

# 烧蚀波 R-T 不稳定性

## ——辐射热传导及密度分布效应研究

徐乃新 陈 进

(北京应用物理与计算数学研究所 北京8009信箱 100088)

**摘 要** 本文考察了由烧蚀稀疏形成的流体密度分布和烧蚀波阵面上非线性热传导效应对烧蚀波 Rayleigh-Taylor 不稳定性的影响。得到烧蚀稀疏区流体的不稳定性加剧烧蚀波阵面不稳定性的结论。发展了“火抛光”效应致稳作用的解析论证。

**关键词** 烧蚀波 辐射热传导 R-T 不稳定性 烧蚀层密度分布

### 一、引 言

烧蚀波不稳定性的研究在惯性约束聚变(ICF)等近代高科技领域具有重要的地位。在 ICF 中,不论是电子束或激光束作驱动源,也不论是直接驱动或间接驱动靶,其内爆动力学过程都表现为烧蚀波驱动过程。数值模拟<sup>[1,2]</sup>或相似解<sup>[3]</sup>给出的烧蚀波结构是一个由激波、辐射波(烧蚀波阵面)和稀疏波相互作用形成的结构。其典型剖面如图1。很明显烧蚀波运动具有典型的 R-T 不稳定性。与经典的 R-T 不稳定性问题相比其特点是不稳定阵面是一个运动的烧蚀阵面。不仅有质量流通过阵面,而且因为阵面上的(辐射或电子)热传导效应还有热流通过阵面。不稳定的发展所形成的非球对称压缩、介质混合或破裂,可能成为

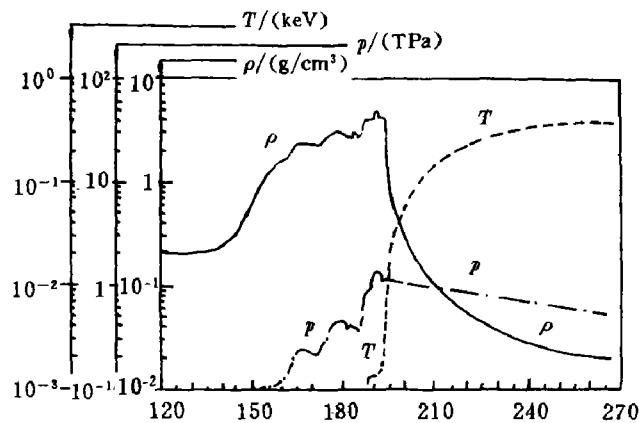


图1 烧蚀波剖面。某时刻、密度、压力和温度的空间分布

Fig. 1 Space distribution of density, pressure and temperature at one time



实现 ICF 的严重障碍<sup>[4]</sup>。近二十年来,有关烧蚀波不稳定性的研究,以及所谓“火抛光”(Fire-polishing)效应,即不稳定烧蚀波阵面上(辐射或电子)热传导效应的致稳作用的研究引起了广泛的兴趣<sup>[1,2,5,6,7],[9-14]</sup>。目前在烧蚀波稳定性的解析研究中,像我们熟悉的各类不稳定研究所做的那样,都把阵面处理为间断面,烧蚀波阵面前的冲击压缩区和阵面后的烧蚀稀疏区都处理为常数区。但事实上,流体在烧蚀稀疏波作用下,烧蚀波阵面后形成烧蚀稀疏区,其密度有一个明显的非常数分布(见图 1)。本文的主要目的在于考察烧蚀稀疏区密度分布对烧蚀波 R-T 不稳定性的影响。同时发展“火抛光”效应制稳作用的解析论证,希望得到一些解析的定标关系。

## 二、基本方程及色散关系

本文应用文献 [5]—[7] 发展的烧蚀波不稳定性研究的解析理论。考察由阵面  $X = \xi(y, t)$  描述的不稳定烧蚀波阵面动力学运动(见图 2)。假定烧蚀稀疏区扰动前的密度分布可由下式近似描述

$$\rho_0^s(x) = \rho_0^s e^{sx} \quad (s < 0) \quad (1)$$

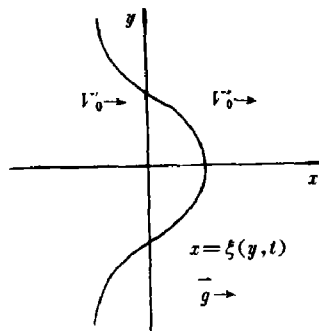


图 2 不稳定烧蚀波阵面运动

Fig. 2 Movement of the instability ablation front

应用包括非线性热传导项  $\text{div}(\kappa \text{grad } T)$  的三个基本守恒方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{V}) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho \bar{V})}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{V} \bar{V}) + \text{grad } p = \rho \bar{g} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho e + \frac{1}{2} \rho |\bar{V}|^2 \right) + \text{div} \left[ \left( \rho e + \frac{1}{2} \rho |\bar{V}|^2 + p \right) \bar{V} \right] \\ - \text{div}(\kappa \text{grad } T) = \rho \bar{V} \bar{g} \end{aligned} \quad (4)$$

这里:  $e$  为单位质量流体的内能,  $\rho$ 、 $p$ 、 $\bar{V}$  分别表示流体密度、压力和速度,  $\kappa = \kappa^* T^{\mu} \rho^{-\nu}$  热传导系数  $\kappa^*$ 、指数  $\nu$  和  $\mu$  依赖于热传导机制(辐射或电子),  $-\bar{g}$  为烧蚀波加速度。这里我们已把坐标系建立在加速运动的烧蚀波阵面上。

在应用小扰动理论进行线性化处理时,采用 S. Chandrasekhar<sup>[8]</sup>关于流体动力学不稳定性研究中应用的符号。令扰动的形式为  $\exp(iky + \gamma t)$ , 其中  $k$  为波数( $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  为扰动波长),  $\gamma$  为不稳定性增长速率。为了得到烧蚀阵面上扰动量的间断关系,在阵面  $\xi$  附近  $L = 2\delta$  宽度内积分方程(2)–(4),并取  $L \sim 0$  时的近似。为模拟“火抛光”效应,侧向热传导项积分  $L$  取有限厚度。这样我们得到烧蚀波阵面上扰动量的三个关系式

$$-\gamma \xi \rho_0^s (1 - \epsilon) + \rho_0^s \tilde{V}_x' - \rho_0^s \tilde{V}_x'' + V_{x0} \tilde{\rho}' - V_{x0} \tilde{\rho}'' = 0 \quad (5)$$

$$\tilde{p}' - \tilde{p}'' + g \xi \rho_0^s (1 - \epsilon) + \tilde{p}' (V_{x0})^2 - \tilde{p}'' (V_{x0})^2 + 2 \rho_0^s V_{x0} (\tilde{V}_x' - \tilde{V}_x'') = 0 \quad (6)$$

$$-\gamma \xi \rho_0^s V_{x0} (1 - \epsilon) + \frac{5}{2} [\tilde{p}' (V_{x0})^3 - \tilde{p}'' (V_{x0})^3 + \rho_0^s \tilde{V}_x' - \rho_0^s \tilde{V}_x''] +$$



$$+ \frac{1}{2} [\tilde{p}' (V'_{x0})^2 - \tilde{p}'' (V''_{x0})^2] + \frac{3}{2} \rho_0 V'_{x0} (V'_{x0} \tilde{V}'_x - V''_{x0} \tilde{V}''_x) = \frac{k^2 \kappa_0 L \tilde{p}'}{\rho_0 C_p} \quad (7)$$

其中:  $\epsilon = \rho_0'/\rho_0$ ,  $C_p$  为定压比热,  $V_x$  为速度  $\vec{V}(V_x, V_y)$  的  $x$  轴分量。

以上应用“0”脚标表示扰动前的零级量;上标“~”表示线性扰动量;角标“'”表示阵面前(负  $X$  区)冲击压缩区的物理量;角标“''”表示阵面后(正  $X$  区)烧蚀稀疏区的物理量。

由于我们考虑的阵面有法向间断性质,阵面前后的切向速度连续。由此导出波阵面上扰动量的第四个关系

$$\tilde{V}'_y - \tilde{V}''_y + ik\xi(V'_{x0} - V''_{x0}) = 0 \quad (8)$$

鉴于一般烧蚀波阵面的马赫数小,假定烧蚀波阵面前后流体为不可压是一个很好的近似。应用这一假定我们可以导出阵面前扰动量的关系式

$$\tilde{V}'_y = i\tilde{V}'_x \quad (9)$$

$$\tilde{p}' = -\rho_0' \left( \frac{\gamma}{k} + V'_{x0} \right) \tilde{V}'_x \quad (10)$$

$$\tilde{\rho}' = 0 \quad (11)$$

在烧蚀波阵面后,由于我们假定扰动前密度不是常数,而有如式(1)分布,这给处理波阵面后扰动量关系带来困难。根据拉格朗日定理引进无旋假定,即  $\text{rot } \vec{V} = 0$ 。从不可压流体动力学方程出发,可以得到一个新的烧蚀波阵面后扰动量的关系式

$$\begin{aligned} \tilde{p}'' - \left[ \left( \frac{s}{k} \right)^2 - 1 + \left( \frac{s}{k} \right) \frac{1}{kV'_{x0}} \left( \gamma - \frac{g}{V'_{x0}} \right) \right] \rho_0 V'_{x0} \tilde{V}''_x \\ + i\rho_0 V'_{x0} \tilde{V}''_y \left[ \left( \frac{s^2}{k^2} - 1 \right) \frac{\gamma}{kV'_{x0}} + \frac{s}{k} \right] = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

引进无量纲参量:定标增长速率  $X = \gamma/kV'_{x0}$ , 定标加速度  $G = g/k(V'_{x0})^2$ , 定标扩散系数  $C = 2k^2 LD' \rho_0' V'_{x0} / 5\rho_0$  其中  $D' = \kappa_0'/\rho_0' C_p$ , 它表征烧蚀波阵面上的(辐射或电子)热传导的作用。从以上导出的扰动量关系式(5)–(12),应用波阵面上零级量关系和  $V'_{x0} \ll C_s$  条件可导出色散关系

$$\begin{aligned} C \frac{s}{k} X^3 + \left\{ \left( \frac{s}{k} \right)^2 [C + \epsilon(1+C)] - \left( \frac{s}{k} \right) [CG - \epsilon(1+C)] + (1-\epsilon)(1+C) \right\} X^2 \\ + \left\{ \epsilon \left( \frac{s}{k} \right)^2 [C + \epsilon(1+C)] - \left( \frac{s}{k} \right) (G-1)\epsilon(1+C) + CG \right. \\ \left. + \epsilon(1-\epsilon)(1+C) \right\} X + \left( G + \frac{s}{k} \epsilon \right) [(1+C)\epsilon - 1] = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

无量纲参量  $X, G, C$  均含波数  $k$ , 为给出不稳定性增长速率与波数  $k$  的关系,我们令

$$C = c_0 k^2, \quad G = G_0/k, \quad X = xG$$

可以得到一个新的,不隐含波数  $k$  的定标增长速率  $x = \gamma V'_{x0}/g$  的色散关系(三次代数方程)。

如果令  $C = s = 0$ , 色散方程(13)退化为

$$X^2 + \epsilon X - G = 0$$

当  $\epsilon \ll 1$ , 由最大正根可得  $\gamma = \sqrt{kg}$ 。这就是我们熟悉的经典的 Rayleigh-Taylor 不稳定性公式。



### 三、热传导效应致稳作用的解析论证

如果令  $s=0$ , 而  $C \neq 0$ , 这就是 L. Baker 在论文[7]中研究的情况。但本文得到的是一个二次色散关系。

$$(1-\varepsilon)(1+C)X^2 + [CG + \varepsilon(1-\varepsilon)(1+C)]X + G(\varepsilon C + \varepsilon - 1) = 0 \quad (14)$$

它比 L. Baker 的三次色散关系降了一阶。对比计算表明, 定标增长速率  $x$  非常接近。图 3 绘制了典型参数下两种  $x \sim k/k_0$  关系的比较曲线。其表明两者只在最大增长速率附近有约 10% 差异, 其它波数则符合得相当好。截断波数相同。

利用本文得到的二次色散关系, 容易导出不稳定性定标增长速率  $x$  的解析式。注意到我们定义的无量纲参量  $c_0 k_0^2, G_0/k_0$  的恒正性以及  $\varepsilon < 1$  显然有

$$x = \left\{ - \left[ c_0 k_0^2 \frac{k}{k_0} \frac{G_0}{k_0} + \varepsilon(1-\varepsilon) \left( 1 + c_0 k_0^2 \frac{k^2}{k_0^2} \right) \right] \left\{ \left[ c_0 k_0^2 \frac{k}{k_0} \frac{G_0}{k_0} + \varepsilon(1-\varepsilon) \left( 1 + c_0 k_0^2 \frac{k^2}{k_0^2} \right) \right]^2 + 4(1-\varepsilon) \left( 1 + c_0 k_0^2 \frac{k^2}{k_0^2} \right) \frac{G_0/k_0}{k/k_0} \right\} \right\}^{1/2} / \left[ 2(1-\varepsilon) \left( 1 + c_0 k_0^2 \frac{k^2}{k_0^2} \right) \left( \frac{G_0/k_0}{k/k_0} \right) \right] \quad (15)$$

其中  $k_0$  为定标波数。不稳定性增长速率  $x = \gamma v_{s0}/g$  依赖于  $\varepsilon = \rho_0/\rho'_0, G_0/k_0 = g/(V_{s0})^2, c_0 k_0^2 = \frac{2LD}{5\rho_0} \frac{\rho_0 V_{s0} k_0^2}{k_0^2}$  和  $k/k_0$ 。具体说依赖于烧蚀加速度, 烧蚀阵面前的先行激波的强度以及流体的热传导性质。

这使我们可能得到所谓“火抛光”效应致稳作用和一些性质的解析分析结果。不必象文献[4]那样, 必须借助数值计算结果进行图形演示或推断。

(I) 对  $\varepsilon \ll 1$  情况, 我们容易证明不等式

$$\frac{-c_0 k^2 + \left[ c_0^2 k^4 + 4(1+c_0 k^2) \frac{k}{G_0} \right]^{1/2}}{2(1+c_0 k^2)} < \sqrt{\frac{k}{G_0}}$$

从而解析的证明了热传导效应在任意波数  $k$  下的致稳作用。

(II) 从二次色散关系(14), 并注意到系数的恒正性, 可以判定在考虑侧向热传导(“火抛光”效应)情况下存在截断波数  $k_c$  的充要条件是常数项等于零。由此得到不稳定截断波数  $k_c$  的解析式

$$\frac{k_c}{k_0} = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon c_0 k_0^2}} \quad (17)$$

其表明不稳定性截断波数  $k_c$  与流体的辐射热传导系数  $\kappa$  的方根成反比。

(III) 我们还可以严格证明, 对任意确定的  $G_0/k_0, \varepsilon, k/k_0$

$$\frac{\partial x}{\partial c_0 k_0^2} < 0 \quad (18)$$

其表明热传导效应致稳作用的单调性。图 3 表明了所述单调性。

(IV) 我们还容易给出在给定  $c_0 k_0^2, G_0/k_0, \varepsilon$  下最危险波数和最大不稳定性增长速率的解析公式。这只要找出  $\partial x(k, c_0 k_0^2, G_0/k_0, \varepsilon)/\partial k = 0$  的波数  $k_m$ , 并计算  $x(k_m)$  即可。

以上分析结论都清楚地表明, 烧蚀波阵面上的热传导效应是 R-T 不稳定性的致稳因



素。典型参数下定标增长速率  $x \sim k/k_0$  的数值计算结果绘制图 3。热传导对烧蚀波 R-T 不稳定性致稳机理分析解释为当 R-T 不稳定性增长时,烧蚀波阵面前相对冷的密实流体尖峰插入高温辐射流体。尖峰部位单位质量流体吸收更多热流而优先被烧掉,从而减少了扰动的不稳定性增长。

#### 四、烧蚀稀疏区流体密度分布

##### 对烧蚀波 R-T 不稳定性的影响

对  $s$  不为零的情况,即本文着重考察的烧蚀稀疏区流体有如式(1)描述的密度分布的情况。我们可用 Cardan 公式求解色散方程(13)。在  $c_0 k_0^2$ ,  $\varepsilon$ ,  $G_0/k_0$ ,  $s/k_0$  典型取值下,定标增长速率  $x \sim k/k_0$  的曲线制图 4。其表明烧蚀稀疏区密度分布效应加剧了烧蚀阵面

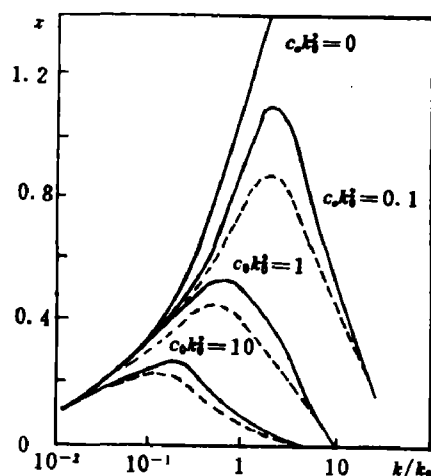


图 3 定标增长速率  $x \sim$  定标波数  $k/k_0$  的关系曲线

Fig. 3 Graphs of the scaled growth rate  $x$  versus scaled wavenumber  $k/k_0$

的 R-T 不稳定性。随着密度分布  $\varepsilon$  指数  $s$  的减小(注意  $s$  为负值),定标增长速率  $x$  增大。特别在最大增长速率附近的尤为显著。最危险波数  $k_m$  略向大波数漂移,但截断波数  $k_c$  不变,即与  $s$  无关。

Rayleigh 最早研究过重力场中两无限平板间具有密度分布  $\rho = \rho_0 e^{\beta x}$  ( $x \geq 0, \beta$  常数)流体的稳定性问题。结论是当  $\beta > 0$  时流体不稳定<sup>[8]</sup>。根据达兰贝尔原理,以加速度  $-g$  运动,具有  $\rho(x) = \rho_0 e^{\beta x}$  ( $x \geq 0, \beta < 0$ ) 密度分布的烧蚀稀疏区流体和其等价。这就是说,烧蚀稀疏区流体自身具有 R-T 不稳定性。烧蚀稀疏区流体的不稳定性加剧了烧蚀波阵面的不稳定性。这就是本节结论的机理分析。

图 4 定标增长速率  $x \sim$  定标波数  $k/k_0$  的关系曲线。

Fig. 4 Scaled growth rate  $x$  versus scaled wavenumber  $k/k_0$

以上结论扩展了烧蚀波不稳定区域的认识。在我们进行烧蚀波 R-T 不稳定性研究时,必须考虑热传导(“火抛光”效应)和烧蚀稀疏区密度分布这两个具有相反影响的因素。



## 参 考 文 献

- [1] Mead W C, Lindl J D. UCRL-76477
- [2] Nuckolls J, Wood L. *Nature*, 1972, 239 (5368):139-142
- [3] Pakula R, Sigel R. *Phys Fluids*, 1985, 28(1): 232-244
- [4] Storm E, et al. *Progress in laboratory High Gain ICF Prospects for the Future* (1988) UCRL, Preprint
- [5] Bodner S. *Phys Rev Lett*, 1974, 33:761-764
- [6] Baker L. *Phys Fluids*, 1978, 21:295-296
- [7] Baker L. *Phys Fluids*, 1983, 26:627-630
- [8] Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* Oxford U P, London, 1961,428-477
- [9] Shian J N, Goldman E B, Weng C I, *Phys Rev Lett*, 1974, 32:352-358
- [10] Henderson D B, McCrory R L, Morse R, L. *Phys Rev Lett*, 1974, 33:205-208
- [11] Kidder R E. *Nucl. Fusion*, 1976, 16:53-60
- [12] Fraley G S, et al, *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research*, 1974, 2:543-555
- [13] Kilkenny J D, et al. *Bulletin of American Physical Society*, 1987, 32:1769
- [14] Emery M H, et al. *Phys Rev Lett*, 1986, 57:703-706

## RAYLEIGH-TAYLOR INSTABILITY OF THE ABLATIVE WAVE —— EFFECTS STUDIES OF RADIATION HEAT CONDUCTION AND DISTRIBUTION OF MASS DENSITY

Xu Naixin    Chen Jin

(*Beijing Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088*)

**ABSTRACT** In this paper, the influences of radiation heat conduction at the ablation front and distribution of mass density, which results from ablative rarefaction, on Rayleigh-Taylor instability of the ablative wave are examined. We obtain the conclusion that the instability of ablative rarefaction layer fluids aggravates the instability of ablative front. An analytic demonstration that the “fire-polishing” effect is a stabilization factor is developed.

**KEY WORDS** ablative wave, radiation heat conduction, R-T instability, distribution of mass density of ablation layer