

摄动法分析各向异性介质中 Ⅲ型裂缝的侧向扩展

刘殿魁 刘国利

(国家地震局工程力学研究所, 哈尔滨 150080)

摘要 本文内容分为两部分。首先用 Green 函数方法求解各向异性介质中Ⅲ型裂缝的扩展问题。在此基础上, 利用摄动法求解各向异性介质中Ⅲ型裂缝的侧向扩展问题。摄动参数为转向角 δ 。结果表明, 强度因子的零阶摄动解具有 $O[\delta^2]$ 的精度, 方便了计算。最后进行了数值计算, 给出在不同介质中以常速度侧向扩展的裂缝的强度因子随侧向扩展速度和转向角的变化关系。

关键词 各向异性 Ⅲ型裂缝 侧向扩展 摄动法

一、前言

裂缝在高速扩展过程中, 常常会出现分岔现象。对这种现象的研究, 不仅在理论上, 而且在工程实践中均有重要意义。这是近十几年来在断裂动力学研究中出现的新课题。但是, 由于问题自身的复杂性, 给理论或实验研究都带来许多困难。实验研究表明: 在外荷载的作用下, 脆性材料中的裂缝, 常常以极高的速度向前扩展。但其扩展速度的最大值总是低于理论上所预测的 Rayleigh 波的波速^[1,2,3]。以高速扩展的裂缝, 由于来不及与周围介质进行能量交换, 以吸收更多的能量, 而失去其稳定性, 即可出现分岔现象 (Bifurcation)^[1,2,3]。还可以看到, 裂缝在强荷载或强度足够大的应力波作用下, 也会出现直裂缝的侧向扩展现象 (Kinking)。于是有人利用这一实验来模拟断层的活动, 以及断层在强大的地震波作用下所发生的各种现象。

早在六十年代, G. C. Sih 利用静力模型对裂缝分岔现象进行了研究, 而没有考虑动力效应的影响^[4]。1974年 Achenbach 对扩展裂缝的分岔现象进行了专门的研究^[5]。在八十年代, 这一研究工作取得了进展。先是利用半无限长的裂缝在裂缝表面荷载或应力波的作用下, 以常速度分岔或侧向扩展时, 不具有特征长度的特点, 建立了自模拟解^[6,7]。与此同时, P. Burgers 还建立了数值解法, 求解了一些复杂问题^[8]。

最近, C. C. Ma 等在研究阶跃波作用下, 半无限长裂缝的分岔与侧向扩展时, 给出了一个非自模拟解^[10,11]。他们研究了裂缝在阶跃波的作用下, 经过一段延迟时间之后, 所发生的分岔与侧向扩展现象。还考虑了裂缝分岔之前的能量积累过程, 为更好地模拟断层的运动过程提供了条件。

Achenbach 等提出了一种分析裂缝侧向扩展问题的近似方法——摄动法^[9]。人们利用裂缝侧向扩展时,其转向角 δ 的大小对裂缝扩展时强度因子影响很小这一事实,建立了以转向角 δ 为摄动参数的近似方法,并取得成功。

上述研究,都是在各向同性介质中进行的。而各向异性介质中的问题,则是一个新课题。本文利用 Green 函数法,求解了各向异性介质中Ⅲ型裂缝的扩展,并利用摄动法对各向异性介质中Ⅲ型裂缝侧向扩展的渐近场进行了分析。得出强度因子的零阶近似,仍具有 $O[\delta^2]$ 的精度,可大大简化计算。

文中最后计算了在不同介质中以常速度侧向扩展裂缝的强度因子与侧向扩展速度和转向角 δ 的变化关系。

二、各向异性介质中Ⅲ型裂缝的扩展

1. Green 函数求解

我们用 Green 函数法求解均匀、连续、各向异性弹性介质中Ⅲ型裂缝的扩展。其控制方程为^[12]。

$$c_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2c_{45} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + c_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

其中 c_{55} 、 c_{45} 、 c_{44} 为介质的弹性常数; ρ 为介质密度。而应力与位移关系为

$$\tau_{xx} = c_{55} \frac{\partial w}{\partial x} + c_{45} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = c_{45} \frac{\partial w}{\partial x} + c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.2)$$

Green 函数 $G(x-x_0, y; t-t_0)$ 表示控制方程(2.1)对于 $y \leq 0$ 半空间,满足如下初、边界条件的解,

$$y = 0, \quad \tau_{xy} = c_{45} \frac{\partial G}{\partial x} + c_{44} \frac{\partial G}{\partial y} = \delta(x-x_0) \delta(t-t_0) \quad (2.3)$$

和

$$t = t_0, \quad G(x-x_0, y, 0) = \frac{\partial G(x-x_0, y; 0)}{\partial t} = 0 \quad (2.4)$$

其中 $\delta(x-x_0)$ 、 $\delta(t-t_0)$ 为 Dirac 函数。

由文献[12]知,Green 函数可以写成

$$G(x-x_0, y; t-t_0) = \frac{1}{\pi \mu R} H\{(t-t_0) - S_T r^*\} \quad (2.5)$$

其中: $H\{(t-t_0) - S_T r^*\}$ 为 Heaviside 函数;

$$R^2 = (t-t_0)^2 - S_T^2 r^{*2};$$

$$r^{*2} = (x^* - x_0)^2 + y^{*2};$$

$$x^* = x - (c_{45}/c_{55})y;$$

$$y^* = [(c_{44}c_{45} - c_{45}^2)^{1/2}/c_{44}]y;$$

$$\mu = (c_{44}c_{55} - c_{45}^2)^{1/2};$$

$$S_T^2 = \frac{c_{44}\rho}{(c_{44}c_{55} - c_{45}^2)}.$$

2. 各向异性介质中Ⅲ型裂缝的扩展

取一沿负 x 轴放置、顶点在坐标原点处的半无限长裂缝。设该裂缝在 $t=0$ 时刻,开始

沿 x 轴以速度 $dX(t)/dt < C_T (C_T = 1/S_T)$ 向前扩展。如果在裂缝和新生成的裂缝面上规定应力条件,则在 (x^*, y^*) 坐标系中,边界条件可以写成

$$\begin{aligned} y^* = 0, \quad -\infty < x^* < 0, \quad \tau_{y^*x^*} = g_1(x^*, s) \\ 0 \leq x^* < X(s), \quad \tau_{y^*x^*} = g_2(x^*, s) \\ x^* \geq X(s), \quad w = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

其中 $s = C_T t$, 而初始条件

$$s = 0 \quad w(x^*, y^*; 0) = \frac{\partial w(x^*, y^*; 0)}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

按照文献[5],可用 Green 函数法来求解上述初边值问题。如果在 $y^* = 0$ 的表面上,作用有分布荷载 $\tau_{y^*x^*} = \tau(x_0^*, s_0)$ 在半空间 $y^* \geq 0$ 中的位移,可以写成

$$w(x^*, y^*; s) = \frac{1}{\pi\mu} \iint_A \frac{\tau(x_0^*, s_0)}{R} dx_0^* ds_0^* \quad (2.8)$$

其中 A 为在 x_0-t_0 平面上,落在锥 $(t-t_0) - S_T \times [(x^* - x_0)^2 + y^{*2}]^{1/2} = 0$ 内的面积。在计算表面位移时, $y^* = 0$, 此时 A 为图 1 的阴影部分。

为了计算半空间中表面位移,引进变换

$$\xi = \frac{s - x^*}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{s + x^*}{\sqrt{2}} \quad (2.9)$$

则位移表达式(2.8)可写成

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi\mu\sqrt{2}} \int \frac{d\xi_0}{(\xi - \xi_0)^{1/2}} \\ \times \int \frac{\tau(\xi_0, \eta_0) d\eta_0}{(\eta - \eta_0)^{1/2}} \end{aligned} \quad (2.10)$$

可利用式(2.10)来求解各向异性介质中 III 型裂缝的扩展问题。如果假设裂缝前面的未知应力为 $\tau(\xi, \eta)$, 由边界条件式(2.6), 即裂缝前端位移为零的边界条件,可建立起决定未知应力 $\tau(\xi, \eta)$ 的积分方程

$$\int_0^s \frac{d\xi_0}{(\xi - \xi_0)^{1/2}} \int_{-s_0}^{N(\xi_0)} \frac{f(\xi_0, \eta_0) d\eta_0}{(\eta - \eta_0)^{1/2}} + \int_0^s \frac{d\xi_0}{(\xi - \xi_0)^{1/2}} \int_{N(\xi_0)}^{\eta} \frac{\tau(\xi_0, \eta_0) d\eta_0}{(\eta - \eta_0)^{1/2}} = 0 \quad (2.11)$$

其中: $f(\xi_0, \eta_0) = g_1(\xi_0, \eta_0)H(-x^*) + g_2(\xi_0, \eta_0)H(x^*)H[X(s) - x^*]$, 而函数 $N(\xi_0)$ 是下面方程的解

$$\frac{N(\xi_0) - \xi_0}{\sqrt{2}} = X\left[\frac{N(\xi_0) + \xi_0}{\sqrt{2}}\right] \quad (2.12)$$

方程(2.12)进一步可以写成

$$\int_{N(\xi_0)}^{\eta} \frac{\tau(\xi_0, \eta_0) d\eta_0}{(\eta - \eta_0)^{1/2}} = - \int_{-s_0}^{N(\xi_0)} \frac{f(\xi_0, \eta_0) d\eta_0}{(\eta - \eta_0)^{1/2}} \quad (2.13)$$

此式为 Abel 型积分方程,可直接求得解答^[5]

$$\tau(\xi_0, \eta_0) = - \frac{1}{\pi} \frac{1}{[\eta_0 - N(\xi_0)]^{1/2}} \int_{-s_0}^{N(\xi_0)} \frac{f(\xi_0, u) [N(\xi_0) - u]^{1/2} du}{\eta_0 - u} \quad (2.14)$$

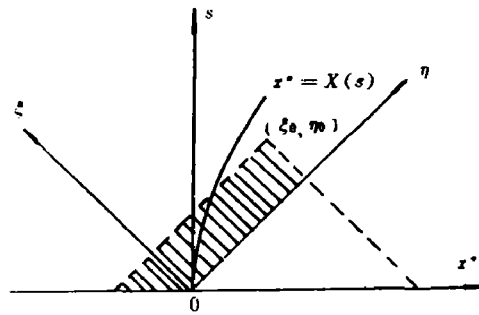


图 1 计算裂缝前方应力的积分域

Fig. 1 Integral domain for calculating stresses ahead of the crack

或

$$\tau(x^*, s) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{(x^* - X(s_1))^{1/2}} \int_{x^*-s}^{X(s_1)} \frac{f(v, s - x^* + v)[X(s_1) - v]^{1/2} dv}{x^* - v} \quad (2.15)$$

其中 s_1 由下式求得

$$s - x^* = s_1 - X(s_1) \quad (2.16)$$

下面我们进一步讨论裂缝尖端附近的应力奇异性。按照文献[12]提供的讨论方法，则可直接得到裂缝尖端附近的应力表达式

$$\begin{aligned} \tau(x^*, s) = & -\frac{1}{\pi} \frac{[1 - \frac{dX}{ds}]^{1/2}}{[x^* - X(s)]^{1/2}} \int_{X(s)-s}^{X(s)} \frac{f(v, s - X(s) + v)dv}{[X(s) - v]^{1/2}} \\ & + O[x^* - X(s)]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

由此可知，裂缝尖端附近的应力仍具有 $r^{-(1/2)}$ 阶的奇异性。

接着我们讨论求解新裂缝面上的位移和裂缝端点附近的质点速度。仍按文献[12]中给出的方法进行，并进行相类似的讨论，对新裂缝面上位移表达式为

$$w(\xi, \eta) = \frac{1}{\mu\pi\sqrt{2}} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi_0}{(\xi - \xi_0)^{1/2}} \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{f(\xi_0, \eta_0)d\eta_0}{(\eta - \eta_0)^{1/2}} \quad (2.18)$$

其中：

$$\frac{\eta - k(\eta)}{\sqrt{2}} = X\left[\frac{\eta + k(\eta)}{\sqrt{2}}\right] \quad (2.19)$$

而裂缝端点附近的质点速度表达式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial s} = & \frac{1}{\pi\mu} \frac{dX(s)/ds}{[1 + dX(s)/ds]^{1/2}} \frac{1}{[X(s) - x^*]^{1/2}} \\ & \times \int_{X(s)-s}^{X(s)} \frac{f(v, s - X(s) + v)dv}{[X(s) - v]^{1/2}} + O[X(s) - x^*]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.20)$$

三、各向异性介质中Ⅱ型裂缝的侧向扩展

1. 控制方程

我们求解各向异性介质中Ⅱ型裂缝的侧向扩展，其转向角为 $k'\pi$ ，如图2所示。在极坐标 (r', θ') 中，即 $x=r' \cdot \cos\theta'$ ， $y=r' \sin\theta'$ ，其裂缝面上的边界条件可以写成

$$\begin{aligned} \theta' = & \pm \pi, \quad r' > 0, \quad \tau_{\theta z} = \tau_1(r', t) \\ \theta' = & k'\pi \pm 0, \quad 0 < r' < S'(t), \\ \tau_{\theta z} = & \tau'_2(r', t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

而初始条件为

$$t = 0, \quad w(r', \theta'; 0) = \frac{\partial v(r', \theta'; 0)}{\partial t} = 0 \quad (3.2)$$

为了求解上述初边值问题，我们引入坐标变换^[12]

$$\begin{aligned} x' = & x - (c_{45}/c_{44})y \\ y' = & [(c_{44}c_{55} - c_{45}^2)^{1/2}/c_{44}]y \end{aligned} \quad (3.3)$$

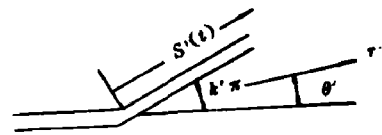


图2 裂缝的侧向扩展，转向角 $k'\pi$
Fig. 2 Kinking of the crack and the kinking angle $k'\pi$

利用变换式(3.3),各向异性介质中反平面问题的控制方程(2.1)可写成

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y'^2} = \frac{\rho'}{\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.4)$$

其中, $\mu = (c_{44}c_{55} - c_{45}^2)^{1/2}$, $\rho' = c_{44}\rho/\mu$ 。如果再次引入极坐标 $x' = r\cos\theta$, $y' = r\sin\theta$, 则方程(3.4)可以写成

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = S_T^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.5)$$

其中 $S_T^2 = \rho' / \mu$ 。

在极坐标系 (r, θ) 中, 转向角为 $k\pi$, 而裂缝面的边界条件式(3.1)可以写成

$$\begin{cases} \theta = \pm \pi, & 0 < r, & \frac{\mu}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = \tau_1(r, t) \\ \theta = k\pi \pm 0, & 0 < r < S(t), & \frac{\mu}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = \tau_2(r, t) \end{cases} \quad (3.6)$$

其中:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}k\pi &= [(\mu/c_{44})\operatorname{tg}k'\pi]/[1 - (c_{45}/c_{44})\operatorname{tg}k'\pi]; \\ S(t) &= S'(t)[\cos^2k'\pi - (c_{45}/c_{44})\sin 2k'\pi + (c_{55}/c_{44})\sin^2k'\pi]^{1/2}; \\ \tau_2(r, t) &= \frac{c_{44}\tau'_2(r, t)}{[\mu^2\sin^2k'\pi + (c_{44}\cos k'\pi - c_{45}\sin k'\pi)^2]^{1/2}}. \end{aligned}$$

这样,我们就得到在 (r, θ) 坐标系中求解各向异性介质中 III 型裂缝侧向扩展问题的控制方程(3.5)式和边界条件(3.6)式。因为它们与文献[9]给出的求解各向同性介质中 III 型裂缝扩展问题的方程组具有相同的数学形式,所以我们可以采用文献[9]给出的方法——摄动法进行求解。

2. 摄动法

引入映射变换^[9]

$$x^{**} = \frac{k}{\pi(1-k^2)}\theta^2 + \theta - \frac{k\pi}{1-k^2} \quad (3.7)$$

或

$$\theta = -\frac{k}{\pi}x^2 + x + k\pi \quad (3.8)$$

利用这个变换可将 $\theta = -\pi, k\pi$ 和 π 映射为 $x = -\pi, 0$ 和 π 。因此,在极坐标 (r, x) 中,裂缝的侧向扩展被映射成直裂缝的扩展问题。

利用映射变换(3.7)式或(3.8)式,控制方程(3.5)式和边界条件(3.6)式可写成

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - S_T^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{2k}{\pi(1-k^2)r^2} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + 2\left(x + \frac{k\pi}{1-k^2}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (3.9)$$

和

$$\begin{cases} x = \pm \pi, & 0 < r, & \frac{\mu}{r} \left[1 \pm \frac{2k}{1-k^2} \right] \frac{\partial w}{\partial x} = \tau_1(r, t) \\ x = \pm 0, & 0 < r < S(t), & \frac{\mu}{r} \left[1 + \frac{2k}{1-k^2} \right] \frac{\partial w}{\partial x} = \tau_2(r, t) \end{cases} \quad (3.10)$$

* 以下 x 为映射变换后的变量。

由式(3.6)知,当 $k\pi$ 很小时, $k\pi$ 也很小。因此, $k\pi$ 仍可取为摄动参数。此时,位移函数 w 可以写成如下形式

$$w(r, x, t) = w^{(0)}(r, x, t) + k\pi w^{(1)}(r, x, t) + \dots \quad (3.11)$$

按Ⅲ型裂缝强度因子定义

$$k_{\text{Ⅲ}}(k\pi, t) = \lim_{[r-S(t)] \rightarrow 0} \{2\pi[r-S(t)]^{1/2} \tau_{\theta z}(r, \theta, t)\}_{\theta=k\pi} \quad (3.12)$$

则显然有

$$k_{\text{Ⅲ}} = k_{\text{Ⅲ}}^{(0)} + k\pi k_{\text{Ⅲ}}^{(1)} + \dots \quad (3.13)$$

把式(3.11)代入式(3.19)和式(3.10),并比较等式两边 $k\pi$ 的零次幂项,则有

$$\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial x^2} = S_T^2 \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial x^2} \quad (3.14)$$

和

$$\begin{cases} x = \pm \pi, & 0 < r < S(t), & \frac{\mu}{r} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial x} = \tau_1(r, t) \\ x = \pm 0, & 0 < r < S(t), & \frac{\mu}{r} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial x} = \tau_2(r, t) \end{cases} \quad (3.15)$$

式(3.14)、(3.15)规定了一个“各向同性”介质中Ⅲ型直裂缝的扩展问题。利用式(2.17),则可直接求得裂缝尖端附近应力,即应力的零阶摄动解。

$$\tau^{(0)} = -\frac{1}{\pi} \frac{[1 - \frac{dS(s)}{ds}]^{1/2}}{[r - S(s)]^{1/2}} \int_{-s}^{s(s)} \frac{f^{(0)}[v, s - S(s) + v]}{[S(s) - v]^{1/2}} dv \quad (3.16)$$

则零阶的强度因子可写成

$$k_{\text{Ⅲ}}^{(0)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} [1 - \frac{dS(s)}{ds}]^{1/2} \int_{s(s)-s}^{s(s)} \frac{f^{(0)}[v, s - S(s) + v]}{[S(s) - v]^{1/2}} dv \quad (3.17)$$

其中: $f^{(0)} = \tau_1(v, s)H(-v) - \tau_2(vs)H(v)H[S(s) - v]$ 。

相类似,可比较摄动方程中 $k\pi$ 的一次幂项,则有

$$\frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial x^2} - S_T^2 \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^2} \frac{2}{\pi^2} \left[\frac{\partial w^{(0)}}{\partial x} + 2x \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial x^2} \right] \quad (3.18)$$

和

$$\begin{cases} x = \pm \pi, & 0 < r, & \frac{\mu}{r} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x} = \mp \frac{2}{\pi} \tau_1(r, t) \\ x = \pm 0, & 0 < r < S(s), & \frac{\mu}{r} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

因为零阶的位移解 $w^{(0)}(r, x, t)$ 是关于 $x=0$ 的反对称场,而 $\partial w^{(0)}/\partial x$ 和 $\partial^2 w^{(0)}/\partial x^2$ 是关于 $x=0$ 的对称场。所以由式(3.8)和式(3.9)所决定的一阶摄动解是关于 $x=0$ 的一个对称场。所以有 $k_{\text{Ⅲ}}^{(1)}=0$ 。则有

$$k_{\text{Ⅲ}} = k_{\text{Ⅲ}}^{(0)} + O[(k\pi)^2] \quad (3.20)$$

由以上讨论可知,强度因子的积分部分只依赖于裂缝的扩展长度而与其扩展速度无关。强度因子只是通过 $[1 - \frac{dS(s)}{ds}]^{1/2}$ 项才与裂缝的扩展速度联系起来。关于高阶的摄动问题,我们可以不加证明地得出, $k_{\text{Ⅲ}}^{(i)}$ 仍具有式(3.17)的形式,只是其中 $f^{(0)}$ 换成适当的 $f^{(i)}$ 就可以

了。当 n 取偶数时, k_{II}' 按式(3.17)计算, 而当 n 取奇数时, k_{II}' 则为零。

四、数值结果

在一般条件下, 强度因子可按式(3.17)计算。现在我们就一种非常简单的裂缝面条件, 讨论在不同弹性介质中, 裂缝尖端的强度因子随裂缝的扩展速度以及转向角的变化关系。

如果取如下的裂缝面条件

$$\tau_1 = 0, \quad \tau_2 = \tau_0 = \text{const} \quad (4.1)$$

则由式(3.6)得

$$\tau_2 = \frac{c_{44}\tau_0}{\sqrt{\mu^2 \sin^2 k' \pi + (c_{44} \cos k' \pi - c_{45} \sin k' \pi)^2}} \quad (4.2)$$

此时, 计算强度因子 k_{II} 的积分式(3.17)的下限应取为零, 可得

$$k_{II} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[1 - \frac{dS(s)}{ds}\right]^{1/2} \tau_2 \int_0^{s(s)} \frac{dv}{[S(s) - v]^{1/2}} \quad (4.3)$$

把式(4.2)代入式(4.3), 则有

$$k_{II} = -2\tau_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} a S(s)^{1/2} \left[1 - \beta \frac{dS(s)}{ds}\right]^{1/2} \quad (4.4)$$

其中:

$$a = \frac{(\cos k' \pi - \xi \sin 2k' \pi + \eta \sin k' \pi)^{1/4}}{[(\eta - \xi^2) \sin^2 k' \pi + (\cos k' \pi - \eta \sin k' \pi)^2]^{1/2}}$$

$$\beta = (\cos^2 k' \pi - \xi \sin k' \pi + \eta \sin^2 k' \pi)^{1/2};$$

$$\xi = c_{45}/c_{44}; \quad \eta = c_{55}/c_{44}.$$

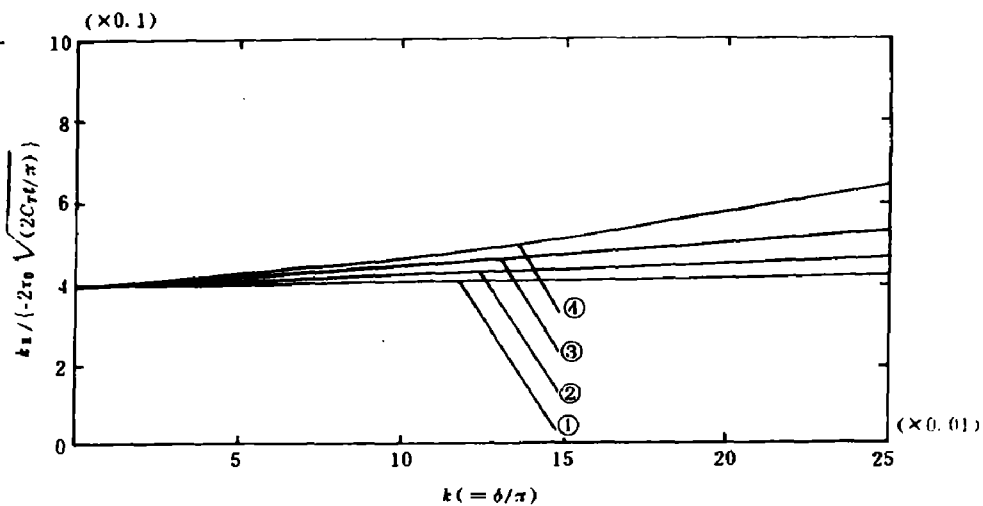


图3 动应力强度因子随转向角 δ 变化

Fig. 3 Dynamic stress intensity factors on kinking angle δ

$c_r/c_r = 0.5, \eta = 1.0$, ①—— $\xi = 0.0$, ②—— $\xi = 0.2$, ③—— $\xi = 0.4$, ④—— $\xi = 0.6$

进一步假设 $S(s) = C_p t$, $C_p < C_T$ (4.5)
 即裂纹以常速度 C_p 侧向扩展, 则上式可写成

$$k_{II} = -2\tau_0 \sqrt{\frac{2C_p t}{\pi}} a \left(1 - \beta \frac{C_p}{C_T}\right)^{1/2} \left(\frac{C_p}{C_T}\right)^{1/2} \quad (4.6)$$

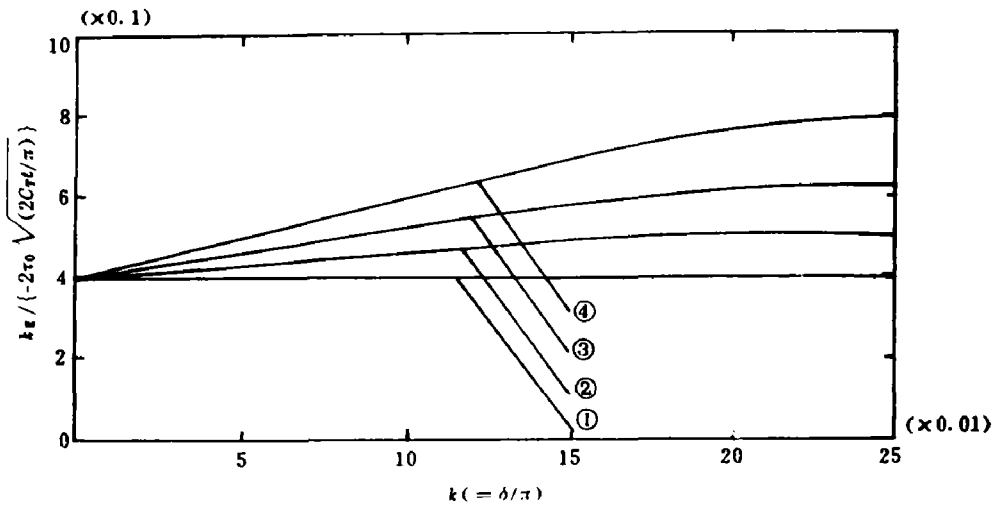


图 4 动应力强度因子随转向角 δ 变化

Fig. 4 Dynamic stress intensity factors on kinking angles δ

$C_p/C_T = 0.8, \eta = 1.0$, ①—— $\xi = 0.0$, ②—— $\xi = 0.2$, ③—— $\xi = 0.4$, ④—— $\xi = 0.6$

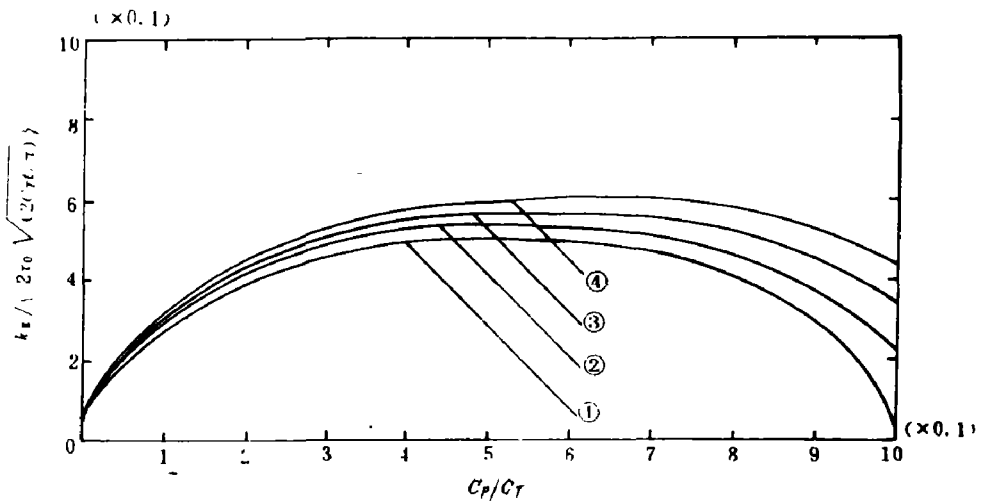


图 5 动应力强度因子随速度变化

Fig. 5 Dynamic stress intensity factors on propagating velocity of the crack

$\delta = 15^\circ, \eta = 1.0$, ①—— $\xi = 0.0$, ②—— $\xi = 0.2$, ③—— $\xi = 0.4$, ④—— $\xi = 0.6$

利用上式,可以计算强度因子在不同介质中随扩展速度和转向角的变化关系。图 3 至图 4 给出了 C_p/C_T 分别为 0.5 和 0.8 时,在不同介质中 k_I 随转向角的变化关系。图 5 至图 6 给出了转向角为 15° 和 30° 时,不同介质中 k_I 随裂缝扩展速度 C_p 的变化。图 7 至图 8 给出了在不同介质中,在不同转向角条件下, k_I 随侧向扩展速度的变化关系。

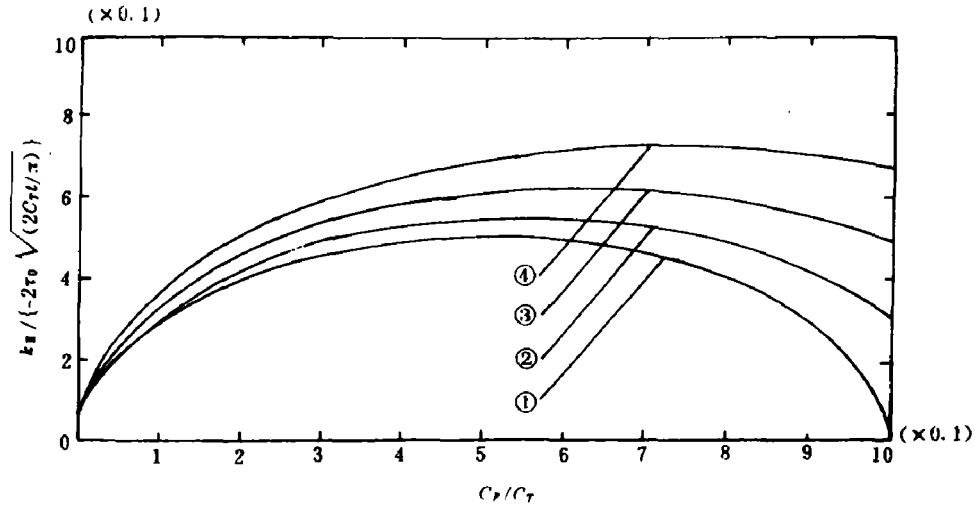


图 6 动应力强度因子随速度变化

Fig. 6 Dynamic stress intensity factors on propagating velocity of the crack.

$\delta = 30^\circ, \eta = 1.0$, ①— $\xi = 0.0$, ②— $\xi = 0.2$, ③— $\xi = 0.4$, ④— $\xi = 0.6$

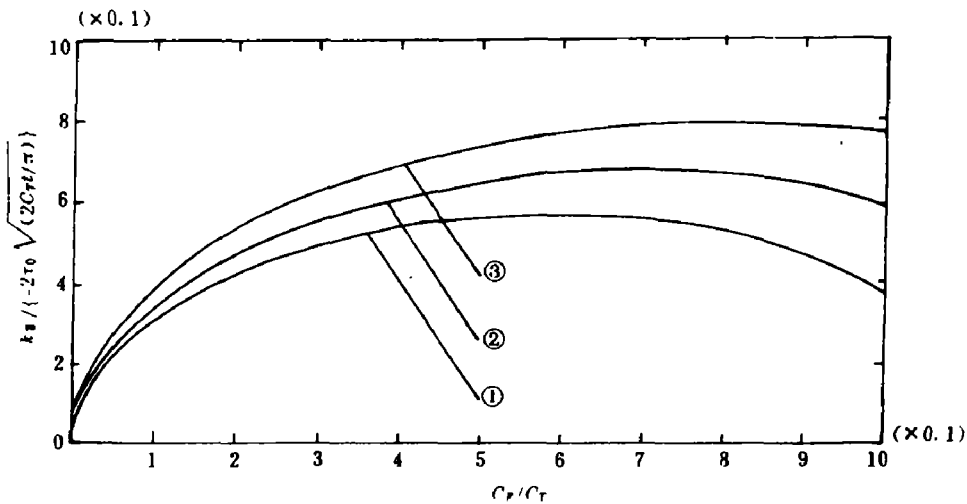


图 7 动应力强度因子随速度变化

Fig. 7 Dynamic stress intensity factors on propagating velocity of the crack.

$\xi = 0.4, \eta = 0.6$, ①— $\delta = 15^\circ$, ②— $\delta = 30^\circ$, ③— $\delta = 45^\circ$

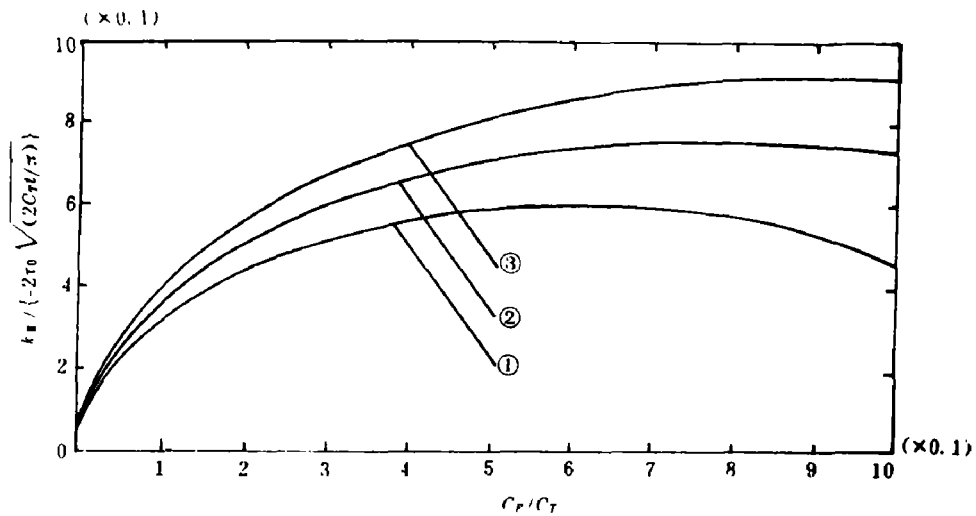


图8 动应力强度因子随速度变化

Fig. 8 Dynamic stress intensity factors on propagating velocity of the crack.

$\xi=0.6, \eta=0.8$, ①—— $\delta=15^\circ$, ②—— $\delta=30^\circ$, ③—— $\delta=45^\circ$

参 考 文 献

- [1] Ravi-Chandar K, Knauss W G. An experimental investigation into dynamic fracture, I. Crack initiation and arrest. *Int J Fracture*, 1984, 25 : 247-262
- [2] Ravi-Chandar K, Knauss W G. An experimental investigation into dynamic fracture : I. Microstructural aspects. *Int J Fracture*, 1984, 26 : 65-80
- [3] Ravi-Chandar K, Knauss W G. Dynamic crack-tip stresses under stress wave loading—a comparison of theory and experiment. *Int J Fracture*, 1982, 20 : 209-222
- [4] Sih G C. Stress distribution near internal crack tips for longitudinal shear problems. *J Appl Mech*, 1965, 32 : 51-58
- [5] Achenbach J D. *Wave propagation in an elastic solids*. New York : North-Holland, 1975.
- [6] Achenbach J D, Varatharajula V K. Skew crack propagation at the diffraction of a transient stress wave. *Quart Appl Math*, 1974, 32 : 123-135
- [7] Burgers P, Dempsey J P. Two analytical solutions for dynamic crack bifurcation in anti-plane strain. *J Appl Mech*, 1982, 49 : 366-370
- [8] Burgers P. Dynamic propagation of a kinked or bifurcation crack in anti-plane strain. *J Appl Mech*, 1982, 49 : 371-376
- [9] Kuo M K, Achenbach J D. Perturbation method to analyze the elastodynamic field near a kinked crack. *Int J Solids Struct*, 1985, 21 : 273-298
- [10] Ma C C, Burgers P. Mode II -crack kinking with delay time : An analytical approximation. *Int J solids struct*, 1986, 22 : 883-899
- [11] Ma C C, Burgers P. Initiation propagation and kinking of an anti-plane crack. *J Appl Mch*, 1988, 55 : 111-119

[12] 刘殿魁. 各向异性介质中 SH 波引起的裂缝扩展. 爆炸与冲击, 1990, 10(2): 97—106

PERTURBATION METHOD TO ANALYZE THE PROPAGATION OF MODE II CRACK KINKING IN AN ANISOTROPIC MEDIUM

Liu Diankui Liu Guoli

(*Institute of Engineering Mechanics, State Seismological Bureau, Harbin, China 150080*)

ABSTRACT There are two parts in this paper: First, the Green's function method has been used to the propagation of mode II crack in an anisotropic medium. The next, a perturbation procedure is presented which express the propagation of mode II crack kinking in an anisotropic medium in terms of a power series of $k' \pi$, where $k' \pi$ is the kinking angle. The precision of the zeroth order approximate solution of the stress intensity factor is up to $O[(k' \pi)^2]$. Numerical results of the dependence of the stress intensity factor on the propagation velocity and kinking angle $k' \pi$ are given.

KEY WORDS anisotropic, mode II-crack, kinking, perturbation