Cliffs, 1982
- [8] 方秦, 显式 Newmark 法求解波动问题精度探讨(待发表)

STUDIES ON THE ACCURACY OF FINITE ELEMENT ANALYSIS OF IMPLICIT NEWMARK METHOD FOR WAVE PROPAGATION PROBLEMS

Fang Qin

(Nanjing Engineering Institute, Army Corps of Engineers, Nanjing 210007)

ABSTRACT This paper studies the accuracy of using the average acceleration method of Newmark's integral net in solving one—dimensional elastic wave propagation problems. Because the

average acceleration method has no capabilities of amplitude decay and numerical damping, the strong oscillatory response may be resulted when using this method to analyse wave propagation problems, especially large error may be introduced in computational acceleration. In addition, this paper studies the elastic wave propagation problems under step loading and triangular loading, both with rise times, using numerical damping techniques. Numerical examples show that this technique is an effective way to improve the accuracy of FE analysis for wave propagation problems, greatly increasing the accuracy of computational stress and acceleration. Newmark method with the filtering property of parameter values $\delta=0.9$, $\beta=0.49$ is suggested to be used in complicated soil—structure interaction analysis.

KEY WORDS finite element method , stress wave , Newmark method , numerical damping